Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

Н. А. Колегов, О. В. Маркова

СИСТЕМЫ ПОРОЖДАЮЩИХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ИНЦИДЕНТНОСТИ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

§1. Введение

Исследование систем порождающих матричных алгебр имеет богатую историю. Одним из наиболее ранних результатов является теорема Бернсайда (самое простое известное доказательство можно найти в работе Ломоносова и Розенталя [8]). Из неё следует, что данное непустое множество матриц порождает полную матричную алгебру над алгебраически замкнутым полем, если и только если оно неприводимо. Важное значение теорема Бернсайда имеет для теории представлений (см., например, книгу Желобенко [23, Глава 3, §21]). Раджабалипур, Розенталь и Яхагхи [22] обобщили этот результат на случай матриц над телами.

Теорема Бернсайда – это редкий пример того, когда удалось описать все системы порождающих некоторой матричной алгебры. Другой подобный результат был получен уже значительно позже в работе Лонгстаффа и Розенталя [9], написанной на стыке теории матриц и алгебр инцидентности.

Алгебры инцидентности впервые были рассмотрены в работе Рота [19] и впоследствии активно изучались. Подробно о них можно прочесть в книге Шпигеля, О'Доннела [20]. Большой список работ, посвящённых алгебрам инцидентности, имеется в библиографии статьи Иованова и Коффи [5]. Отметим также исследования Маренича [11] о свойствах сопряжения, Начева [16] о полиномиальных тождествах, Тапкина [21] о связи с кольцами формальных матриц.

Возвращаясь к работе Лонстаффа–Розенталя [9], отметим, что в ней был получен критерий (теорема 4.1), показывающий, когда множество матриц порождает заданную матричную алгебру инцидентности. Как

Ключевые слова: матричные алгебры инцидентности, система порождающих, система порождающих в строгом смысле, минимальная мощность системы порождающих, функция длины алгебр, треугольные матрицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

частный случай, можно описать все системы порождающих алгебры верхнетреугольных матриц.

Изучение систем порождающих возможно с различных точек зрения. Описанные выше результаты можно отнести к “качественному” или “структурному” направлению (получены результаты о свойствах и строении систем порождающих). Другим классическим направлением является “количественный” подход – вычисление числовых характеристик порождающих множеств.

Отметим две такие характеристики, исследованию которых и посвящена данная работа. Первая из них – минимальное количество порождающих некоторой конкретной матричной алгебры или всех алгебр из некоторого семейства. Здесь следует упомянуть работу Костова [6], в которой показано, что всякая комплексная матричная алгебра имеет систему порождающих из $\left[n^2/4\right]+1$ матриц, и каждое число от 1 до $\left[n^2/4\right]+1$ является минимальным количеством порождающих для некоторой комплексной матричной алгебры. Этот параметр важен не только для матричных алгебр, но и для всех конечнопорождённых алгебраических структур (Хабельстейн, Хэмилтон, Ружичка [4]). Вторая важная характеристика – длина порождающего множества и алгебры. Длина в некотором смысле измеряет мультипликативную сложность данной порождающей системы или алгебры в целом, поэтому она важна в ряде задач вычислительных методов теории матриц (см., например, работу Альпина и Икрамова [1]). В статье Паза [17] была сформулирована задача вычисления длины полной матричной алгебры. Эта проблема до сих пор является открытой, однако получено множество существенных результатов для длин собственных подалгебр и для длины полной матричной алгебры при дополнительных ограничениях на порождающие множества, см., например, работы [2,3,10] и их библиографию. Задача вычисления длины матричных алгебр инцидентности впервые была рассмотрена вторым автором в работе [12], где, в частности, получены результаты для алгебр над полем из двух элементов.

Отметим, что если алгебра обладает единицей, то традиционно, говоря о системе порождающих, считают единицу пустым словом от элементов алгебры. Хотя такое определение и не подходит для алгебр без единицы, многие авторы предпочитают его для работы с матричными алгебрами. Исторически это можно объяснить главным образом тем, что исследования порождающих матричных алгебр были начаты с полной матричной алгебры, которая является простой алгеброй, а для простых алгебр, в силу [7, предложение 2.1], определения строгой и обычной порождаемости эквивалентны. В некоторых работах пустое слово не считается словом от элементов алгебры даже при наличии в ней единичной матрицы, например, в статье Лонгстаффа и Розенталя [9]. Так как результаты этой работы существенны для наших рассуждений, то мы, преследуя цель сравнить два различных подхода, в нашей работе разделяем понятие порождаемости на обычную, когда единица алгебры считается словом длины 0 от образующих, и строгую, когда это допущение не используется. Мы покажем, что эти понятия хоть и близки и указанные числовые характеристики не будут сильно различаться в зависимости от выбора определения системы порождающих, но всё-таки различаются для матричных алгебр инцидентности, и, что особенно интересно, различия нетривиальным образом проявляются именно для алгебр над конечными полями малой мощности.

Наша работа построена следующим образом. В §2 вводится система обозначений, здесь же представлены некоторые вспомогательные результаты относительно строения матричных алгебр инцидентности и длины алгебр. В §3 найдены минимальное количество порождающих матричной алгебры инцидентности и её длина над любым полем достаточно большой мощности (не меньшей порядка матриц) как в обычном, так и в строгом смыслах. Показано, что для больших полей минимальное число порождающих не зависит от определения системы порождающих. В §4 для оставшихся малых конечных полей вычислено минимальное количество порождающих (в обычном смысле) и получена верхняя оценка длины матричных алгебр инцидентности как функции порядка матриц, мощности поля и максимума длин цепей частично упорядоченного множества, на котором построена алгебра. В §5 получено обобщение критерия Лонгстаффа - Розенталя [9] на случай систем порождающих в строгом смысле. Для этой же ситуации найдено минимальное количество порождающих. Показано, что для малых полей минимальное число порождающих нетривиально зависит от определения системы порождающих.

§2. Основные определения и вспомогательные результаты

2.1. Алгебры инцидентности. Пусть $(S, \preceq)$ – частично упорядоченное множество. Назовем его *локально конечным*, если всякий отрезок $[a, b] = \{x \in S : a \preceq x \preceq b\}$ конечен. Будем использовать обозначение $i \prec j$, если $i \preceq j$ и $i \neq j$. Будем говорить, что $j \in S$ *покрывает* $i \in S$, если $i \prec j$ и не существует такого $k \in S$, что $i \prec k \prec j$, иначе говоря, если $|[i, j]| = 2$.

Определение 2.1. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. *Алгебра инцидентности* $\mathfrak{A}(S)$ – это множество всех таких функций $f : S \times S \to \mathbb{F}$, для которых верна импликация

$$(x \npreceq y) \to (f(x, y) = 0).$$

$\mathfrak{A}(S)$ является линейным пространством относительно операций поточечного сложения и умножения на скаляры из поля. Произведение функций определим через аналог свёртки Дирихле

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \preceq u \preceq y} f(x, u) g(u, y).$$

В силу локальной конечности, свёртка определена корректно. Непосредственно проверяются её ассоциативность и дистрибутивность относительно сложения. Нейтральным элементом относительно свёртки является дельта-функция Кронекера

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Через $M_n(\mathbb{F})$ будем обозначать алгебру всех матриц размера $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ над полем $\mathbb{F}$, через $T_n(\mathbb{F})$ и $D_n(\mathbb{F})$ – её подалгебры верхнетреугольных и диагональных матриц соответственно. *Матричной единицей* $E_{ij} \in M_n(\mathbb{F})$ будем называть матрицу, у которой на позиции (i, j) стоит единица, а на остальных местах – нули. E будет обозначать единичную матрицу в $M_n(\mathbb{F})$. Для матрицы $B \in M_n(\mathbb{F})$ через $(B)_{ij}$ будем обозначать её элемент, стоящий на позиции (i, j).

В дальнейшем, если не указано иного, полагаем $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $n \geqslant 2$ (заметим, что если S – произвольное конечное множество, то его элементы можно просто занумеровать). В этой ситуации естественно считать алгебру инцидентности матричной, а именно

$$\mathfrak{A} = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : (i \npreceq j) \to (a_{ij} = 0)\}.$$

Тогда свёртка Дирихле станет ничем иным, как матричным умножением. Следуя [19], где была введена ζ-функция, будем использовать *ζ-матрицу*, или *матрицу-шаблон*,

$$(\zeta)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \preceq j \\ 0, & \text{если } i \npreceq j. \end{cases}$$

Очевидно, что $\zeta = \sum\limits_{i \preceq j} E_{ij}$.

