Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

Х. Д. Икрамов

О КОНЕЧНОМ АЛГОРИТМЕ, ВЫЧИСЛЯЮЩЕМ НЕЙТРАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА КОСОСИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

1. Пусть K – невырожденная кососимметричная матрица четного порядка $n = 2m$. Для определенности считаем K вещественной матрицей. (О комплексном случае сказано в заключительном разделе статьи.) Мы называем подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^n$ нейтральным подпространством матрицы K, если

$$(Kx, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

Рассмотрим задачу вычисления нейтрального подпространства размерности m. Такая задача возникает в связи с решением квадратичных матричных уравнений (см. [1]).

С теоретической точки зрения, эта задача решается несложно. Ортогональным подобием K может быть приведена к виду прямой суммы

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & a_m \\ -a_m & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Переставив векторы найденного базиса (векторы с нечетными номерами образуют в новом базисе группу из первых m векторов), получим искомое нейтральное подпространство как линейную оболочку этой группы векторов.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ в сумме (1) суть (с точностью до множителей i и $-i$) собственные значения матрицы K. Это означает, что предложенный способ вычисления нейтрального подпространства в общем случае не может быть реализован конечной последовательностью арифметических операций и взятия радикалов.

Цель настоящей заметки – указать *конечный* метод вычисления m-мерного нейтрального подпространства матрицы K, использующий арифметические операции и квадратичные радикалы. В его основе лежит предложенный Ван Лоуном алгоритм расщепления J-симметричных матриц (см. [2]). Краткие сведения об этом алгоритме даны в

Ключевые слова: кососимметричная матрица, J-симметричная матрица, симплектическая матрица, алгоритм Ван Лоуна.

следующем разделе. В разделах 3 и 4 мы возвращаемся к задаче построения нейтрального подпространства.

2. Термин “J-симметричная матрица” относится к разделу линейной алгебры, изучающему теорию симплектических пространств. Пусть

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

есть стандартное скалярное произведение векторов

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T.$$

Заменяя его в $\mathbf{R}^n$ кососимметричным скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = (Jx, y),$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

получаем (вещественное) симплектическое пространство.

Будем рассматривать матрицы порядка n как линейные операторы, действующие в этом пространстве. Роль симметричных операторов как раз и играют матрицы, называемые J-симметричными. Пусть A – такая матрица. Разобьем ее на четыре $m \times m$-блока:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тогда

$$A_{22} = A_{11}^T, \quad A_{12}^T = -A_{12}, \quad A_{21}^T = -A_{21}, \tag{3}$$

т.е. внедиагональные блоки кососимметричны.

Для дальнейшего важны, помимо J-симметричных, еще и симплектические матрицы. Эти матрицы S, играющие в симплектическом пространстве роль ортогональных операторов, описываются соотношением

$$S^T J S = J. \tag{4}$$

Аналогичное описание J-симметричных матриц имеет вид

$$JA = A^T J.$$

Свойство J-симметрии сохраняется преобразованиями подобия

$$A \to S^{-1} A S,$$

в которых трансформирующая матрица S является симплектической (далее мы называем такие преобразования симплектическими подобиями).

J-симметричные матрицы обладают замечательным спектральным свойством: каждое собственное значение такой матрицы имеет четную кратность; более того, каждая жорданова клетка в ее жордановой форме повторяется четное число раз.

Ван Лоун нашел эффективный способ использования этого свойства в задаче вычисления собственных значений J-симметричных матриц. Он показал, что конечной последовательностью симплектических подобий матрица (2) может быть приведена к виду

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где B_{11} – хессенбергова матрица порядка m. Как только матрица B получена, исходная задача сводится к вычислению собственных значений $m \times m$-матрицы B_{11}.

С практической точки зрения, важным качеством алгоритма Ван Лоуна является его численная устойчивость. Достигается она тем, что трансформирующие матрицы подобий не только симплектичны, но и ортогональны. Применяются два типа таких матриц: симплектические отражения и вращения. Симплектическое отражение – это матрица вида

$$H = H_m \oplus H_m,$$

где H_m – обычное отражение (матрица Хаусхолдера) порядка m. Симплектическими вращениями называют обычные вращения R_{ij} с опорными парами индексов $i, j = m + i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$. Оба типа подобий используются для аннулирования отдельных элементов или целых групп элементов в блоках (1,1) или (2,1) текущей J-симметричной матрицы. Вычисление параметров, определяющих симплектические отражения и вращения, требует только арифметических операций и извлечения квадратных корней.

3. Пусть S – суммарная симплектическая (и ортогональная) матрица, преобразующая матрицу A в B:

$$B = S^{-1}AS = S^TAS.$$

Переписав (4) в виде

$$S^TJ = JS^{-1},$$

имеем

$$S^T(JA)S = (S^TJ)AS = J(S^{-1}AS) = J(S^TAS).$$

Эта выкладка показывает, что то же самое подобие с матрицей S преобразует матрицу JA в JB. Положим $K = JA$ и представим K в том же блочном виде, что и матрицу A:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}.$$

Из формул (3) выводим

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{21} = -K_{11}^T, \\ K_{22} &= -A_{12} = -K_{22}^T, \\ K_{21} &= -A_{11} = -A_{22}^T = -K_{12}^T, \end{aligned}$$

т.е. K – кососимметричная матрица. Кососимметричной будет и матрица $L = JB$. Согласно (5), матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & B_{11}^T \\ -B_{11} & B_{12} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что первые m столбцов матрицы S образуют базис m-мерного нейтрального подпространства матрицы K.

4. Из сказанного выше вытекает такой алгоритм для вычисления m-мерного нейтрального подпространства кососимметричной матрицы K порядка $n = 2m$:

а) Построить J-симметричную матрицу $A = JK$.

б) Применить к A алгоритм Ван Лоуна.

в) Пусть S – симплектическая и ортогональная матрица, найденная на шаге б). Тогда первые ее m столбцов дают базис искомого нейтрального подпространства.

Для определенности мы рассматривали в статье случай вещественных J-симметричных матриц (называемых также косогамильтоновыми). В разделе 2 статьи [3] показано, как алгоритм Ван Лоуна, также предложенный для вещественного случая, может быть распространен на комплексные косогамильтоновы матрицы. Отсюда следует, что алгоритм, описанный выше, пригоден и для комплексных кососимметричных матриц.

Список литературы

1. Х. Д. Икрамов, *О разрешимости одного класса квадратичных матричных уравнений.* — Докл. АН **455** (2008), 135–137.
2. C. F. Van Loan, *A symplectic method for approximating all the eigenvalues of a Hamiltonian matrix.* — Linear Algebra Appl. **16** (1984), 233–251.
3. Х. Д. Икрамов, Х. Фассбендер, *О произведении двух косогамильтоновых или двух кососимметричных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 45–51.

Ikramov Kh. D. On a finite algorithm for calculating neutral subspaces of skew-symmetric matrices.

Let K be a nonsingular skew-symmetric matrix of even order $n = 2m$. For such a matrix, we propose a finite algorithm, using only arithmetic operations and quadratic radicals, for calculating an m-dimensional neutral subspace. The necessity of calculating neutral subspaces originates in the problem of solving quadratic matrix equations.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 1 марта, 2018 г.