Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

А. Э. Гутерман, С. А. Жилина

ГРАФЫ ОТНОШЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБР КЭЛИ–ДИКСОНА

§1. Введение

Изучение графов, порождённых отношениями на алгебраических системах, началось в теории групп, см., например, [7]. На кольцах и алгебрах эти исследования восходят к работе Бека [11] (1988), в которой он впервые ввёл граф делителей нуля коммутативного кольца. В определении Бека множество вершин графа совпадало со множеством всех элементов кольца. Затем Андерсон и Ливингстон в работе [6] дали новое определение, исключающее из графа 0 и элементы, не являющиеся делителями нуля. Согласно же определению, которое ввёл Мюлэй в своей работе [25], вершинами графа являются классы эквивалентности делителей нуля. Что касается графов делителей нуля некоммутативных колец, впервые их определил Редмонд в работе [26] (а именно, $\Gamma_Z(\mathcal{R})$ и $\bar{\Gamma}_Z(\mathcal{R})$). Божич и Петрович в работе [12] изучили диаметры графов делителей нуля матричных колец над коммутативными кольцами и их связь с диаметрами графов делителей нуля исходных колец.

Помимо графов делителей нуля, активно исследовались также графы коммутативности кольца матриц и некоторых других колец, см. работу [3] и приведенные в ней ссылки. В частности, в работах [2, 4] и [16] разными авторами исследуются связность и диаметры графов коммутативности матричных колец, а также их зависимость от исходного кольца. В работах [9, 10, 18] изучены графы ортогональности ($\Gamma_O(\mathcal{R})$) матричных колец.

В настоящей работе мы рассматриваем графы отношений для неассоциативных алгебр и определяем их комбинаторные характеристики, такие как диаметр, обхват, число и описание клик. Работа построена следующим образом. §2 содержит основные определения и обозначения, связанные с графами отношений, а также напоминание некоторых сведений из теории графов. В §3 подробно описывается построение

Ключевые слова: алгебры Кэли–Диксона, антикоммутативность, графы антикоммутативности, графы отношений, централизатор, ортогонализатор.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01124.

алгебр Кэли–Диксона. В §5 доказаны условия антикоммутативности элементов алгебр Кэли–Диксона и сформулированы несколько вспомогательных лемм. В теореме 6.3 §6 дана классификация графов антикоммутативности на классах эквивалентности произвольных вещественных алгебр Кэли–Диксона. В §7 рассматриваются частные случаи этой теоремы применительно к алгебрам кватернионов, контркомлексных чисел и контроктонионов. В §8 приводится явное выражение для централизатора через ортогонализатор и описаны достаточные условия, обеспечивающие выполнение данного соотношения. В этом же разделе приводятся примеры, демонстрирующие существенность указанных условий.

§2. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ – алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ над полем $\mathbb{F}$, возможно, некоммутативная и неассоциативная. Для $a, b \in \mathcal{A}$ говорят, что

- a и b *коммутируют*, если $ab = ba$;
- a и b *антикоммутируют*, если $ab + ba = 0$;
- a и b *ортогональны*, если $ab = ba = 0$;
- a – *левый делитель нуля*, если $a \neq 0$ и существует такое ненулевое $b \in \mathcal{A}$, что $ab = 0$;
- a – *правый делитель нуля*, если $a \neq 0$ и существует такое ненулевое $b \in \mathcal{A}$, что $ba = 0$;
- a – *двусторонний делитель нуля*, если a – как левый, так и правый делитель нуля;
- a – *делитель нуля*, если a – либо левый, либо правый делитель нуля.

Определение 2.1. *Центром* алгебры $\mathcal{A}$ называется множество $C_{\mathcal{A}} = \big\{a \in \mathcal{A} \mid ab = ba \,\forall\, b \in \mathcal{A}\big\}$. *Централизатором* подмножества $S \subset \mathcal{A}$ называется $C_{\mathcal{A}}(S) = \big\{a \in \mathcal{A} \mid as = sa \,\forall\, s \in S\big\}$ – множество элементов $\mathcal{A}$, коммутирующих с каждым элементом S. Для произвольного $a \in \mathcal{A}$ будем использовать обозначение $C_{\mathcal{A}}(a) = C_{\mathcal{A}}(\{a\})$.

Обозначим через $Z^*(\mathcal{A})$ множество делителей нуля в алгебре $\mathcal{A}$, а через $Z^{**}(\mathcal{A})$ – множество двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$. Пусть $AC^*(\mathcal{A}) = \big\{a \in \mathcal{A} \setminus \{0\} \,|\, \exists\, b \in \mathcal{A} \setminus \{0\} : ab + ba = 0\big\}$ – множество таких ненулевых $a \in \mathcal{A}$, что a антикоммутирует с некоторым ненулевым $b \in \mathcal{A}$.

Определение 2.2. *Антицентрализатором* подмножества $S \subset \mathcal{A}$ называется $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(S) = \{a \in \mathcal{A} \mid as + sa = 0 \; \forall\, s \in S\}$ – множество элементов $\mathcal{A}$, антикоммутирующих со всеми элементами S. Обозначим $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(\{a\})$.

Определение 2.3. *Левым аннулятором* подмножества $S \subset \mathcal{A}$ называется множество $\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{A}}(S) = \{a \in \mathcal{A} \mid as = 0 \forall s \in S\}$. Аналогично определяется *правый аннулятор* – $\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{A}}(S) = \{a \in \mathcal{A} \mid sa = 0 \; \forall\, s \in S\}$. Если $a \in \mathcal{A}$, то для удобства восприятия будем использовать обозначения $\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{l.Ann}_{\mathcal{A}}(\{a\})$ и $\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{r.Ann}_{\mathcal{A}}(\{a\})$.

Определение 2.4. *Ортогонализатором* подмножества $S \subset \mathcal{A}$ называется $\mathrm{O}_{\mathcal{A}}(S) = \{a \in \mathcal{A} \mid as = sa = 0 \; \forall\, s \in S\}$ – множество элементов $\mathcal{A}$, ортогональных к каждому элементу S. Для $a \in \mathcal{A}$ пишем $\mathrm{O}_{\mathcal{A}}(a)$ вместо $\mathrm{O}_{\mathcal{A}}(\{a\})$.