Скажем, что частичный порядок $\preceq$ *согласован с естественным порядком*, если для всех $i, j \in S$ верна импликация $(i \preceq j) \to (i \leqslant j)$. Заметим, что в этом случае соответствующая матричная алгебра инцидентности будет подалгеброй в алгебре верхнетреугольных матриц.

Приведём несколько утверждений, которые позволяют лучше понять структуру матричных алгебр инцидентности. Например, следующее очевидное предложение важно для понимания структуры стандартного базиса матричных алгебр инцидентности.

Предложение 2.2. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, n – натуральное число, $n \geqslant 2$. Произвольная матричная алгебра $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ является матричной алгеброй инцидентности для множества $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ с некоторым отношением частичного порядка $\preceq$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}$ как линейное пространство имеет базис, целиком состоящий из матричных единиц, причём все диагональные матричные единицы E_{ii} $(i \in S)$ принадлежат этому базису и никакие две симметричные матричные единицы E_{ij} и E_{ji} $(i, j \in S)$ одновременно ему не принадлежат.*

В [9, доказательство главной теоремы, стр. 120] показано, что матричную алгебру инцидентности всегда можно считать верхнетреугольной.

Теорема 2.3 ([9]). *Пусть $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – матричная алгебра инцидентности. Тогда существует такая алгебра инцидентности $\mathfrak{B} \subseteq T_n(\mathbb{F})$, что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$, причём $\mathfrak{B} = P\mathfrak{A}P^{-1}$, где P – перестановочная матрица.*

Поскольку исследуемые нами характеристики матричных алгебр инцидентности сохраняются при изоморфизме, всюду в дальнейшем мы **будем предполагать, что рассматриваемые матричные алгебры инцидентности лежат в** $T_n(\mathbb{F})$.

Предложение 2.4. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле и* $\mathfrak{A}$ *– подалгебра в алгебре всех верхнетреугольных матриц* $T_n(\mathbb{F})$. *Тогда* $\mathfrak{A}$ *– матричная алгебра инцидентности, если и только если алгебра всех диагональных матриц* $D_n(\mathbb{F})$ *есть подалгебра в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Матричная алгебра инцидентности, очевидно, содержит алгебру всех диагональных матриц. Обратно, если $\mathfrak{A}$ содержит все диагональные матрицы (а значит и все диагональные матричные единицы), то определим

$$\mathfrak{R} = \{(i,j) \in \mathbb{N}_{\leqslant n} \times \mathbb{N}_{\leqslant n} \mid \exists A^{ij} \in \mathfrak{A} : (A^{ij})_{ij} \neq 0\}.$$

Тогда очевидно, что

$$\forall (i,j) \in \mathfrak{R} : E_{ij} = \frac{1}{(A^{ij})_{ij}} E_{ii} A^{ij} E_{jj} \in \mathfrak{A},$$

$$\langle \{E_{ij} \mid (i,j) \in \mathfrak{R}\} \cup \{E_{ii} \mid i \in \mathbb{N}_{\leqslant n}\} \rangle = \mathfrak{A}.$$

Остаётся применить предложение 2.2. □

Замечание 2.5. Алгебра $D_n(\mathbb{F})$ является минимальной (по включению, соответственно, и по размерности) матричной алгеброй инцидентности (относительно порядка, при котором все различные числа не сравнимы). Наоборот, алгебра $T_n(\mathbb{F})$ является максимальной алгеброй инцидентности. Она соответствует естественному порядку на S.

2.2. Порождающие множества и длина. Пусть $\Phi \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – непустое подмножество. Через $\langle \Phi \rangle$ будем обозначать линейную оболочку Φ (множество всех конечных линейных комбинаций элементов из Φ с коэффициентами из $\mathbb{F}$).

Для конечного множества (алфавита) $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ конечные последовательности букв из Θ (буквы могут повторяться) назовем *словами*. Пусть Θ^* обозначает *множество всех слов в алфавите* Θ, включая пустое слово ε, F_Θ – *свободный моноид над алфавитом* Θ, т.е. Θ^* с операцией *конкатенации*. *Длина* слова $\theta_{i_1} \ldots \theta_{i_t}$, где $\theta_{i_j} \in \Theta$, равна t. Считается, что ε имеет длину 0. Пусть Θ^t, $t \geqslant 0$, обозначает множество всех слов в алфавите Θ длин не больших t, а Θ^t_+, $t \geqslant 1$, – множество всех слов в алфавите Θ положительных длин не больших t. Очевидно, что $\Theta^t = \Theta^t_+ \cup \{\varepsilon\}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ – подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Произведения элементов из непустого множества $\Phi \subseteq \mathfrak{B}$ можно рассматривать как образы элементов свободной полугруппы F_Φ при естественном гомоморфизме (если алгебра $\mathfrak{B}$ обладает единицей $E_\mathfrak{B}$, то считаем, что гомоморфизм отображает ε в $E_\mathfrak{B}$). Такие произведения мы также будем называть словами от элементов Φ. Введём естественным образом обозначения Φ^t, Φ^t_+ и Φ^*.

Положим $\mathcal{L}_i(\Phi) = \langle \Phi^i \rangle$, $\mathcal{L}_i^+(\Phi) = \langle \Phi^i_+ \rangle$. Пусть также $\langle \Phi \rangle_{Alg} = \langle \Phi^* \rangle$, т.е. это линейная оболочка всех возможных конечных слов над алфавитом Φ, которые рассматриваются в качестве матричных произведений. При этом $E_\mathfrak{B}$ (единица алгебры $\mathfrak{B}$) всегда входит в эту линейную оболочку. Отдельно введём обозначение $\langle \Phi \rangle^s_{Alg}$ для случая, когда наличие $E_\mathfrak{B}$ в линейной оболочке не обязательно – туда входят только слова положительной длины. Если $\mathfrak{B}$ не обладает единицей как алгебра, то обозначение $\langle \cdot \rangle_{Alg}$ неприменимо к её подмножествам (в этом случае иногда удобно рассмотреть бо́льшую алгебру с единицей, которая содержит $\mathfrak{B}$). Непосредственно проверяется, что $\langle \Phi \rangle_{Alg}$, $\langle \Phi \rangle^s_{Alg}$ – подалгебры в $\mathfrak{B} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, причём $\langle \Phi \rangle^s_{Alg}$ – это минимальная алгебра, содержащая множество Φ. Аналогично $\langle \Phi \rangle_{Alg}$ – минимальная алгебра, содержащая множество $\Phi \cup \{E_\mathfrak{B}\}$.

Определение 2.6. Пусть $\mathfrak{B}$ – некоторая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ и Φ – непустое подмножество $\mathfrak{B}$, причём $\langle \Phi \rangle_{Alg} = \mathfrak{B}$. Тогда будем говорить, что Φ есть *система порождающих (образующих)* алгебры $\mathfrak{B}$, или что Φ *порождает алгебру* $\mathfrak{B}$. Если же $\langle \Phi \rangle^s_{Alg} = \mathfrak{B}$, то скажем, что Φ *порождает* $\mathfrak{B}$ *в строгом смысле*, или Φ – *система порождающих (образующих)* $\mathfrak{B}$ *в строгом смысле.*

Причины того, что в этом определении мы разделили понятие порождаемости на обычную и строгую, указаны во введении.

Поскольку в нашей работе основной объект исследований – это матричные алгебры инцидентности, то всюду далее считаем, что $E_\mathfrak{B} = E \in M_n(\mathbb{F})$. Ведь единица матричной алгебры инцидентности совпадает с единичной матрицей полной матричной алгебры.

Пусть $\langle \Phi \rangle_{Alg} = \mathfrak{B}$. Из конечномерности $\mathfrak{B}$ получим, что найдётся такой номер h, для которого $\mathcal{L}_h(\Phi) = \mathcal{L}_{h+1}(\Phi)$, откуда, в силу ассоциативности алгебры, сразу следует равенство $\mathcal{L}_i(\Phi) = \mathcal{L}_h(\Phi)$ для всех $i \geqslant h$.

Определение 2.7. *Длиной системы порождающих* Φ алгебры $\mathfrak{B}$ называется число $l(\Phi) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\Phi) = \mathfrak{B}\}$.

Определение 2.8. *Длиной алгебры* $\mathfrak{B}$ называется число

$$l(\mathfrak{B}) = \max\{l(\Phi) : \langle\Phi\rangle_{Alg} = \mathfrak{B}\}.$$

Аналог функции длины для систем порождающих в строгом смысле введён в работе [7]. Полагается

$$l_0(\Phi) = \min\{k \in \mathbb{N} : \mathcal{L}_k^+(\Phi) = \mathfrak{B}\},\ l_0(\mathfrak{B}) = \max\{l_0(\Phi) : \langle\Phi\rangle_{Alg}^s = \mathfrak{B}\}.$$

Следующее предложение показывает, что длина в двух разных смыслах различается не более, чем на единицу.

