Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

Х. Д. Икрамов

РАЦИОНАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ КОНГРУЭНТНОСТИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Комплексные $n \times n$-матрицы A и B называются конгруэнтными, если $B = Q^T AQ$ для некоторой невырожденной матрицы Q. Способ проверки конгруэнтности заданных матриц A и B описан в [1, §4.5]. Он состоит в приведении обеих матриц к канонической форме относительно конгруэнций и сравнении полученных канонических форм. Процесс приведения неоднороден. Первый его этап, например, для матрицы A состоит в разделении сингулярной и регулярной частей этой матрицы. С этой целью применяется так называемый *регуляризующий алгоритм*. Он преобразует A в прямую сумму некоторого числа жордановых блоков с нулем на главной диагонали и невырожденной матрицы $\widehat{A}$. На втором этапе предлагается строить жорданову форму матрицы $\widehat{A}^{-T}\widehat{A}$, называемой *коквадратом* матрицы $\widehat{A}$. Она однозначно определяет регулярную часть канонической формы исходной матрицы A. Те же действия нужно произвести с матрицей B.

Цель настоящего сообщения – предложить более однородный критерий конгруэнтности. Его дополнительное преимущество состоит в следующем: если элементы обеих матриц суть рациональные числа или числа из поля $\mathbf{Q}[i]$ рациональных гауссовых чисел, то проверка конгруэнтности сводится к выполнению конечного числа арифметических операций. Это позволяет реализовать предлагаемый критерий как точную процедуру в любой системе компьютерной алгебры. Напомним, что всякая такая система дает пользователю возможность безошибочных вычислений с рациональными операндами.

Условимся называть конечный вычислительный процесс, использующий только арифметические операции, *рациональным алгоритмом*. Таким образом, содержанием данной статьи является новый рациональный алгоритм для проверки конгруэнтности заданных квадратных матриц.

Ключевые слова: сингулярный матричный пучок, регулярная часть, конгруэнтность, строгая эквивалентность, элементарные делители, рациональный алгоритм.

§2. Критерий конгруэнтности

С каждой квадратной матрицей A свяжем пару матриц

$$S(A) = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad K(A) = \frac{1}{2}(A - A^T). \tag{1}$$

Их часто называют соответственно симметричной и кососимметричной частями матрицы A. Начнем со следующего очевидного утверждения.

Предложение 1. *Комплексные $n \times n$-матрицы A и B конгруэнтны тогда и только тогда, когда ассоциированные с ними матричные пары $(S(A), K(A))$ и $(S(B), K(B))$ связаны одновременной конгруэнцией, что означает, что*

$$S(B) = Q^T S(A) Q, \qquad K(B) = Q^T K(A) Q \tag{2}$$

для некоторой невырожденной матрицы Q.

Следующее утверждение, которое нам потребуется, отнюдь не является очевидным. Оно основано на теореме 6 из 12-й главы книги Ф. Р. Гантмахера [2]. Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема 1. *Две пары комплексных симметричных (или кососимметричных) матриц конгруэнтны тогда и только тогда, когда они (строго) эквивалентны.*

Напомним, что матричные пары (A_1, A_2) и (B_1, B_2) называются эквивалентными (а, в терминологии Гантмахера, *строго эквивалентными*), если

$$B_1 = V A_1 U, \qquad B_2 = V A_2 U$$

для некоторых невырожденных матриц U и V.

Ничто в доказательстве, приведенном в [2], не изменится, если предположить, что матрицы A_1 и B_1 в заданных матричных парах симметричны, тогда как A_2 и B_2 кососимметричны. Как следствие, получаем такое предложение.

Предложение 2. *Матричные пары $(S(A), K(A))$ и $(S(B), K(B))$ связаны одновременной конгруэнцией тогда и только тогда, когда они (строго) эквивалентны.*

При оперировании с матричными парами имеется эквивалентный язык, а именно язык матричных пучков. В нем пара (A_1, A_2) заменяется пучком $A_1 + \lambda A_2$. Еще одно нужное нам утверждение – это следующая теорема Кронекера (см. [2, гл. XII, теорема 5]).

Предложение 3. *Пусть* $A_1+\lambda A_2$ *и* $B_1+\lambda B_2$ *– матричные пучки одного размера. Эти пучки эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые минимальные индексы и одинаковые* (*конечные и бесконечные*) *элементарные делители.*

Объединяя предложения 1–3, получаем желаемый критерий конгруэнтности для квадратных матриц.

Теорема 2. *Комплексные* $n \times n$*-матрицы* A *и* B *конгруэнтны тогда и только тогда, когда ассоциированные с ними матричные пучки* $S(A)+\lambda K(A)$ *и* $S(B)+\lambda K(B)$ *имеют одинаковые минимальные индексы и одинаковые* (*конечные и бесконечные*) *элементарные делители.*

§3. Рациональные и рациональные гауссовы матрицы

Предположим, что элементы матриц A и B суть рациональные или рациональные гауссовы числа. В этом случае критерий конгруэнтности, сформулированный в теореме 2, может быть реализован как точная процедура системы безошибочных вычислений. Дело в том, что проверка этого критерия может быть осуществлена рациональным алгоритмом.

Это утверждение основывается на двух положениях. Во-первых, минимальные индексы любого сингулярного матричного пучка могут быть найдены посредством рационального алгоритма, что показано в [3]. Во-вторых, вычисление минимальных индексов завершается выделением из исходного пучка его регулярной части (называемой также его регулярным ядром). Если уже установлено тождество минимальных индексов обоих ассоциированных матричных пучков, остается, в соответствии с теоремой Кронекера, сравнить их элементарные делители. Элементарные делители в общем случае не могут быть определены не только рациональными вычислениями, но даже и в радикалах. Однако вместо сравнения элементарных делителей можно сравнивать инвариантные множители. Напомним, что инвариантные множители произвольной λ-матрицы суть диагональные элементы канонической формы Смита этой матрицы, а сама эта форма может быть получена посредством рациональной процедуры, выполняемой в соответствующем полиномиальном кольце. В интересующем нас случае эта процедура может быть реализована как рациональный алгоритм, работающий с коэффициентами регулярных пучков, подаваемых на его вход. Этими пучками являются регулярные ядра двух исходных пучков.

Список литературы

1. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second Edition.* Cambridge University Press, 2013.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., Наука, 1966.
3. Х. Д. Икрамов, *Выделение регулярной части сингулярного матричного пучка как рациональный алгоритм.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 107–111.

Ikramov Kh. D. A rational criterion for congruence of square matrices.

With a square complex matrix A we associate the matrix pair consisting of its symmetric part $S(A) = (A + A^T)/2$ and its skew-symmetric part $K(A) = (A - A^T)/2$. We show that square matrices A and B are congruent if and only if the associated pairs $(S(A), K(A))$ and $(S(B), K(B))$ are (strictly) equivalent. This criterion can be verified by a finite rational calculation if the entries of A and B are rational or rational Gaussian numbers.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 19 февраля 2018 г.