Введем теперь несколько типов отношений эквивалентности, порождаемых рассматриваемыми множествами, которые будут востребованы далее.

Определение 2.5. (1) Пусть $a, b \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}$. Назовём a и b *C-эквивалентными* ($a \sim_C b$), если $C_{\mathcal{A}}(a) = C_{\mathcal{A}}(b)$. Класс эквивалентности элемента a будем обозначать через $[a]_C$.

(2) Пусть $a, b \in AC^*(\mathcal{A})$. Назовём a и b *AC-эквивалентными* ($a \sim_{AC} b$), если $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(b)$. Класс эквивалентности элемента a будем обозначать через $[a]_{AC}$.

(3) Пусть $a, b \in Z^*(\mathcal{A})$. Назовём a и b *Z-эквивалентными* ($a \sim_Z b$), если $\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{l.Ann}_{\mathcal{A}}(b)$ и $\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{r.Ann}_{\mathcal{A}}(b)$. Класс эквивалентности элемента a будем обозначать через $[a]_Z$.

(4) Пусть $a, b \in Z^{**}(\mathcal{A})$. Назовём a и b *O-эквивалентными* ($a \sim_O b$), если $\mathrm{O}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{O}_{\mathcal{A}}(b)$. Класс эквивалентности элемента a будем обозначать через $[a]_O$.

Замечание 2.6. Если $S \subset \mathcal{A}$, то легко видеть, что $C_{\mathcal{A}}$, $C_{\mathcal{A}}(S)$, $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}}(S)$, $\mathrm{l.Ann}_{\mathcal{A}}(S)$, $\mathrm{r.Ann}_{\mathcal{A}}(S)$, $\mathrm{O}_{\mathcal{A}}(S)$ – линейные пространства над $\mathbb{F}$.

Введем теперь графы отношений, которые будут изучаться в данной работе.

Определение 2.7. Для алгебры $\mathcal{A}$ определим следующие структуры.

(1) *Граф коммутативности* $\Gamma_C(\mathcal{A})$: вершины – элементы множества $\mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}$, различные вершины a и b соединены ребром, если $ab = ba$.

(2) *Граф коммутативности на классах эквивалентности* $\Gamma_C^E(\mathcal{A})$: вершины – классы эквивалентности $\{[a]_C \big| a \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}\}$, различные вершины $[a]_C$ и $[b]_C$ соединены ребром, если $ab = ba$.

(3) *Граф антикоммутативности* $\Gamma_{AC}(\mathcal{A})$: вершины – элементы множества $AC^*(\mathcal{A})$, различные вершины a и b соединены ребром, если $ab + ba = 0$.

(4) *Граф антикоммутативности на классах эквивалентности* $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A})$: вершины графа – классы эквивалентности $\{[a]_{AC} \big| a \in AC^*(\mathcal{A})\}$, различные вершины $[a]_{AC}$ и $[b]_{AC}$ соединены ребром, если $ab + ba = 0$.

(5) *Граф ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{A})$: вершины – элементы множества $Z^{**}(\mathcal{A})$, различные вершины a и b соединены ребром, если $ab = ba = 0$.

(6) *Граф ортогональности на классах эквивалентности* $\Gamma_O^E(\mathcal{A})$: вершины – элементы множества классов эквивалентности $\{[a]_O \big| a \in Z^{**}(\mathcal{A})\}$, различные вершины $[a]_O$ и $[b]_O$ соединены ребром, если $ab = ba = 0$.

(7) *Ориентированный граф делителей нуля* $\Gamma_Z(\mathcal{A})$: вершины – элементы множества $Z^*(\mathcal{A})$, различные вершины a и b соединены направленным ребром от a к b, если $ab = 0$.

(8) *Ориентированный граф делителей нуля на классах эквивалентности* $\Gamma_Z^E(\mathcal{A})$: вершины – классы эквивалентности $\{[a]_Z \big| a \in Z^*(\mathcal{A})\}$, различные вершины $[a]_Z$ и $[b]_Z$ соединены направленным ребром от $[a]_Z$ к $[b]_Z$, если $ab = 0$.

(9) *Неориентированный граф делителей нуля* $\bar{\Gamma}_Z(\mathcal{A})$: вершины – элементы множества $Z^*(\mathcal{A})$, различные вершины a и b соединены ребром, если и только если $ab = 0$ или $ba = 0$.

(10) *Неориентированный граф делителей нуля на классах эквивалентности* $\bar{\Gamma}_Z^E(\mathcal{A})$: вершины – классы эквивалентности $\{[a]_Z \big| a \in Z^*(\mathcal{A})\}$, различные вершины $[a]_Z$ и $[b]_Z$ соединены ребром, если и только если $ab = 0$ или $ba = 0$.

Предложение 2.8. *Определения* $\Gamma_C^E(\mathcal{A})$, $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A})$, $\Gamma_O^E(\mathcal{A})$, $\Gamma_Z^E(\mathcal{A})$ *и* $\bar{\Gamma}_Z^E(\mathcal{A})$ *корректны.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что наличие ребра между любыми двумя классами эквивалентности в определениях этих графов не зависит от выбора их представителей. $\square$

Напомним основные сведения из теории графов, которые нам потребуются.

Определение 2.9. Пусть Γ – неориентированный граф.

- Γ называется *связным*, если для любой пары вершин $\{x, y\}$ существует путь, т.е. чередующаяся последовательность ребер и вершин, соединяющий x и y (в этом случае говорят, что вершины x и y связаны). В противном случае граф Γ несвязен.
- *Компонентой связности* Γ называется максимальный связный подграф Γ.
- *Расстояние* $d(x, y)$ между двумя вершинами x и y в графе Γ – это число рёбер в кратчайшем пути, соединяющем эти вершины. Если такого пути не существует, то есть x и y лежат в разных компонентах связности, то $d(x, y) = \infty$.
- *Диаметр* $d(\Gamma)$ графа Γ определяется как максимум расстояний между вершинами по всем парам вершин графа.
- *Клика* C в графе Γ – это такое подмножество вершин Γ, что любые две различные вершины в C соединены ребром.
- Клика C называется *максимальной*, если для любой клики $\widetilde{C}$ с условием $C \subset \widetilde{C}$ мы имеем $C = \widetilde{C}$.