Предложение 2.9 ([7, предложение 2.2])**.** *Либо* $l_0(\Phi) = l(\Phi)$*, либо* $l_0(\Phi) = l(\Phi) + 1$.

Обозначение 2.10. Для минимальных мощностей систем порождающих введём обозначение $\mathrm{mgen}(\mathfrak{B}) = \min\{|\Phi| : \langle\Phi\rangle_{Alg} = \mathfrak{B}\}$, $\mathrm{smgen}(\mathfrak{B}) = \min\{|\Phi| : \langle\Phi\rangle_{Alg}^s = \mathfrak{B}\}$

Аналогично длине, минимальная мощность системы порождающих в двух разных смыслах тоже различается не более, чем на единицу.

Предложение 2.11. *Пусть* $\mathfrak{B}$ *– некоторая подалгебра матричной алгебры* $M_n(\mathbb{F})$*, содержащая единичную матрицу* E*. Тогда либо* $\mathrm{smgen}(\mathfrak{B}) = \mathrm{mgen}(\mathfrak{B})$*, либо* $\mathrm{smgen}(\mathfrak{B}) = \mathrm{mgen}(\mathfrak{B}) + 1$.

Доказательство. Пусть Φ порождает $\mathfrak{B}$ в строгом смысле и является минимальной системой, т.е. $\mathrm{smgen}(\mathfrak{B}) = |\Phi|$. Тогда Φ заведомо порождает $\mathfrak{B}$, откуда $\mathrm{smgen}(\mathfrak{B}) = |\Phi| \geqslant \mathrm{mgen}(\mathfrak{B})$. Обратно, если Φ порождает $\mathfrak{B}$ и является минимальной по мощности системой, т.е. $\mathrm{mgen}(\mathfrak{B}) = |\Phi|$, то $\Phi \cup \{E\}$ порождает $\mathfrak{B}$ в строгом смысле, откуда $\mathrm{smgen}(\mathfrak{B}) \leqslant |\Phi \cup \{E\}| \leqslant \mathrm{mgen}(\mathfrak{B}) + 1$. Эти неравенства доказывают утверждение, поскольку $\mathrm{smgen}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{mgen}(\mathfrak{B})$ – целые числа. □

В дальнейшем мы покажем, что для алгебр инцидентости различия проявляются в зависимости не только от свойств алгебры, но и от мощности поля коэффициентов.

Приведём некоторые результаты о длине из работ [12, 13], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 2.12 ([12, теорема 4.1])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле. Тогда* $l(T_n(\mathbb{F})) = n - 1$.

Лемма 2.13 ([12, лемма 4.2]). *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле, и* $\mathfrak{A}$ *– произвольная подалгебра* $T_n(\mathbb{F})$. *Тогда* $l(\mathfrak{A}) \leqslant n-1$.

Следствие 2.14. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле, и* $\mathfrak{A}$ *– произвольная подалгебра* $T_n(\mathbb{F})$. *Тогда* $l_0(\mathfrak{A}) \leqslant n$.

Доказательство. Нужное неравенство следует из леммы 2.13 и предложения 2.9. □

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Через $[x]$, как обычно, будем обозначать целую часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x; через $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число z такое, что $z \geqslant x$. Через $\{x\}$ будем обозначать дробную часть числа x, т.е. $\{x\} = x - [x]$.

Теорема 2.15 ([13, теорема 5.4]). *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле.*
1. *Если* $\mathbb{F}$ *бесконечно, то* $l(D_n(\mathbb{F})) = n-1$.
2. *Если* $|\mathbb{F}|=q$, *то*

$$l(D_n(\mathbb{F}))=\begin{cases} n-1 & \text{при } q \geqslant n; \\ (q-1)[\log_q n]+[q^{\{\log_q n\}}]-1 & \text{при } q < n. \end{cases}$$

Следствие 2.16 ([12, следствие 4.6]). *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле и* $\mathfrak{A}$ *– такая подалгебра* $T_n(\mathbb{F})$, *что* $\mathfrak{A} \supseteq D_n(\mathbb{F})$. *Тогда* $l(\mathfrak{A}) \geqslant l(D_n(\mathbb{F}))$ *и, в частности, если* $|\mathbb{F}| \geqslant n$, *то* $l(\mathfrak{A}) = n-1$.

Для длин матричных алгебр инцидентности получаем линейную относительно порядка матриц верхнюю оценку.

Теорема 2.17. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле и* $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ *– матричная алгебра инцидентности. Тогда* $l(\mathfrak{A}) \leqslant n-1$ *и* $l_0(\mathfrak{A}) \leqslant n$.

Доказательство. Результат теоремы получается объединением результатов теоремы 2.3, леммы 2.13 и следствия 2.14. □

§3. Матричные алгебры инцидентности над большими полями

В [9, следствие 2] было показано, что матричная алгебра инцидентности может быть порождена двумя матрицами при некоторых ограничениях на поле. Заметим, что сформулированные в [9] условия на характеристику поля можно ослабить до условий на мощность. В этих же ограничениях удаётся вычислить длины всех алгебр инцидентности, причём как в обычном, так и в строгом смыслах.

Теорема 3.1. *Пусть даны натуральное $n \geqslant 2$, поле $\mathbb{F}$ мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n+1$ и матричная алгебра инцидентности $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Алгебра $\mathfrak{A}$ является однопорождённой в строгом смысле* ($\mathrm{smgen}(\mathfrak{A}) = 1$) *тогда и только тогда, когда она есть алгебра всех диагональных матриц. При этом $\mathfrak{A} = \langle D \rangle^s_{Alg}$, где* $D = \mathrm{diag}\{d_1,\ d_2, \dots,\ d_n\}$, *причём все d_i различные и ненулевые.*

(2) *Если $\mathfrak{A}$ отлична от алгебры диагональных матриц, то* $\mathrm{smgen}(\mathfrak{A}) = 2$ *и $\mathfrak{A}$ может быть порождена в строгом смысле множеством $\{D, A\}$, где $A = \sum\limits_{i \prec j} a_{ij}E_{ij}$, $a_{ij} \neq 0$, D – диагональная матрица, удовлетворяющая условию пункта* (1).

(3) $l_0(\mathfrak{A}) = n$.

Доказательство. (1) В силу очевидного соотношения

$$\forall C \in M_n(\mathbb{F}): \quad \dim\langle\{C\}\rangle^s_{Alg} \leqslant \dim\langle\{C\}\rangle_{Alg} = \deg\ \mu_C \leqslant n,$$

где μ_C обозначает минимальный многочлен матрицы C, только диагональная матричная алгебра инцидентности может быть однопорождённой в строгом смысле, так как только её размерность не превосходит n. Очевидно также, что матрицы $D,\ D^2, \dots,\ D^{n-1}, D^n$ линейно независимы (непосредственная проверка линейной зависимости приводит нас к определителю Вандермонда). Следовательно, они составляют базис алгебры диагональных матриц.

(2) Во втором случае, согласно предложению 2.2, достаточно показать, что все матричные единицы E_{ij}, где $i \preceq j$, лежат в $\langle\{D, A\}\rangle^s_{Alg}$. Из пункта (1) получаем, что $D_n(\mathbb{F}) \subset \langle\{D, A\}\rangle^s_{Alg}$. Остаётся воспользоваться соотношением

$$E_{ij} = \frac{1}{a_{ij}} E_{ii}\ A\ E_{jj} \quad \forall i, j:\ i \prec j.$$

(3) Без ограничения общности, по теореме 2.3, можно считать, что $\mathfrak{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$. По теореме 2.17, имеем $l_0(\mathfrak{A}) \leqslant n$. Заметим, что $l_0(\mathfrak{A}) \geqslant l_0(\{D, A\})$. Из доказанного в пункте (1) следует, что $l_0(\{D\}) = n$. Аналогично доказательству [12, следствие 4.6] (следствие 2.16) имеем, что $l_0(\{D, A\}) = l_0(\{D\}) = n$, поскольку все слова от $\{D, A\}$, содержащие букву A, имеют нулевую диагональ. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть даны натуральное* $n \geqslant 2$*, поле* $\mathbb{F}$ *мощности* $|\mathbb{F}| \geqslant n$ *и матричная алгебра инцидентности* $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$*. Тогда верны следующие утверждения*

(1) *Алгебра* $\mathfrak{A}$ *является однопорождённой* ($\mathrm{mgen}(\mathfrak{A}) = 1$) *тогда и только тогда, когда она есть алгебра всех диагональных матриц. При этом* $\mathfrak{A} = \langle D \rangle_{Alg}$*, где* $D = \mathrm{diag}\{d_1,\ d_2, \dots,\ d_n\}$*, причём все* d_i *различные.*

(2) *Если* $\mathfrak{A}$ *отлична от алгебры диагональных матриц, то* $\mathrm{mgen}(\mathfrak{A}) = 2$ *и* $\mathfrak{A} = \langle \{D, A\} \rangle_{Alg}$*, где* $A = \sum\limits_{i \prec j} a_{ij} E_{ij}$ *при* $a_{ij} \neq 0$*, D – диагональная матрица, удовлетворяющая условию пункта* (1).

