Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

Х. Д. Икрамов

ПСЕВДО-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

1. Конгруэнтное преобразование (или, короче, конгруэнция) $n \times n$-матрицы A понимается в этой статье как преобразование вида

$$A \to Q^T AQ,$$

где Q – невырожденная матрица. Если трансформирующая матрица Q выбирается в каком-либо специальном матричном классе, то термин "конгруэнция" соответствующим образом уточняется. Так, если Q – ортогональная матрица, то мы говорим об ортогональной конгруэнции.

Пусть A – вещественная симметричная матрица. Хорошо известно, что посредством ортогональной конгруэнции (являющейся в этом случае и подобием) A можно привести к диагональному виду

$$Q^T AQ = D. \tag{1}$$

Диагональные элементы d_{ii} суть собственные значения матрицы A, а само равенство (1) и другая его запись

$$A = QDQ^T$$

называются спектральным разложением этой матрицы.

В классической линейной алгебре существует еще один, гораздо менее известный результат этого рода. Пусть вещественная матрица A четного порядка $n = 2m$ не только симметрична, но и положительно определена. Оказывается, что такую матрицу можно привести к диагональному виду, выбирая трансформирующую матрицу Q в классе симплектических матриц. Напомним, что симплектической называется матрица четного порядка $n = 2m$, определяемая соотношением

$$S^T JS = J,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Ключевые слова: кососимметричная матрица, псевдо-ортогональная матрица, конгруэнция, подобие, билинейно метрическое пространство.

Диагональная матрица, получаемая из A симплектической конгруэнцией, имеет вид прямой суммы

$$\Lambda = D_m \oplus D_m. \tag{2}$$

Диагональные элементы $m \times m$-матрицы D_m называют симплектическими собственными значениями матрицы A.

В алгебраической литературе этот результат связывают с именем Дж. Уильямсона (см. [1]), хотя мы не найдем в [1] упоминания о симплектических собственных значениях. Однако сам термин "собственные значения" употреблен здесь неслучайно. Нетрудно показать, что симплектической конгруэнции

$$A \to \widetilde{A} = S^T A S$$

соответствует симплектическое подобие

$$J\widetilde{A} = S^{-1}(JA)S.$$

Собственные значения матрицы JA, являющиеся инвариантами таких подобий, несложным образом связаны с числами d_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, m$, в (2) (см. [2]). Тем самым и эти последние суть инварианты, но не подобий, а симплектических конгруэнций.

Цель настоящей заметки – указать аналогичный факт, относящийся на этот раз к кососимметричным матрицам и преобразованиям из другой группы, а именно, группы псевдо-ортогональных матриц.

2. В комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$ четной размерности $n = 2m$ зададим скалярное произведение формулой

$$\langle x, y\rangle = (Kx, y), \tag{3}$$

где

$$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

есть евклидово скалярное произведение векторов $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$, а

$$K = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Псевдо-ортогональными будем называть матрицы P, удовлетворяющие соотношению

$$P^T K P = K. \tag{4}$$

Такие матрицы сохраняют скалярное произведение (3), т.е.

$$\langle Px, Py\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{для всех} \;\; x, y \in \mathbf{C}^n.$$

Рассмотрим матрицы, играющие в пространстве $\mathbf{C}^n$ со скалярным произведением (3) роль кососимметричных операторов. Они определяются соотношением

$$B^T = -KBK. \tag{5}$$

Если представить B в блочном виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где B_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – матрицы порядка m, то соотношение (5) эквивалентно равенствам

$$B_{12}^T = -B_{12}, \quad B_{21}^T = -B_{21}, \quad B_{22} = -B_{11}^T. \tag{6}$$

Сопоставим матрице B матрицу $A = KB$, представленную в таком же блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Из равенств (6) выводим

$$A_{11}^T = -A_{11}, \quad A_{22}^T = -A_{22}, \quad A_{21} = -A_{12}^T,$$

т.е. A – кососимметричная матрица. В соответствии с этим, будем называть матрицы B из формулы (5) псевдо-кососимметричными. Этот тип матриц сохраняется подобиями, в которых трансформирующая матрица псевдо-ортогональна.