§3. Построение алгебр Кэли–Диксона

В этом параграфе, опираясь в основном на работы [21, 27], мы напоминаем классический способ построения неассоциативных алгебр методом удвоения, так называемую процедуру Кэли–Диксона.

Определение 3.1 ([21, стр. 139, определение 1.5.1])**.** Пусть $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$. Операцией *сопряжения* $a \mapsto \bar{a}$ на $\mathcal{A}$ называется такой эндоморфизм $\mathcal{A}$ как линейного пространства, что для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $\bar{\bar{a}} = a$ и $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

Определение 3.2. Пусть $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$ с единицей $1_{\mathcal{A}}$, на которой задана операция сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Будем называть это сопряжение *правильным*, если для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ выполнено $a + \bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ и $a\bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$.

Далее будем считать, что на $\mathbb{F}$-алгебре $\mathcal{A}$ задана правильная операция сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Для элемента $a \in \mathcal{A}$ введем следующие понятия, являющиеся аналогами соответствующих понятий для комплексных чисел.

Определение 3.3. *Действительной частью* элемента $a \in \mathcal{A}$ называется $\mathfrak{Re}(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$, *мнимой частью* – $\mathfrak{Im}(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$, *нормой* – $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$. Говорят, что a – *чисто мнимый* элемент, если $\mathfrak{Re}(a) = 0$.

Зачастую норма элемента a определяется как $\sqrt{a\bar{a}}$, в отличие от используемого в данной работе $n(a) = a\bar{a}$. Тем не менее, большинство результатов легко переносится на изменённую таким образом норму.

Перечислим основные свойства введенных понятий. Доказательство следующего предложения можно считать фольклором, также оно легко следует из свойств эндоморфизмов линейных пространств.

Предложение 3.4. *Пусть* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathcal{A}$, $r \in \mathbb{R}$. *Тогда выполняются следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(a+b) &= \mathfrak{Re}(a) + \mathfrak{Re}(b), & \mathfrak{Re}(\mathfrak{Re}(a)) &= \mathfrak{Re}(a), \\ \mathfrak{Im}(a+b) &= \mathfrak{Im}(a) + \mathfrak{Im}(b), & \mathfrak{Re}(\mathfrak{Im}(a)) &= 0, \\ \mathfrak{Re}(ra) &= r\mathfrak{Re}(a), & \mathfrak{Im}(\mathfrak{Re}(a)) &= 0, \\ \mathfrak{Im}(ra) &= r\mathfrak{Im}(a), & \mathfrak{Im}(\mathfrak{Im}(a)) &= \mathfrak{Im}(a). \end{aligned}$$

Перейдем теперь непосредственно к процедуре удвоения Кэли–Диксона.

Определение 3.5 ([27])**.** *Алгебра* $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из $\mathcal{A}$ с помощью процедуры Кэли–Диксона с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, определяется как множество упорядоченных пар элементов из $\mathcal{A}$ с операциями

$$\begin{aligned} \alpha(a, b) &= (\alpha a, \alpha b), \\ (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) &= (ac + \gamma \bar{d} b, da + b\bar{c}) \end{aligned}$$

и сопряжением

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b), \qquad a, b, c, d \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{F}.$$

Предложение 3.6 ([27])**.** $\mathcal{A}\{\gamma\}$ *является алгеброй над полем* $\mathbb{F}$ *с единицей* $1_{\mathcal{A}\{\gamma\}} = (1_{\mathcal{A}}, 0)$ *и правильной операцией сопряжения.*

Предложение 3.7 ([27])**.** *Если* $\mathcal{A}$ *– алгебра размерности* n *с базисом* $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$, *то* $\mathcal{A}\{\gamma\}$ *– алгебра размерности* $2n$ *с базисом* $\{(e_i, 0), (0, e_i)\}_{i=1,\dots,n}$.

Таким образом, если начать с одномерной алгебры и последовательно применять к ней процедуру удвоения Кэли–Диксона, то на n-ом шаге получится алгебра размерности 2^n.

Лемма 3.8 ([27]). *Пусть* $a, b \in \mathcal{A}$, $(a,b) \in \mathcal{A}\{\gamma\}$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}((a,b)) &= \mathfrak{Re}(a),\\ \mathfrak{Im}((a,b)) &= (\mathfrak{Im}(a), b),\\ n((a,b)) &= n(a) - \gamma n(b).\end{aligned}$$

Доказательство. Имеют место следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}((a,b)) &= \frac{(a,b)+\overline{(a,b)}}{2} = \frac{(a,b)+(\bar a,-b)}{2} = \frac{(a+\bar a,0)}{2}\\ &= \frac{(2\mathfrak{Re}(a),0)}{2} = \mathfrak{Re}(a)1_{\mathcal{A}\{\gamma\}} = \mathfrak{Re}(a);\\ \mathfrak{Im}((a,b)) &= \frac{(a,b)-\overline{(a,b)}}{2} = \frac{(a,b)-(\bar a,-b)}{2} = \frac{(a-\bar a,2b)}{2}\\ &= \frac{(2\mathfrak{Im}(a),2b)}{2} = (\mathfrak{Im}(a),b);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n((a,b)) &= (a,b)\overline{(a,b)} = (a,b)(\bar a,-b) = (a\bar a - \gamma \bar b b, -ba + b\bar{\bar a})\\ &= (n(a)-\gamma n(b),0) = (n(a)-\gamma n(b))(1_{\mathcal{A}},0)\\ &= (n(a)-\gamma n(b))1_{\mathcal{A}\{\gamma\}} = n(a)-\gamma n(b). \qquad \square\end{aligned}$$

Определение 3.9. Пусть $b, c \in \mathcal{A}$, $a = (b,c) \in \mathcal{A}\{\gamma\}$. Элемент a называется *дважды чисто мнимым*, если $\mathfrak{Re}(b) = \mathfrak{Re}(c) = 0$.

Предложение 3.10. *Пусть* $a \in \mathcal{A}\{\gamma\}$ *– дважды чисто мнимый элемент. Тогда* a *– чисто мнимый элемент.*

Доказательство. Действительно, если $a = (b,c)$, $\mathfrak{Re}(b) = \mathfrak{Re}(c) = 0$, то $\mathfrak{Re}(a) = \mathfrak{Re}((b,c)) = \mathfrak{Re}(b) = 0$. □

Обозначение 3.11. Вместо $\mathcal{A}\{\gamma_1\}\dots\{\gamma_n\}$ будем писать $\mathcal{A}\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$.