(3) $l(\mathfrak{A}) = n - 1$.

Доказательство. Если у матрицы D нет нулей на диагонали, то доказательство пунктов (1) и (2) аналогично доказательству теоремы 3.1. Если в D на позиции (i, i) стоит ноль, то заметим, что матрицы $D,\ D^2$, $\dots, D^{n-1}$ порождают линейное пространство всех возможных диагональных матриц с нулём на позиции (i, i), в частности, из них получаются все матричные единицы E_{jj} $(j \neq i)$. Тогда $E_{ii} = I - \sum\limits_{j \neq i} E_{jj}$. Далее всё доказывается, как в теореме 3.1. В пункте (3) без ограничения общности, по теореме 2.3, можно считать, что $\mathfrak{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$, поэтому равенство $l(\mathfrak{A}) = n - 1$ вытекает из следствия 2.16. □

Таким образом, сравнивая теоремы 3.1 и 3.2, можно увидеть, что для больших полей минимальная мощность не зависит от определения системы порождающих, а длины всегда различаются на 1.

Следствие 3.3. *Пусть даны натуральное* $n \geqslant 2$*, поле* $\mathbb{F}$ *мощности* $|\mathbb{F}| \geqslant n + 1$ *и матричная алгебра инцидентности* $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$*. Тогда* $\mathrm{mgen}(\mathfrak{A}) = \mathrm{smgen}(\mathfrak{A})$ *и* $l_0(\mathfrak{A}) = l(\mathfrak{A}) + 1$.

§4. Минимальное количество порождающих и длина матричных алгебр инцидентности над маленькими конечными полями

В этом разделе рассматриваются только системы порождающих в обычном смысле, то есть не обязательно являющиеся строгими. Минимальная мощность системы образующих будет найдена как функция порядка матриц и мощности поля. Для длины будет получена верхняя оценка как функции порядка матриц, мощности поля и максимума длин цепей частично упорядоченного множества, на котором построена алгебра.

Для начала приведём формулировку основной теоремы из [9].

Теорема 4.1 ([9, стр. 118, теорема]). *Пусть поле $\mathbb{F}$ произвольно, $n \geqslant 2$ и пусть $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности. Рассмотрим непустое подмножество $\Phi \subseteq \mathfrak{A}$. Тогда $\langle\Phi\rangle_{Alg} = \mathfrak{A}$, если и только если выполнены оба условия:*

(1) *для любых $i \neq j$ от 1 до n найдётся матрица $A \in \Phi$ такая, что $(A)_{ii} \neq (A)_{jj}$;*
(2) *для любых $i \preceq j$ от 1 до n, таких что j покрывает i, найдётся матрица $B \in \langle\Phi\rangle$, для которой выполнены условия $(B)_{ij} \neq 0$ и $(B)_{ii} = (B)_{jj}$.*

Лемма 4.2. *Пусть $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ – поле из q элементов и $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности. Если $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству $m < \log_q n$, то алгебра $\mathfrak{A}$ не может быть порождена никакими своими m матрицами.*

Доказательство. Проведём рассуждения от противного. Пусть найдётся множество $\Phi = \{B_1, \dots, B_m\} \subseteq \mathfrak{A}$ такое, что $m < \log_q n$ и $\langle\Phi\rangle_{Alg} = \mathfrak{A}$. Каждому числу i от 1 до n поставим в соответствие упорядоченный набор $((B_1)_{ii}, \dots, (B_m)_{ii})$ элементов из поля. Если бы какие-то два набора совпали, то это противоречило бы пункту (1) теоремы 4.1. Поэтому имеем ровно n различных наборов. Но над полем из q элементов можно построить не более q^m различных наборов длины m. Получаем противоречие с неравенством $m < \log_q n$. □

Далее дадим конструктивные доказательства результатов о порождающих системах минимальной мощности.

Предложение 4.3. *Пусть $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ – поле из q элементов. Тогда* $\mathrm{mgen}(D_n(\mathbb{F})) = \lceil \log_q n \rceil$.

Доказательство. Как уже отмечалось, $D_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности, соответствующая тривиальному частичному порядку на S ($i \preceq j \Leftrightarrow i = j$). По лемме 4.2, $\mathrm{mgen}(D_n(\mathbb{F})) \geqslant \log_q n$, и, по определению, $\mathrm{mgen}(D_n(\mathbb{F})) \in \mathbb{Z}$. Значит, $\mathrm{mgen}(D_n(\mathbb{F})) \geqslant \lceil \log_q n \rceil$. Пусть $m = \lceil \log_q n \rceil$. Будем строить матрицы $\{B_1, \dots, B_m\}$, порождающие $D_n(\mathbb{F})$. Ввиду выполнения условия $m \geqslant \log_q n$, соответственно, $q^m \geqslant n$ и найдётся

n различных наборов длины m элементов из поля $\mathbb{F}$. Далее, аналогично доказательству предыдущей леммы 4.2 отождествим эти наборы с элементами на диагоналях матриц $\{B_1, \ldots, B_m\}$ так, чтобы каждый i-й набор был ничем иным, как $((B_1)_{ii}, \ldots, (B_m)_{ii})$:

$$\begin{array}{cccc} (B_1)_{11} & (B_2)_{11} & \ldots & (B_m)_{11} \\ (B_1)_{22} & (B_2)_{22} & \ldots & (B_m)_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (B_1)_{nn} & (B_2)_{nn} & \ldots & (B_m)_{nn} \end{array}$$

i-й столбец – диагональ i-й матрицы,
а j-я строка – j-й набор элементов из поля

Это позволяет выполнить условие (1) теоремы 4.1. Условие (2) выполнено ввиду отсутствия чисел i, j, таких что j покрывает i относительно тривиального порядка. □

В дальнейшем нам понадобится следующая простая конструкция.

Пример 4.4. *Для $a \neq b,\ c \neq d \in \mathbb{F}$ имеем*

$$(d-c)\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} + (a-b)\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & d-c \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}.$$

Лемма 4.5. *Пусть $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности, не состоящая из одних диагональных матриц, $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ – поле из q элементов. Положим $m = \max\{2, \lceil \log_q n \rceil\}$. Тогда $\mathfrak{A}$ может быть порождена m своими матрицами.*

Доказательство. В силу теоремы 2.3, без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$.

Будем строить матрицы $\{B_1, \ldots, B_m\}$, порождающие $\mathfrak{A}$. Изначально заполним все позиции во всех матрицах нулями. Диагонали матриц $B_1, \ldots, B_{\lceil \log_q n \rceil}$ заполним, как в предложении 4.3. Это позволяет выполнить условие (1) теоремы 4.1.

Будем теперь добиваться выполнения условия (2). Рассмотрим все такие пары $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что j покрывает i (в смысле порядка, соответствующего алгебре инцидентности $\mathfrak{A}$).

Шаг 1. Если для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant m$, верно, что $(B_k)_{ii} = (B_k)_{jj}$, то полагаем $(B_k)_{ij} = 1$. Если после этого все пары $\{i, j\}$, где j покрывает i, были рассмотрены, то заканчиваем процесс построения. Иначе переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Для каждой оставшейся пары $\{i,j\}$, где j покрывает i, выбираем произвольную матрицу $B_{k_{ij}}$ и полагаем $(B_{k_{ij}})_{ij}=1$, а для всех $k\neq k_{ij}$ оставляем $(B_k)_{ij}=0$.