3. Пусть кососимметричная матрица A порядка $n = 2m$ подвергается псевдо-ортогональной конгруэнции:

$$A \to \widetilde{A} = P^T A P. \tag{7}$$

Из определения псевдо-ортогональной матрицы (см. (4)) следует, что

$$P^T = KP^{-1}K.$$

Подставляя это выражение в (7), имеем

$$\widetilde{A} = KP^{-1}KAP,$$

или

$$\widetilde{B} \stackrel{\text{def}}{\equiv} K\widetilde{A} = P^{-1}(KA)P = P^{-1}BP.$$

Таким образом, псевдо-ортогональной конгруэнции кососимметричной матрицы A соответствует псевдо-ортогональное подобие ассоциированной с ней псевдо-кососимметричной матрицы B. Собственные значения последней можно считать инвариантами псевдо-ортогональных конгруэнций, выполняемых с A.

4. Пусть кососимметричная $n \times n$-матрица A невырожденна. Вместе с ней невырожденна матрица $B = KA$. Выясним, к какому (желательно, наиболее простому) виду можно привести обе эти матрицы посредством псевдо-ортогональных преобразований.

Отметим, прежде всего, следующее общее свойство кососимметричных операторов билинейно метрического пространства (или, в другой терминологии, линейного пространства с индефинитной метрикой): если B – такой оператор и $(\lambda-\beta)^k$ – его элементарный делитель, относящийся к ненулевому числу β, то $(\lambda+\beta)^k$ также является элементарным делителем этого оператора (см., например, [3, § 26]).

Выпишем все элементарные делители матрицы B. Это будут пары

$$(\lambda - \lambda_j)^{m_j},\ (\lambda + \lambda_j)^{m_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{8}$$

где все числа λ_j отличны от нуля и могут неоднократно повторяться в последовательности (8). Кроме того,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m.$$

Обозначим через G жорданову матрицу, составленную из клеток $J_{m_j}(\lambda_j)$, отвечающих элементарным делителям $(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$, $j=1, 2, \ldots, s$. Матрица

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G^T \end{pmatrix}$$

имеет ту же систему элементарных делителей (8), что и матрица B. Поэтому матрицы B и $\widetilde{B}$ подобны.

Теперь нам понадобится еще один общий результат относительно линейных операторов билинейно метрического пространства. Он сформулирован в [4, теорема 3] и замечании 3 из этой статьи. В применении к рассматриваемой нами ситуации эта формулировка выглядит следующим образом.

Лемма 1. *Если две псевдо-кососимметричные матрицы подобны, то подобие между ними можно осуществить посредством псевдо-ортогональной трансформирующей матрицы.*

Формулы (6) показывают, что $\widetilde{B}$ – псевдо-кососимметричная матрица. Пусть псевдо-ортогональная матрица P такова, что

$$\widetilde{B} = P^{-1}BP.$$

Тогда кососимметричная матрица

$$\widetilde{A} = P^T AP = K\widetilde{B}$$

имеет блочную форму

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -G^T \\ G & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Жордановы матрицы G и $-G^T$ можно рассматривать как двухдиагональные матрицы специального вида.

Все сказанное в этом разделе можно суммировать в следующем утверждении.

Теорема 1. *Всякую невырожденную кососимметричную матрицу A четного порядка $n = 2m$ можно привести посредством псевдо-ортогональной конгруэнции к форме* (9)*, в которой внедиагональные блоки являются двухдиагональными матрицами* (*вообще говоря, комплексными*).

Диагональные элементы этих внедиагональных блоков суть псевдо-ортогональные собственные значения матрицы A.

Список литературы

1. J. Williamson, *On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems.* — Amer. J. Math. **58** (1936), 141–163.
2. Х. Д. Икрамов, *О симплектических собственных значениях положительно определенных матриц.* — Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. кибернетика No. 1 (2018), 3–6.
3. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры,* М., Наука, 1970.
4. Х. Д. Икрамов, *О сингулярных числах и полярном разложении оператора в билинейно метрическом пространстве.* — ЖВМ и МФ **28** (1988), 127–129.

Ikramov Kh. D. Pseudo-orthogonal eigenvalues of skew-symmetric matrices.

The following result is attributed to J. Williamson: Every real, symmetric, and positive definite matrix A of even order $n = 2m$ can be brought to diagonal form by congruence with a symplectic transformation matrix. The diagonal entries of this form are invariants of congruence transformations

performed with A and are called the symplectic eigenvalues of this matrix. In this short paper, we prove an analogous fact concerning (complex) skew-symmetric matrices and transformations belonging to a different group, namely, the group of pseudo-orthogonal matrices.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 01 марта 2018 г.