Возникает естественный вопрос о корректности введенной конструкции. В частности, возникает ли при последовательном расширении некоторыми элементами в различной последовательности одна и та же алгебра? Для полноты картины приведем здесь соответствующее рассуждение с доказательством.

Лемма 3.12. *Если $\mathcal{A}$ – коммутативная алгебра, то при любых значенях γ_1, γ_2 алгебры $\mathcal{A}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ и $\mathcal{A}\{\gamma_2, \gamma_1\}$ изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим отображение ϕ: $\mathcal{A}\{\gamma_1, \gamma_2\} \longrightarrow \mathcal{A}\{\gamma_2, \gamma_1\}$ такое, что для любых элементов $a, b, c, d \in \mathcal{A}$

$$\phi : ((a,b)_{\gamma_1}, (c,d)_{\gamma_1})_{\gamma_2} \mapsto ((a,c)_{\gamma_2}, (-b,d)_{\gamma_2})_{\gamma_1}.$$

Ясно, что ϕ – биекция. Покажем, что ϕ – гомоморфизм. Проверим, что ϕ сохраняет умножение:

$$\Big((a,b)_{\gamma_1}, (c,d)_{\gamma_1}\Big)_{\gamma_2}\Big((a',b')_{\gamma_1}, (c',d')_{\gamma_1}\Big)_{\gamma_2}$$

$$=\Big((a,b)_{\gamma_1}(a',b')_{\gamma_1} + \gamma_2(\overline{c',d'})_{\gamma_1}(c,d)_{\gamma_1}, (c',d')_{\gamma_1}(a,b)_{\gamma_1} + (c,d)_{\gamma_1}(\overline{a',b'})_{\gamma_1}\Big)_{\gamma_2}$$

$$=\Big((a,b)_{\gamma_1}(a',b')_{\gamma_1} + \gamma_2(\bar{c'}, -d')_{\gamma_1}(c,d)_{\gamma_1}, (c',d')_{\gamma_1}(a,b)_{\gamma_1} + (c,d)_{\gamma_1}(\bar{a'}, -b')_{\gamma_1}\Big)_{\gamma_2}$$

$$= \Big((aa' + \gamma_1\bar{b'}b, b'a + b\bar{a'})_{\gamma_1} + \gamma_2(\bar{c'}c - \gamma_1\bar{d}d', d\bar{c'} - d'\bar{c})_{\gamma_1},$$

$$(c'a + \gamma_1\bar{b}d', bc' + d'\bar{a})_{\gamma_1} + (c\bar{a'} - \gamma_1\bar{b'}d, -b'c + da')_{\gamma_1}\Big)_{\gamma_2}$$

$$= \Big(\big(aa' + \gamma_1\bar{b'}b + \gamma_2\bar{c'}c - \gamma_1\gamma_2\bar{d}d', (b'a + b\bar{a'}) + \gamma_2(d\bar{c'} - d'\bar{c})\big)_{\gamma_1},$$

$$\big((c'a + c\bar{a'}) + \gamma_1(\bar{b}d' - \bar{b'}d), (bc' - b'c) + (d'\bar{a} + da')\big)_{\gamma_1}\Big)_{\gamma_2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\phi\Big(\big((a,b)_{\gamma_1}, (c,d)_{\gamma_1}\big)_{\gamma_2}\Big)\phi\Big(\big((a',b')_{\gamma_1}, (c',d')_{\gamma_1}\big)_{\gamma_2}\Big)$$

$$= \Big((a,c)_{\gamma_2}, (-b,d)_{\gamma_2}\Big)_{\gamma_1}\Big((a',c')_{\gamma_2}, (-b',d')_{\gamma_2}\Big)_{\gamma_1}$$

$$= \Big(\big(aa' + \gamma_2\bar{c'}c + \gamma_1\bar{b'}b - \gamma_2\gamma_1\bar{d}d', (c'a + c\bar{a'}) + \gamma_1(-d\bar{b'} + d'\bar{b})\big)_{\gamma_2},$$

$$\big((-b'a - b\bar{a'}) + \gamma_2(\bar{c}d' - \bar{c'}d), (-cb' + c'b) + (d'\bar{a} + da')\big)_{\gamma_2}\Big)_{\gamma_1}$$

$$= \Big(\big(aa' + \gamma_1\bar{b'}b + \gamma_2\bar{c'}c - \gamma_1\gamma_2\bar{d}d', (c'a + c\bar{a'}) + \gamma_1(d'\bar{b} - d\bar{b'})\big)_{\gamma_2},$$

$$\big(-((b'a + b\bar{a'}) + \gamma_2(\bar{c'}d - \bar{c}d')), (bc' - b'c) + (d'\bar{a} + da')\big)_{\gamma_2}\Big)_{\gamma_1}$$

$$= \Big(\big(aa' + \gamma_1\bar{b'}b + \gamma_2\bar{c'}c - \gamma_1\gamma_2\bar{d}d', (c'a + c\bar{a'}) + \gamma_1(\bar{b}d' - \bar{b'}d)\big)_{\gamma_2},$$

$$\big(-((b'a + b\bar{a'}) + \gamma_2(d\bar{c'} - d'\bar{c})), (bc' - b'c) + (d'\bar{a} + da')\big)_{\gamma_2}\Big)_{\gamma_1}$$

$$= \phi\Big(\big((aa' + \gamma_1 \bar{b'} b + \gamma_2 \bar{c'} c - \gamma_1\gamma_2 \bar{d} d', (b'a + b\bar{a'}) + \gamma_2(d\bar{c'} - d'\bar{c})\big)_{\gamma_1},$$

$$\big((c'a + c\bar{a'}) + \gamma_1(\bar{b}d' - \bar{b'}d), (bc' - b'c) + (d'\bar{a} + da')\big)_{\gamma_1}\big)_{\gamma_2}\Big)$$

$$= \phi\Big(\big((a, b)_{\gamma_1}, (c, d)_{\gamma_1}\big)_{\gamma_2}\big((a', b')_{\gamma_1}, (c', d')_{\gamma_1}\big)_{\gamma_2}\Big). \qquad \square$$