Теперь получаем, что выполнено условие (2) теоремы 4.1. Действительно, либо мы берём конкретную матрицу B_k согласно шагу 1, либо существует $k\neq k_{ij}$ (так как $m\geqslant 2$), и нужно рассмотреть следующую линейную комбинацию построенных матриц:

$$C=\lambda\begin{pmatrix}\ddots & & & \\ & (B_{k_{ij}})_{ii} & \dots & 1 & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & (B_{k_{ij}})_{jj} & \\ & & & & \ddots\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\ddots & & & \\ & (B_k)_{ii} & \dots & 0 & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & (B_k)_{jj} & \\ & & & & \ddots\end{pmatrix},$$

где $\lambda=(B_k)_{jj}-(B_k)_{ii}$, $\mu=(B_{k_{ij}})_{ii}-(B_{k_{ij}})_{jj}$. Заметим, что $\lambda\neq 0$ и $\mu\neq 0$, так как матрица $B_{k_{ij}}$ построена на шаге 2. Поскольку мы фактически рассматриваем 3 элемента в матрицах, то это соображение проще проиллюстрировать в проекции на матрицы порядка 2 (см. пример 4.4). Получаем, что $(C)_{ii}=(C)_{jj}$, $(C)_{ij}=\lambda\neq 0$. □

Объединяя полученные ранее результаты, сформулируем основную теорему данного раздела.

Теорема 4.6. *Пусть* $n\geqslant 2$, $\mathfrak{A}\subseteq M_n(\mathbb{F})$ *– алгебра инцидентности над конечным полем* $\mathbb{F}$, *причём* $q=|\mathbb{F}|<n$. *Тогда* $\operatorname{mgen}(\mathfrak{A})=\lceil\log_q n\rceil$.

Доказательство. Неравенства

$$\log_q n\leqslant \operatorname{mgen}(\mathfrak{A})\leqslant\max\{2,\ \lceil\log_q n\rceil\}$$

следуют из лемм 4.2 и 4.5. По условию на поле, $\log_q n>1$, соответственно $\lceil\log_q n\rceil\geqslant 2$, и теорема доказана. □

Теперь можем собрать вместе результаты о минимальных порождающих множествах для всех полей.

Следствие 4.7. *Пусть* $\mathfrak{A}\subseteq M_n(\mathbb{F})$ *– алгебра инцидентности,* $n\geqslant 2$, $\mathbb{F}$ *– поле.*

(1) $\operatorname{mgen}(\mathfrak{A})=1$ *в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{A}$ *есть алгебра всех диагональных матриц и* $n\leqslant|\mathbb{F}|\leqslant\infty$.
(2) *Пусть* $n\leqslant|\mathbb{F}|\leqslant\infty$ *и* $\mathfrak{A}$ *отлична от диагональной алгебры, тогда* $\operatorname{mgen}(\mathfrak{A})=2$.
(3) *Пусть* $|\mathbb{F}|=q<n$. *Тогда* $\operatorname{mgen}(\mathfrak{A})=\lceil\log_q n\rceil\geqslant 2$.

Перейдём к вопросу вычисления длин алгебр инцидентности над маленькими полями. Сначала докажем, что за одним исключением длина “почти” диагональных матричных алгебр инцидентности совпадает с длиной алгебры диагональных матриц.

Лемма 4.8. *Пусть $n \geqslant 3$, $\mathbb{F}$ – поле мощности $q \leqslant n-1$ и $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности размерности $n+1$. Тогда*

$$l(\mathfrak{A}) = \max\{2, (q-1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}] - 1\}.$$

Доказательство. Заметим, что $(q-1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}] - 1 \geqslant q-1 \geqslant 2$ при $q \geqslant 3$. Соответственно, при $q = 2$ в ограничениях леммы $(q-1)[\log_q n]+[q^{\{\log_q n\}}]-1 = [\log_2 n] < 2$ только для $n = 3$. Рассмотрим этот случай. По теореме 4.6, у $\mathfrak{A}$ есть система образующих Φ мощности $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$. Тогда, по определению, имеем $\dim \mathcal{L}_1(\Phi) \leqslant 1 + |\Phi| = 3 < \dim \mathfrak{A}$, поэтому $l(\Phi) \geqslant 2$, значит, $l(\mathfrak{A}) \geqslant 2$. С другой стороны, $l(\mathfrak{A}) \leqslant 2$ по теореме 2.17. Заключаем, что $l(\mathfrak{A}) = 2 = \max\{2, [\log_2 3]\}$.

Пусть далее $n \geqslant 4$, $M = \max\{2, (q-1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}] - 1\}$. В силу ограничения на размерность алгебры, имеем $\mathfrak{A} = D_n(\mathbb{F}) \oplus \langle E_{ij} \rangle$ для некоторых индексов $i \neq j$. Не ограничивая общности, считаем, что $i < j$. Для произвольной системы порождающих Φ алгебры $\mathfrak{A}$ докажем верхнюю оценку $l(\Phi) \leqslant M$, из которой вместе с утверждением следствия 2.16 вытекает утверждение данной леммы. По теореме 4.1, в $\langle \Phi \cup \{E\} \rangle$ содержится матрица A, для которой $(A)_{ii} \neq (A)_{jj}$, и матрица B, для которой $(B)_{ii} = (B)_{jj}$, $(B)_{ij} \neq 0$. Взяв $B - (B)_{ii}E \in \langle \Phi \cup \{E\} \rangle$ вместо B, можно считать, что $(B)_{ii} = (B)_{jj} = 0$. По построению, $A = A_0 + A'$, $B = bE_{ij} + B'$, где $A_0 = a_1 E_{ii} + a_2 E_{ij} + a_3 E_{jj}$, $a_1 \neq a_3$, $b \neq 0$, $A', B' \in D_n(\mathbb{F})$ – матрицы с нулями на позициях (i,i) и (j,j). Рассмотрим коммутатор $AB - BA \in \mathcal{L}_2(\Phi)$. Имеем

$$\begin{aligned} &AB - BA \\ &= (A_0 + A')(bE_{ij} + B') - (bE_{ij} + B')(A_0 + A') = b(A_0 E_{ij} - E_{ij} A_0) \\ &\quad = b((a_1 E_{ii} + a_2 E_{ij} + a_3 E_{jj})E_{ij} - E_{ij}(a_1 E_{ii} + a_2 E_{ij} + a_3 E_{jj})) \\ &\qquad\qquad = b(a_1 E_{ij} - a_3 E_{ij}) = b(a_1 - a_3)E_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $E_{ij} \in \mathcal{L}_2(\Phi) \subseteq \mathcal{L}_M(\Phi)$. С другой стороны, по теореме 2.15, пространство $\mathcal{L}_M(\Phi)$ содержит матрицы $E_{kk} + \alpha_k E_{ij}, k = 1, \ldots, n$, которые вместе с матрицей E_{ij} составляют базис алгебры $\mathfrak{A}$, лежащий в $\mathcal{L}_M(\Phi)$. Следовательно, $\mathcal{L}_M(\Phi) = \mathfrak{A}$ и $l(\Phi) \leqslant M$. □

Для алгебр большей размерности рассмотренный выше коммутатор уже не будет матричной единицей. Однако мы приведём самостоятельное утверждение, показывающее, что, переходя в пространство $\mathcal{L}_q(\Phi)$, можно из любой матрицы $B \in \langle\Phi\rangle$ получить матрицу с нулевой диагональю и ненулевыми внедиагональными элементами.

Предложение 4.9. *Пусть* $\mathfrak{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$ *– алгебра инцидентности,* $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ *– поле мощности* $q \leqslant n-1$. *Рассмотрим систему порождающих* Φ *для* $\mathfrak{A}$ *и произвольную матрицу* $B \in \langle\Phi\rangle$. *Обозначим через* $\mathfrak{R}(B)$ *определяемые матрицей* B *пары индексов* (i,j) *такие, что* $i \preceq j$, j *покрывает* i *и выполнены условия* $(B)_{ij} \neq 0$ *и* $(B)_{ii} = (B)_{jj}$. *Если* $\mathfrak{R}(B) \neq \varnothing$, *то существует матрица* $Q \in \mathcal{L}_q(\{B\}) \subseteq \mathcal{L}_q(\Phi)$, *для которой* $(Q)_{ll} = 0$ *для всех* $l = 1,\ldots,n$ *и* $(Q)_{ij} \neq 0$ *для всех пар* $(i,j) \in \mathfrak{R}(B)$.

Доказательство. Пусть $\beta_1,\ldots,\beta_s$, $s \leqslant q$, – все различные диагональные элементы матрицы B. Рассмотрим матрицу $Q = \prod\limits_{r=1}^{s}(B-\beta_r E) \in \mathcal{L}_s(\{B\}) \subseteq \mathcal{L}_q(\{B\}) \subseteq \mathcal{L}_q(\Phi)$. Тогда, по построению, $(Q)_{ll} = 0$ для всех $l = 1,\ldots,n$.