Определение 3.13. Для каждого целого $n \geqslant 0$ и вещественных чисел $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ определим алгебру $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ индуктивно:

1) $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}$, $e_0^{(0)} = 1$ – её базисный элемент;
2) если построена $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$, то

$$\mathcal{A}_{n+1}\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\},$$

причём $e_0^{(n+1)}, \ldots, e_{2^{n+1}-1}^{(n+1)}$ – её базисные элементы, где

$$e_i^{(n+1)} = \begin{cases} (e_i^{(n)}, 0), & 0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1, \\ (0, e_{i-2^n}^{(n)}), & 2^n \leqslant i \leqslant 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Лемма 3.14 ([27]). *При любом целом $n \geqslant 0$ построенная в определении* 3.13 *структура $\mathcal{A}_n$ является алгеброй над $\mathbb{R}$ размерности 2^n с единицей $e_0^{(n)}$ и правильной операцией сопряжения.*

Доказательство. Утверждение следует из предложений 3.6 и 3.7, если применить индукцию по n. $\square$

Будем использовать обозначения $1 = 1^{(n)} = e_0^{(n)}$ и $r = r1^{(n)}$ для $r \in \mathbb{R}$. Верхний индекс опускается в тех ситуациях, когда его выбор очевиден. Из определения алгебры $\mathcal{A}_n$ следует, что вещественные числа коммутируют со всеми ее элементами, откуда немедленно вытекает

Следствие 3.15. *Для любого целого $n \geqslant 0$ имеем $\mathbb{R} \subset C_{\mathcal{A}_n}$.*

Предложение 3.16 ([21, стр. 161, упражнение 2.5.1]). *Пусть $\gamma' = \alpha^2\gamma$, где $\alpha \neq 0$. Тогда $\mathcal{A}\{\gamma\}$ и $\mathcal{A}\{\gamma'\}$ изоморфны.*

Из предложения 3.16 следует, что при изучении вещественных алгебр Кэли–Диксона $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ достаточно рассматривать только $\gamma_k \in \{0, \pm 1\}$, $k = 0, \ldots, n-1$, поскольку для всех остальных значений γ_k полученные алгебры изоморфны перечисленным.

Положим $0^0 = 1$.

Обозначение 3.17. Пусть $\mathcal{A}_n$ – некоторая вещественная алгебра Кэли–Дискона. Тогда для каждого $m = 0, \ldots, 2^n - 1$ обозначим

$$\delta_m^{(n)} = \prod_{l=0}^{n-1} (-\gamma_l)^{c_{m,l}},$$

где показатели $c_{m,l} \in \{0, 1\}$ однозначно определены условием

$$m = \sum_{l=0}^{n-1} c_{m,l} 2^l.$$

Предложение 3.18. *Для каждого* $m = 0, \ldots, 2^n - 1$ *значение* $\delta_m^{(n)}$ *определено однозначно.*

Доказательство. Этот факт следует из единственности двоичного разложения натурального числа. □

Замечание 3.19. При любых значениях $\gamma_0, ..., \gamma_{n-1}$ выполнено $\delta_0^{(n)} = 1$.

В дальнейшем нам неоднократно потребуется следующая лемма.

Лемма 3.20. *Пусть* $a = a_0 + a_1 e_1^{(n)} + \cdots + a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)} \in \mathcal{A}_n$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= a_0 - a_1 e_1^{(n)} - \cdots - a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)};\\
\mathfrak{Re}(a) &= a_0;\\
\mathfrak{Im}(a) &= a_1 e_1^{(n)} + \cdots + a_{2^n-1} e_{2^n-1}^{(n)};\\
n(a) &= \sum_{m=0}^{2^n-1} \delta_m^{(n)} a_m^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Равенства получаются из леммы 3.8 при помощи непосредственных вычислений. □

§4. Примеры вещественных алгебр Кэли–Диксона

Определение 4.1. Алгебра $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ называется алгеброй *главной последовательности Кэли–Диксона*, если $\gamma_i = -1$ для любого $i = 0, \ldots, n-1$.

Пример 4.2. Примерами алгебр главной последовательности Кэли–Диксона могут служить алгебры комплексных чисел ($\mathbb{C}$), кватернионов ($\mathbb{H}$), октонионов ($\mathbb{O}$) и седенионов ($\mathbb{S}$). Алгебры $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ определяются, например, в работе [8], алгебра $\mathbb{S}$ – в работе [15].

Определение 4.3. Алгебра $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ называется *контр-алгеброй*, если $\gamma_i = -1$ для любого $i = 0, \ldots, n-2$ и $\gamma_{n-1} = 1$.

Пример 4.4. Частными случаями контр-алгебр являются алгебры контркомплексных чисел (split-complex numbers; $\widehat{\mathbb{C}}$), контркватернионов (split-quaternions, coquaternions; $\widehat{\mathbb{H}}$) и контроктонионов (split-octonions, hyperbolic octonions; $\widehat{\mathbb{O}}$), определенные в работе [13].

Известно, что алгебра $\widehat{\mathbb{H}}$ изоморфна алгебре $M_2(\mathbb{R})$ квадратных матриц размера 2 над полем $\mathbb{R}$, см. [21, стр. 66], а алгебра $\widehat{\mathbb{O}}$ изоморфна векторно-матричной алгебре Цорна, [21, стр. 158]. Приведем также конструктивные определения алгебр $\widehat{\mathbb{C}}$ и $\widehat{\mathbb{H}}$, которые будут использоваться в §7.

Определение 4.5 ([13])**.** $\widehat{\mathbb{C}}$ является алгеброй элементов вида $a + b\ell$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $\ell^2 = 1$ и задана операция сопряжения $\overline{a + b\ell} = a - b\ell$.

Определение 4.6 ([13])**.** $\widehat{\mathbb{H}}$ – это четырёхмерная алгебра над $\mathbb{R}$, базисными элементами которой являются $1, i, \ell, \ell i$, операция сопряжения задаётся формулой $\overline{a_0 + a_1 i + a_2\ell + a_3\ell i} = a_0 - a_1 i - a_2\ell - a_3\ell i$, а умножение осуществляется согласно таблице 1.

Таблица 1. Таблица умножения базисных контркватернионов.

$\times$	1	i	ℓ	ℓi
1	1	i	ℓ	ℓi
i	i	-1	$-\ell i$	ℓ
ℓ	ℓ	ℓi	1	i
ℓi	ℓi	$-\ell$	$-i$	1

Предложение 4.7 ([22]; [21, стр. 64–66])**.** *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$\mathbb{C} \cong \mathcal{A}_1\{-1\}; \qquad \widehat{\mathbb{C}} \cong \mathcal{A}_1\{1\};$$
$$\mathbb{H} \cong \mathcal{A}_2\{-1,-1\}; \qquad \widehat{\mathbb{H}} \cong \mathcal{A}_2\{-1,1\};$$
$$\mathbb{O} \cong \mathcal{A}_3\{-1,-1,-1\}; \qquad \widehat{\mathbb{O}} \cong \mathcal{A}_3\{-1,-1,1\};$$
$$\mathbb{S} \cong \mathcal{A}_4\{-1,-1,-1,-1\}.$$

§5. Антикоммутативность в вещественных алгебрах Кэли–Диксона

Всюду далее считаем, что $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$, где $\gamma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 0, \dots, n-1$, – произвольная вещественная алгебра Кэли–Диксона.

Лемма 5.1. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $a \in \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(a)$, *то есть* $a^2 = 0$;
2) $a \in \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$;
3) $n(a) = 0$ *и* $\mathfrak{Re}(a) = 0$.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Условия $a^2 = 0$ и $2a^2 = 0$ эквивалентны в $\mathcal{A}_n$.

1) $\Rightarrow$ 3) Пусть $a^2 = 0$. Тогда

$$n(a) = a\bar{a} = a(2\mathfrak{Re}(a) - a) = 2\mathfrak{Re}(a)a - a^2 = 2\mathfrak{Re}(a)a \in \mathbb{R}.$$

Значит, либо $\mathfrak{Re}(a) = 0$ и тогда $n(a) = 0$, либо $a \in \mathbb{R}$ и тогда $a = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $n(a) = 0$ и $\mathfrak{Re}(a) = 0$. Тогда

$$\bar{a} = -a \quad \text{и} \quad a^2 = -a\bar{a} = -n(a) = 0. \qquad \square$$

Лемма 5.2. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$ и выполняется условие $\mathfrak{Re}(a) = 0$. Тогда $a^2 = -n(a) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. $\mathfrak{Re}(a)=0$, поэтому $\bar{a}=-a$, $a^2=-a\bar{a}=-n(a)\in\mathbb{R}$. $\square$

Обозначение 5.3. Для $a = \sum\limits_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}$, $b = \sum\limits_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{A}_n$ введём обозначение

$$\Lambda(a,b) = \sum_{m=0}^{2^n-1} \delta_m^{(n)} a_m b_m,$$

где параметр $\delta_m^{(n)}$ определён в обозначении 3.17.

Предложение 5.4. $\Lambda(a,b)$ – *симметричная вещественнозначная билинейная форма, то есть*

$$\begin{aligned} \Lambda(a_1 + a_2, b) &= \Lambda(a_1, b) + \Lambda(a_2, b), \\ \Lambda(\alpha a, b) &= \alpha\Lambda(a,b), \\ \Lambda(a,b) &= \Lambda(b,a), \\ \Lambda(a,b) &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Все свойства проверяются непосредственным вычислением. $\square$

Предложение 5.5. *Для любого $a \in \mathcal{A}$ выполнено $n(a) = \Lambda(a,a)$.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3.20. $\square$

Предложение 5.6. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$. Тогда $\bar{a}b + \bar{b}a = 2\Lambda(a,b) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Используя предложения 5.4 и 5.5, получим

$$\begin{aligned}\bar{a}b + \bar{b}a &= (\bar{a}+\bar{b})(a+b) - \bar{a}a - \bar{b}b = \overline{(a+b)}(a+b) - \bar{a}a - \bar{b}b \\ &= n(a+b) - n(a) - n(b) = \Lambda(a+b, a+b) - \Lambda(a,a) - \Lambda(b,b) \\ &= \big(\Lambda(a,a) + \Lambda(a,b) + \Lambda(b,a) + \Lambda(b,b)\big) - \Lambda(a,a) - \Lambda(b,b) \\ &= 2\Lambda(a,b). \qquad \square\end{aligned}$$

Следствие 5.7. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$, $\mathfrak{Re}(a) = \mathfrak{Re}(b) = 0$. Тогда $ab + ba = -2\Lambda(a,b) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Утверждение является частным случаем предложения 5.6 при $\bar{a} = -a$, $\bar{b} = -b$. $\square$

Лемма 5.8. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$, $a \neq 0$.*

(1) *Если $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$, $n(a) \neq 0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = 0$.*
(2) *Если $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$, $n(a) = 0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{R}\bar{a}$.*
(3) *Если $\mathfrak{Re}(a) = 0$, то $b \in \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$, если и только если $\mathfrak{Re}(b) = 0$ и $\Lambda(a,b) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим условие антикоммутативности элементов $a, b \in \mathcal{A}_n$:

$$\begin{aligned}0 &= ab + ba \\ &= (\mathfrak{Re}(a) + \mathfrak{Im}(a))(\mathfrak{Re}(b) + \mathfrak{Im}(b)) + (\mathfrak{Re}(b) + \mathfrak{Im}(b))(\mathfrak{Re}(a) + \mathfrak{Im}(a)) \\ &= (2\mathfrak{Re}(a)\mathfrak{Re}(b) + \mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b) + \mathfrak{Im}(b)\mathfrak{Im}(a)) \\ &\qquad + 2(\mathfrak{Re}(a)\mathfrak{Im}(b) + \mathfrak{Re}(b)\mathfrak{Im}(a)).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$A_1 = 2\mathfrak{Re}(a)\mathfrak{Re}(b) + \mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b) + \mathfrak{Im}(b)\mathfrak{Im}(a) = \mathfrak{Re}(ab + ba),$$

тогда как

$$A_2 = 2(\mathfrak{Re}(a)\mathfrak{Im}(b) + \mathfrak{Re}(b)\mathfrak{Im}(a)) = \mathfrak{Im}(ab + ba).$$

Равенство $A_1 + A_2 = 0$ означает, что $A_1 = A_2 = 0$.