Пусть $(i,j) \in \mathfrak{R}(B)$. Тогда для любых двух матриц $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ имеем $(A_1A_2)_{ij} = \sum\limits_{i \preceq k \preceq j}(A_1)_{ik}(A_2)_{kj} = (A_1)_{ii}(A_2)_{ij} + (A_1)_{ij}(A_2)_{jj}$ в силу выбора индексов i,j. Это означает, что умножение для вычисления элементов Q на позициях (i,i), (i,j), (j,j) осуществляется по правилу умножения 2×2 матриц. Для простоты обозначим $(B)_{ij} = \gamma$, $(B)_{ii} = (B)_{jj} = \beta_t$ для некоторого $t = 1,\ldots,s$. Получаем

$$\prod_{r=1}^{s}\begin{pmatrix}\beta_t-\beta_r & \gamma\\ 0 & \beta_t-\beta_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \gamma\\ 0 & 0\end{pmatrix}\prod_{r=1,\ r\neq t}^{s}\begin{pmatrix}\beta_t-\beta_r & \gamma\\ 0 & \beta_t-\beta_r\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & \gamma\prod\limits_{r=1,\ r\neq t}^{s}(\beta_t-\beta_r)\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

откуда $(Q)_{ij} = \gamma\prod\limits_{\substack{r=1,\\ r\neq t}}^{s}(\beta_t-\beta_r) \neq 0$. □

Для получения новой верхней оценки длины алгебры инцидентности над маленьким полем сперва напомним некоторые стандартные факты из теории колец и алгебр, которые можно найти, например, в книге [18]. А именно, нам понадобится радикал Джекобсона $J = J(R)$, который в случае конечномерной алгебры R нильпотентен, т.е. существует такое натуральное число N, что $J^N = (0)$, а $J^{N-1} \neq (0)$. Здесь через J^N обозначена линейная оболочка множества всех произведений элементов из J длины N, число $N(J) = N$ называют *индексом нильпотентности* идеала J, см., например, [18, §4.4].

Отметим, что максимальность длины алгебры всех треугольных матриц может быть обоснована тем, что её радикал Джекобсона имеет большой индекс нильпотентности. С другой стороны, имеющаяся нижняя оценка длины из следствия 2.16 получается из длины фактор-алгебры по радикалу. В общем случае, воспользуемся оценкой длины из работы [14], которая использует обе эти характеристики.

Теорема 4.10 ([14, следствие 1])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $\mathfrak{A}$ – конечномерная ассоциативная $\mathbb{F}$-алгебра с единицей. Пусть N – индекс нильпотентности радикала Джекобсона $J(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда*

$$l(\mathfrak{A}) \leqslant (l(\mathfrak{A}/J(\mathfrak{A})) + 1)N - 1.$$

Предложение 4.11. *Пусть $S = \{1, \dots, n\}$, $\preceq$ – частичный порядок на S и d – максимальная мощность цепи в S. Рассмотрим матричную алгебру инцидентности $\mathfrak{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ на множестве S над произвольным полем $\mathbb{F}$. Тогда $d = N(J(\mathfrak{A}))$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A} = D_n(\mathbb{F})$, то $d = 1$, поскольку все элементы S попарно несравнимы. С другой стороны, $N(J(\mathfrak{A})) = 1$, поскольку в $\mathfrak{A}$ нет ненулевых нильпотентных матриц. Далее будем предполагать, что алгебра $\mathfrak{A}$ отлична от диагональной.

Воспользуемся теоремой 2.3, поскольку перенумерация элементов S не меняет длин цепей, и, с другой стороны, изоморфизм алгебр сохраняет индекс нильпотентности радикала Джекобсона. Поэтому докажем утверждение в случае, когда порядок $\preceq$ согласован с естественным, $\mathfrak{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$. Заметим, что для треугольной алгебры инцидентности $\mathfrak{A}$ радикалом Джекобсона будет её подалгебра, состоящая из нильтреугольных матриц (остальные элементы алгебры $\mathfrak{A}$, очевидно, не являются нильпотентными). Базис $J(\mathfrak{A})$ как векторного пространства можно составить из внедиагональных матричных единиц, принадлежащих $\mathfrak{A}$. Произведение k матричных единиц $E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_k,j_k}$ отлично от нуля, если и только если $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{k-1} = i_k$. Если все эти матричные единицы лежат в $J(\mathfrak{A})$, то $i_l < j_l$, $l = 1, \dots, k$, откуда, по определению алгебры инцидентности, получим, что $i_1 \prec i_2 \prec \dots \prec$

$i_k \prec j_k$ – номера образуют цепь длины $k+1$. Для $k = d-1$ такие матричные единицы найдутся, поэтому $N(J(\mathfrak{A})) > d-1$. С другой стороны, для матриц $A_1, \ldots, A_d \in J(\mathfrak{A})$ произведение $A_1 \cdots A_d$ есть линейная комбинация произведений d внедиагональных матричных единиц из $J(\mathfrak{A})$, каждое из которых равно нулю, в силу отсутствия в S цепей длины $d+1$, поэтому $A_1 \cdots A_d = 0$. $\square$

В итоге получаем оценку длины алгебр инцидентности.

Теорема 4.12. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле мощности q и $n > q$. Пусть $S = \{1, \ldots, n\}$, $\preceq$ – частичный порядок на S и d – максимальная мощность цепи в S. Рассмотрим матричную алгебру инцидентности $\mathfrak{A}$ на множестве S. Тогда*

$$l(\mathfrak{A}) \leqslant d \cdot ((q-1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}]) - 1.$$

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{A}/J(\mathfrak{A}) \cong D_n(\mathbb{F})$. Поэтому утверждение получается комбинацией результатов теорем 2.15 и 4.10 и предложения 4.11. $\square$

Заметим, что при больших n и фиксированных d и q оценка из леммы 4.12 сильнее общей оценки из теоремы 2.17.

§5. Системы порождающих матричных алгебр инцидентности в строгом смысле в случае произвольного поля

В этом разделе рассматриваются системы порождающих матричных алгебр инцидентности в строгом смысле. Минимальная мощность системы образующих будет найдена как функция порядка матриц и мощности поля. Будет показано, что, в отличие от обычных систем порождающих, для строгого случая эта характеристика существенно зависит от того, является ли порядок матриц натуральной степенью мощности поля.

В доказательстве следующего результата, описывающего порождающие системы в строгом смысле, мы будем использовать вспомогательное утверждение о векторах из работы [15].

Предложение 5.1 ([15, предложение 3.4])**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ – поле и $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Пусть V – подпространство в $\mathbb{F}^n$ такое, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдётся некоторый вектор $v(i) \in V$, удовлетворяющий условию $v(i)_i \neq 0$ (векторы $v(i)$ не обязательно попарно различны).*

Тогда существует такой вектор $v \in V$, $v \in \langle \{v(i) |\ i = 1, \dots, n\} \rangle$, *что* $v_i \neq 0$ *для всех* $i = 1, \dots, n$.

Следующий результат является обобщением результата Лонгстаффа–Розенталя из [9] на случай систем порождающих в строгом смысле.

Теорема 5.2. *Пусть* $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ *– алгебра инцидентности,* $n \geqslant 2$, *поле* $\mathbb{F}$ *произвольно,* $\Phi \subseteq \mathfrak{A}$ *– непустое подмножество. Тогда* $\langle \Phi \rangle^s_{Alg} = \mathfrak{A}$, *если и только если выполнены все три условия:*

(1) *для любых* $i \neq j$ *от* 1 *до* n *найдётся матрица* $A \in \Phi$ *такая, что* $(A)_{ii} \neq (A)_{jj}$;
(2) *для любых* $i \preceq j$ *от* 1 *до* n, *таких что* j *покрывает* i, *найдётся матрица* $B \in \langle \Phi \rangle$, *для которой выполнено* $(B)_{ij} \neq 0$ *и* $(B)_{ii} = (B)_{jj}$;
(3) *не существует такого номера* l *от* 1 *до* n, *что для любой матрицы* $C \in \Phi$ *верно* $(C)_{ll} = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 2.3, все матрицы алгебры $\mathfrak{A}$ можно считать верхнетреугольными. Отметим, что все три условия являются инвариантными относительно сопряжения перестановочной матрицей.

1. Пусть $\langle \Phi \rangle^s_{Alg} = \mathfrak{A}$, тогда и подавно $\langle \Phi \rangle_{Alg} = \mathfrak{A}$. Поэтому, в силу теоремы 4.1, выполнены условия (1) и (2). Предположим, что условие (3) не выполнено, т.е. существует такой номер l, что все матрицы из нашего порождающего множества имеют нуль на позиции (l, l). Этот нуль сохранится при сложении и умножении элементов Φ, поэтому на позиции (l, l) нуль будет у всех матриц порождённой (в строгом смысле) алгебры. Противоречие, ведь, согласно предложению 2.2, все диагональные матричные единицы лежат в базисе.

2. Обратно, пусть теперь Φ удовлетворяет условиям (1)-(3). Докажем, что алгебра $\langle \Phi \rangle^s_{Alg}$ содержит невырожденную матрицу. Если само множество Φ содержит невырожденную матрицу, то всё доказано. Пусть далее $\Phi = \{B_1, \dots, B_m\}$ и среди этих матриц нет невырожденной.

Если $|\mathbb{F}| \geqslant n$, то $\langle \Phi \rangle \subseteq \langle \Phi \rangle^s_{Alg}$ содержит матрицу с ненулевыми диагональными элементами в силу предложения 5.1 (в качестве подпространства V берем $\langle \{\ ((B_i)_{11}, \dots, (B_i)_{nn}) \mid i = 1, \dots, m\ \} \rangle$). Очевидно, такая матрица невырождена.

Пусть теперь $|\mathbb{F}| < n$. Рассмотрим множество всех диагональных элементов из всех матриц принадлежащих Φ. Обозначим через q наименьшее общее кратное порядков всех этих элементов. Рассмотрим матрицы $C_i = B_i^q$ и множество $\Psi = \{C_i \mid i \in \mathbb{N}_{\leqslant n}\}$. Очевидно, все C_i на диагонали имеют только нули и единицы, причём каждая C_i имеет нули на диагонали на том же месте, что и B_i. Поэтому все C_i также удовлетворяют условию (3). Дальнейшее доказательство разобьём на два случая.

Случай 1: $|\mathbb{F}| > 2$. Проведём процесс построения невырожденной матрицы путём уменьшения числа нулей на диагонали за счёт сложения и возведения в степень. Выберем за начальную матрицу произвольную из матриц C_i и обозначим её X. По условию, у X на диагонали $t > 0$ нулей. Покажем, что из неё можно построить матрицу $Y \in \langle\Phi\rangle^s_{Alg}$, у которой диагональные элементы также только нули и единицы, причём количество нулей не более $t-1$. Рассмотрим произвольный нуль на диагонали матрицы X, пусть он расположен на позиции r. В силу условия (3), в $\Psi \setminus \{X\}$ найдётся матрица C_j такая, что у неё на месте r на диагонали стоит единица. Из ограничения на поле следует, что существует элемент $\alpha \in \mathbb{F}$, отличный от нуля, который в сумме с единицей даст ненулевой элемент. Пусть $U = X + \alpha C_j$. Тогда $(U)_{rr} = 1$, и новых нулей на диагонали U не возникнет, так как $\alpha + 1 \neq 0$. Диагональ матрицы U заполнена $0, 1$ и $\alpha + 1$. Положим $Y = U^{q_2}$, где q_2 – порядок $\alpha + 1$ в мультипликативной группе поля $\mathbb{F}$. Если у Y на диагонали остались нули, обозначим её через X и повторим процесс ещё раз. Через конечное число шагов мы получим невырожденную матрицу.

Случай 2: $|\mathbb{F}| = 2$. Будем работать с матрицами $\{B_1, \ldots, B_m\}$. Каждому числу i от 1 до n поставим в соответствие упорядоченный набор $\xi_i = ((B_1)_{ii}, \ldots, (B_m)_{ii})$ элементов из поля. Если бы какие-то два набора совпали, то это противоречило бы пункту (1). Поэтому имеем ровно n различных наборов. При этом, в силу пункта (3), среди них отсутствует нулевой набор.

Для каждого k от 1 до n будем конструировать матрицу Q_k, такую что у неё на главной диагонали всюду стоят нули за исключением позиции k, где находится единица. Над диагональю единицы и нули могут стоять где угодно. В силу пункта (3), найдется матрица B_j такая, что $(B_j)_{kk} = 1$. Определим для всех $l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ матрицы

$$\widetilde{B}_l = \begin{cases} B_l, & \text{если } (B_l)_{kk} = 1; \\ B_l + B_j, & \text{если } (B_l)_{kk} = 0. \end{cases}$$

Получим множество $\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_{j-1}, B_j, \widetilde{B}_{j+1}, \ldots, \widetilde{B}_m$. По построению, у всех этих матриц на позиции (k, k) стоит единица. Заметим, что ни для какого другого места (p, p) на диагонали это не будет верно, ведь иначе набор ξ_p совпал бы с ξ_k. Далее,

$$Q_k = \widetilde{B}_1 \cdots \widetilde{B}_{j-1} B_j \widetilde{B}_{j+1} \cdots \widetilde{B}_m,$$

и искомой невырожденной матрицей будет $\sum\limits_{k=1}^{n} Q_k$.

Итак, мы показали, что $\langle\Phi\rangle^s_{Alg}$ содержит невырожденную матрицу B. Тогда, в силу теоремы Гамильтона–Кэли, алгебра $\langle\Phi\rangle^s_{Alg} \supseteq \langle\{B\}\rangle^s_{Alg}$ содержит E. Отсюда $\langle\Phi\rangle^s_{Alg} = \langle\Phi\rangle_{Alg}$, но $\langle\Phi\rangle_{Alg} = \mathfrak{A}$ согласно теореме 4.1. $\square$

Лемма 5.3. *Пусть $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности, $n \geqslant 2$ и $\mathbb{F}$ – поле мощности q. Тогда при $m \leqslant \log_q n$ алгебра $\mathfrak{A}$ не может быть порождена никакими своими m матрицами в строгом смысле.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{smgen}(\mathfrak{A}) \geqslant \mathrm{mgen}(\mathfrak{A})$ по предложению 2.11 и $\mathrm{mgen}(\mathfrak{A}) \geqslant \log_q n$ по лемме 4.2, то для $m < \log_q n$ лемма доказана.

Пусть теперь $m = \log_q n$. Проведём доказательство от противного. Пусть найдется множество $\Phi = \{B_1, \ldots, B_m\} \subseteq \mathfrak{A}$ такое, что $\langle\Phi\rangle^s_{Alg} = \mathfrak{A}$. Как и в лемме 4.2, каждому числу i от 1 до n поставим в соответствие упорядоченный набор $((B_1)_{ii}, \ldots, (B_m)_{ii})$ элементов из поля. Если бы какие-то два набора совпали, то это противоречило бы пункту (1) теоремы 5.2. Поэтому имеем ровно n различных наборов. Тогда среди составленных наборов встречаются все возможные наборы из $\mathbb{F}^m$, в том числе набор из нулей. Противоречие с пунктом (3) теоремы 5.2. $\square$

Лемма 5.4. *Пусть $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности, $n \geqslant 2$ и $\mathbb{F}$ – поле мощности q. Обозначим $m = \lceil \log_q n \rceil + 1$. Тогда $\mathfrak{A}$ может быть порождена m своими матрицами в строгом смысле.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 2.11 и следствия 4.7, однако мы покажем разные способы построения нужной системы порождающих. Можно взять систему порождающих Φ из доказательства леммы 4.3 и добавить к ней единичную матрицу. Можно заполнить диагонали матриц $\{B_1, \ldots, B_{m-1}\}$, как в доказательстве леммы 4.5 (см. таблицу без последнего столбца из доказательства леммы 4.5), а все внедиагональные элементы заполнить как угодно. Тогда, очевидно, будет выполнено условие (1) теоремы 5.2. В качестве матрицы B_m возьмём ζ - матрицу. Она обеспечит выполнение условий (2) и (3) теоремы 5.2. □

Лемма 5.5. *Пусть $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности, не состоящая из одних диагональных матриц, $\mathbb{F}$ – поле мощности q, $n \geqslant 2$, $\log_q n \notin \mathbb{N}$. Обозначим $m = \max\{2, \lceil \log_q n \rceil\}$. Тогда $\mathfrak{A}$ может быть порождена m своими матрицами в строгом смысле.*