Рассмотрим вначале случай $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$. Тогда

$$\mathfrak{Im}(b) = -\frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Re}(a)}\mathfrak{Im}(a),$$

$$b = \mathfrak{Re}(b) + \mathfrak{Im}(b) = \frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Re}(a)}(\mathfrak{Re}(a) - \mathfrak{Im}(a)) = \frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Re}(a)}\bar{a}. \tag{5.1}$$

Получаем, что

$$0 = ab + ba = \frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Re}(a)}(a\bar{a} + \bar{a}a) = 2\frac{\mathfrak{Re}(b)}{\mathfrak{Re}(a)}n(a). \tag{5.2}$$

Тогда, если $n(a) \neq 0$, то из равенства (5.2) следует, что $\mathfrak{Re}(b) = 0$, а значит, из (5.1) получаем, что $b = 0$, что доказывает условие (1).

Если $n(a) = 0$, то равенство (5.1) гарантирует выполнение условия (2).

Случай, когда $\mathfrak{Re}(b) \neq 0$, рассматривается аналогично и приводит к условиям случаев (1) или (2).

Если $\mathfrak{Re}(a) = \mathfrak{Re}(b) = 0$, то из следствия 5.7 получаем условие (3). □

Обозначим через q число нулевых элементов среди $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$. Кроме того, введём следующие подмножества множества индексов $\{1, \ldots, 2^n - 1\}$:

$$\begin{aligned}
M_+ &= \left\{1 \leqslant m \leqslant 2^n - 1 \;\middle|\; \delta_m^{(n)} > 0\right\},\\
M_- &= \left\{1 \leqslant m \leqslant 2^n - 1 \;\middle|\; \delta_m^{(n)} < 0\right\},\\
M_0 &= \left\{1 \leqslant m \leqslant 2^n - 1 \;\middle|\; \delta_m^{(n)} = 0\right\},\\
M_\pm &= M_+ \cup M_-.
\end{aligned}$$

Предложение 5.9. *Во введенных обозначениях выполняется* $M_+ \cup M_- \cup M_0 = \{1, \ldots, 2^n - 1\}$ *и* $M_+ \cap M_- = M_+ \cap M_0 = M_0 \cap M_- = \varnothing$.

Доказательство. Непосредственно следует из определения множеств M_+, M_-, M_0. □

Предложение 5.10. *Во введенных обозначениях выполняется*

(1) $|M_\pm| = 2^{n-q} - 1$, $|M_0| = 2^n - 2^{n-q}$;
(2) *если* $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \leqslant 0$, *то* $|M_+| = 2^{n-q} - 1$, $|M_-| = 0$;
(3) *если для некоторого* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ *выполнено* $\gamma_i > 0$, *то* $|M_+| = 2^{n-q-1} - 1$, $|M_-| = 2^{n-q-1}$.

Доказательство. Утверждения следуют из определений множеств M_+, M_-, M_0, обозначения 3.17 и предложения 5.9. □

Введём следующие линейные подпространства в $\mathcal{A}_n$:

$$\mathcal{A}_n^+ = \bigoplus_{m\in M_+} \langle e_m^{(n)}\rangle, \quad \mathcal{A}_n^- = \bigoplus_{m\in M_-} \langle e_m^{(n)}\rangle, \quad \mathcal{A}_n^0 = \bigoplus_{m\in M_0} \langle e_m^{(n)}\rangle,$$

$$\mathcal{A}_n^\pm = \mathcal{A}_n^+ \oplus \mathcal{A}_n^-, \quad \mathcal{A}_n' = \mathcal{A}_n^\pm \oplus \mathcal{A}_n^0.$$

По определению получаем, что $\mathcal{A}_n' = \mathfrak{Im}(\mathcal{A}_n)$ – множество чисто мнимых элементов алгебры $\mathcal{A}_n$.

Пусть $a \in \mathcal{A}_n$, $a = \sum\limits_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}$. Ясно, что $\mathfrak{Im}(a) \in \mathcal{A}_n'$. Кроме того, обозначим

$$a_+ = \sum_{m\in M_+} a_m e_m^{(n)} \in \mathcal{A}_n^+, \quad a_- = \sum_{m\in M_-} a_m e_m^{(n)} \in \mathcal{A}_n^-,$$

$$a_0 = \sum_{m\in M_0} a_m e_m^{(n)} \in \mathcal{A}_n^0, \quad a_\pm = \mathfrak{Im}(a) - a_0 \in \mathcal{A}_n^\pm.$$

Ниже мы приводим еще несколько непосредственных следствий из определений, которые будут использоваться в дальнейшем для доказательства основного результата.

Следствие 5.11. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n' \setminus \{0\}$.*

(1) *Если $a \in \mathcal{A}_n^0$, то $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathcal{A}_n'$ и $\dim(\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)) = 2^n - 1$.*
(2) *Если $a \notin \mathcal{A}_n^0$, то $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) \subsetneq \mathcal{A}_n'$ и $\dim(\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)) = 2^n - 2$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{Re}(a) = 0$, то, согласно лемме 5.8, $b \in \operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$, если и только если $\mathfrak{Re}(b) = 0$ и $\Lambda(a,b) = 0$.

(1) В случае, когда $a \in \mathcal{A}_n^0$, условие $\Lambda(a,b) = 0$ автоматически выполнено, поэтому существенным является только условие $b \in \mathcal{A}_n'$.
(2) В случае, когда $a \notin \mathcal{A}_n^0$, уравнение $\Lambda(a,b) = 0$ задаёт собственное $(2^n - 2)$-мерное подпространство пространства $\mathcal{A}_n'$. □

Следствие 5.12. *Пусть $a \in \mathcal{A}_n'$, $n(a) \neq 0$. Тогда*

(1) *$\mathcal{A}_n' = \mathbb{R}a \oplus \operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$;*
(2) *$\mathcal{A}_n = C_{\mathcal{A}_n}(a) + \operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$.*

Доказательство. (1) По лемме 5.1 из $n(a) \neq 0$ следует, что $a \notin \operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$. Кроме того, согласно следствию 5.11, $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) \subset \mathcal{A}_n'$, $\dim(\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)) \geqslant 2^n - 2$. Тогда

$$\mathbb{R}a \oplus \operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) \subset \mathcal{A}_n', \quad \dim(\mathbb{R}a \oplus \operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)) \geqslant 2^n - 1 = \dim(\mathcal{A}_n'),$$

поэтому $\mathcal{A}_n' = \mathbb{R}a \oplus \operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$.