Доказательство. В силу теоремы 2.3, без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$. Случай, когда $\lceil \log_q n \rceil = 1$, сразу следует из предыдущей леммы 5.4. При $\lceil \log_q n \rceil > 1$, как и в предыдущем доказательстве, будем конструировать матрицы $\{B_1, \ldots, B_m\}$, порождающие $\mathfrak{A}$ в строгом смысле. В силу того, что $\log_q n$ – нецелое число, из $m > \log_q n$ следует, что $q^m > n$, т.е. найдется n различных наборов длины m элементов из поля $\mathbb{F}$. Поскольку неравенство строгое, можно считать, что набор из всех нулей среди них не встречается. Далее, аналогично доказательству леммы 5.4, отождествим эти наборы с элементами на диагоналях так, чтобы каждый i-й набор был ничем иным, как $((B_1)_{ii}, \ldots, (B_m)_{ii})$ (см. таблицу из доказательства леммы 4.5). Это позволяет выполнить условия (1) и (3) теоремы 5.2. Для выполнения условия (2) повторим слово в слово процедуру дозаполнения матриц из леммы 4.2. □

Теорема 5.6. *Пусть $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ – алгебра инцидентности, $n \geqslant 2$, поле $\mathbb{F}$ произвольно.*

(1) $\mathrm{smgen}(\mathfrak{A}) = 1$ *тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра всех диагональных матриц и $n+1 \leqslant |\mathbb{F}| \leqslant \infty$.*
(2) *Пусть $n+1 \leqslant |\mathbb{F}| \leqslant \infty$ и $\mathfrak{A}$ отлична от диагональной. Тогда* $\mathrm{smgen}(\mathfrak{A}) = 2$.
(3) *Пусть $|\mathbb{F}| = q < n+1$. Тогда*

$$\mathrm{smgen}(\mathfrak{A}) = [\log_q n] + 1 = \begin{cases} \lceil \log_q n \rceil, & \textit{если } 1 < (\log_q n) \notin \mathbb{N}; \\ \lceil \log_q n \rceil + 1, & \textit{если } 1 \leqslant (\log_q n) \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. (1) В силу очевидного соотношения $\dim\langle\{A\}\rangle^s_{Alg} \leqslant \dim\langle\{A\}\rangle_{Alg} = \deg\ \mu_A \leqslant n$, где μ_A – минимальный многочлен матрицы A, только диагональная матричная алгебра инцидентности может быть однопорождённой в строгом смысле, так как только её размерность не превосходит n. Неравенство на мощность поля немедленно следует из пунктов (1) и (3) теоремы 5.2.

(2) Непосредственное применение теоремы 3.2. Однопорождённой в строгом смысле алгебра не может быть в силу предыдущего пункта.

(3) По лемме 5.3 и пункту (1), $\mathrm{smgen}(\mathfrak{A}) > \max\{1, \log_q n\}$. Возможность же породить в строгом смысле алгебру k матрицами (k – число, определяемое равенствами (1)) следует из лемм 5.4 и 5.5. □

Таким образом, сравнивая теоремы 4.6 и 5.6, можно увидеть, что для маленьких полей минимальная мощность системы порождающих в обычном и строгом определениях совпадают или различаются в зависимости от значения $\log_q n$.

Следствие 5.7. *Пусть даны натуральное* $n \geqslant 2$, *поле* $\mathbb{F}$ *мощности* $|\mathbb{F}| < n + 1$ *и матричная алгебра инцидентности* $\mathfrak{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$. *Тогда* $\mathrm{mgen}(\mathfrak{A}) = \mathrm{smgen}(\mathfrak{A})$ *тогда и только тогда, когда* $\log_q n \notin \mathbb{N}$.

§6. Открытые вопросы и гипотезы

Вопрос 6.1. Для произвольного конечного поля $\mathbb{F}$ мощности q, $n > q$, и матричной алгебры инцидентности $\mathfrak{A}$ на множестве S, $D_n(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{A} \subset T_n(\mathbb{F})$, вычислить длину $\mathfrak{A}$ как функцию от q, n и максимальной длины цепи в S.

Вопрос 6.2. Для произвольного конечного поля $\mathbb{F}$ мощности q, $n > q$, и матричной алгебры инцидентности $\mathfrak{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$ вычислить длину $\mathfrak{A}$ в строгом смысле.

Вопрос 6.3. Пусть даны натуральное $n \geqslant 2$ и поле $\mathbb{F}$ мощности строго меньшей n. Пусть матричная алгебра $\mathfrak{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ обладает базисом из матричных единиц, в котором содержатся все диагональные матричные единицы. Верно ли, что $\mathrm{mgen}(\mathfrak{A}) = \lceil \log_q n \rceil$?

Авторы выражают благодарность А. Э. Гутерману за полезные обсуждения при подготовке статьи.

Список литературы

1. Yu. A. Al'pin, Kh. D. Ikramov, *Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria.* — Linear Algebra Appl. **313** (2000), 155–161.

2. A. Guterman, O. Markova, V. Mehrmann, *Lengths of quasi-commutative pairs of matrices.* — Linear Algebra Appl. **498** (2016), 450–470.
3. A. Guterman, T. Laffey, O. Markova, H. Šmigoc, *A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix.* — Linear Algebra Appl. **543** (2018), 234–250.
4. L. Halbeisen, M. Hamilton, P. Ružička, *Minimal generating sets of groups, rings, and fields.* — Quaest. Math. **30**, No. 3 (2007), 355–363.
5. M. C. Iovanov, G. D. Koffi, *Incidence algebras and their representation theory*, `arXiv:1702.03356` (2017).
6. V. P. Kostov, *The minimal number of generators of a matrix algebra.* — J. Dyn. Control Syst. **4**, No. 2 (1996), 549—555.
7. T. Laffey, O. Markova, H. Šmigoc, *The effect of assuming the identity as a generator on the length of the matrix algebra.* — Linear Algebra Appl. **498** (2016), 378–393.
8. V. Lomonosov, P. Rosenthal, *The simplest proof of Burnside's theorem on matrix algebras.* — Linear Algebra Appl. **383** (2004), 45–47.
9. W. E. Longstaff, P. Rosenthal, *Generators of matrix incidence algebras.* — Australas. J. Combin. **22** (2000), 117–121.
10. W. E. Longstaff, P. Rosenthal, *On the lengths of irreducible pairs of complex matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **139**, No. 11 (2011), 3769–3777.
11. В. Е. Маренич, *Свойства сопряжения в алгебрах инцидентности.* — Фундам. прикл. матем. **9**, No. 3 (2003), 111–123.
12. О. В. Маркова, *Вычисление длин матричных подалгебр специального вида.* — Фундам. прикл. матем. **13**, No. 4 (2007), 165–197.
13. О. В. Маркова, *Верхняя оценка длины коммутативных алгебр.* — Мат. сборник **200**, No. 12 (2009), 41–62.
14. О. В. Маркова, *О связи длины алгебры и индекса нильпотентности её радикала Джекобсона.* — Мат. заметки **94**, No. 5 (2013), 682–688.
15. О. В. Маркова, *Коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности $n-1$ в алгебре матриц порядка n.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 219–242.
16. Н. А. Начев, *Полиномиальные тождества в алгебрах инидентности.* — УМН **32**, Вып. 6 (1977), 233–234.
17. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.
18. Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, 1986.
19. G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory, I. Theory of Möbius functions.* — Z. Wahrscheinlichkeitsrechnung **2** (1964), 340–368.
20. E. Spiegel, C. J. O'Donnel, *Incidence algebras,* Marcel Dekker, 1997.
21. Д. Т. Тапкин, *Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности* — Чебышевский сб. **16**, No. 3 (2015), 422–449.
22. M. Radjabalipour, P. Rosenthal, B. R. Yahaghi, *Burnside's theorem for matrix rings over division rings.* — Linear Algebra Appl. **383** (2004), 29–44.
23. Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, 1970.

Kolegov N. A., Markova O. V. Systems of generators of matrix incidence algebras over finite fields.

The paper studies two numerical characteristics of matrix incidence algebras over finite fields associated with generating sets of such algebras: the minimal cardinality of a generating set and the length of an algebra. Generating sets are understood in the usual sense, the identity of the algebra being considered as a word of length 0 in generators, and also in the strict sense, where this assumption is not used. A criterion for a subset to generate an incidence algebra in the strict sense is obtained. For all matrix incidence algebras, the minimum cardinality of a generating set and a generating set in the strict sense are calculated as functions of the field cardinality and the order of the matrices. Some new results on the lengths of such algebras are obtained. In particular, the length of the algebra of "almost" diagonal matrices is calculated, and a new upper bound for the length of an arbitrary matrix incidence algebra is obtained.

Московский государственный
университет имени
М. В. Ломоносова, 119991 Москва
E-mail: na.kolegov@ya.ru

Московский государственный
университет имени
М. В. Ломоносова, 119991 Москва
Московский физико-технический
институт (государственный
университет), 141701 Московская
область, г. Долгопрудный;
E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило 30 октября 2018 г.