(2) Поскольку $1, a \in C_{\mathcal{A}_n}(a)$, то $\mathcal{A}_n = \mathbb{R} \oplus \mathcal{A}_n' = \mathbb{R} \oplus (\mathbb{R}a \oplus \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a) \oplus \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) \subset C_{\mathcal{A}_n}(a) \oplus \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$, откуда и следует требуемое. □

Замечание 5.13. Сумму в равенстве $\mathcal{A}_n = C_{\mathcal{A}_n}(a) + \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$ можно заменить прямой суммой, если и только если $\mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{0\}$.

Доказательство. $C_{\mathcal{A}_n}(a) \cap \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(a)$. □

Пример 5.14. В качестве примера, когда $\mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(a) \neq \{0\}$, можно взять $\mathcal{A}_n = \mathbb{S}$, a – произвольный делитель нуля в $\mathbb{S}$.

Лемма 5.15. *Для алгебры $\mathcal{A}_n$ справедливы следующие утверждения.*

(1) *Существует $a \in AC^*(\mathcal{A}_n)$ такое, что $\mathfrak{Re}(a) = 0$, если и только если либо $n \geqslant 2$, либо $n = 1$ и $\gamma_0 = 0$.*

(2) *Существует $a \in \mathcal{A}_n$ такое, что $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$, $n(a) = 0$, если и только если $\mathcal{A}_n^- \neq 0$, то есть хотя бы одно из чисел $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ положительно.*

(3) *$AC^*(\mathcal{A}_n) = \varnothing$, если и только если либо $n = 0$, либо $n = 1$ и $\gamma_0 < 0$.*

Доказательство. (1) Известно, что $a \in AC^*(\mathcal{A}_n)$, $\mathfrak{Re}(a) = 0$, если и только если уравнение $\Lambda(a, b) = 0$ относительно переменной $b = \sum\limits_{m=1}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)}$ имеет хотя бы одно ненулевое решение.

- Если $n \geqslant 2$, то подойдёт любое $a \in \mathcal{A}_n' \setminus \{0\}$.
- Если же $n = 1$, то $a = a_1 e_1^{(1)}$, а уравнение для переменной $b = b_1 e_1^{(1)}$ принимает вид $-\gamma_0 a_1 b_1 = 0$. Поскольку $a \neq 0$, это означает, что $a_1 \neq 0$. Значит, уравнение имеет ненулевое решение, если и только если $\gamma_0 = 0$.

(2) Если $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \leqslant 0$, то неотрицательны множители при всех слагаемых в $n(a) = \sum\limits_{m=0}^{2^n-1} \delta_m^{(n)} a_m^2$, где $a = \sum\limits_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}$. Кроме того, $\delta_0^{(n)} = 1$. Таким образом, из $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$ следует $n(a) > 0$.

Если же для некоторого i выполнено $\gamma_i > 0$, то можно взять $a = \sqrt{\gamma_i} + e_{2^i}^{(n)}$.

(3) Пусть либо $n = 0$, либо $n = 1$ и $\gamma_0 < 0$. Тогда, как легко видеть, $AC^*(\mathcal{A}_n) = \varnothing$.

Пусть теперь либо $n \geqslant 2$, либо $n = 1$ и $\gamma_0 \geqslant 0$. Докажем, что $AC^*(\mathcal{A}_n) \neq \varnothing$.

- Рассмотрим случай, когда либо $n \geqslant 2$, либо $n = 1$ и $\gamma_0 = 0$. Тогда, как было показано выше, найдётся $a \in AC^*(\mathcal{A}_n)$ такое, что $\mathfrak{Re}(a) = 0$.
- Рассмотрим случай, когда $n = 1$ и $\gamma_0 > 0$. Тогда, по доказанному, существует $b \in \mathcal{A}_n$ такое, что $\mathfrak{Re}(b) \neq 0$, $n(b) = 0$, значит, $b \in AC^*(\mathcal{A}_n)$. □

Следствие 5.16. *Пусть $AC^*(\mathcal{A}_n) \neq \varnothing$, $a \in \mathcal{A}_n$.*

(1) *Если $\mathcal{A}_n^- \neq 0$ или $\mathcal{A}_n^0 = 0$, то a антикоммутирует с любым $b \in AC^*(\mathcal{A}_n)$, если и только если $a = 0$.*

(2) *Если $\mathcal{A}_n^- = 0$ и $\mathcal{A}_n^0 \neq 0$, то a антикоммутирует с любым $b \in AC^*(\mathcal{A}_n)$, если и только если $a \in \mathcal{A}_n^0$.*

Доказательство. Очевидно, что если $a = 0$, то $ab + ba = 0$ для любого $b \in AC^*(\mathcal{A}_n)$. Проверим теперь существование ненулевых a, удовлетворяющих этому условию. В силу условия $AC^*(\mathcal{A}_n) \neq \varnothing$, достаточно рассматривать только $a \in AC^*(\mathcal{A}_n)$.

(1)

- Пусть $\mathcal{A}_n^- \neq 0$. Тогда найдётся $b \in \mathcal{A}_n$ такое, что $\mathfrak{Re}(b) \neq 0$, $n(b) = 0$. Тогда $b, \overline{b} \in AC^*(\mathcal{A}_n)$. Но $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(b) \cap \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\overline{b}) = 0$, откуда и получаем требуемое.
- Пусть теперь $\mathcal{A}_n^- = 0$ и $\mathcal{A}_n^0 = 0$. В силу условия $AC^*(\mathcal{A}_n) \neq \varnothing$, выполняется $n \geqslant 2$. Тогда $AC^*(\mathcal{A}_n)$ состоит из ненулевых элементов $\mathcal{A}_n' = \mathcal{A}_n^+$. Для произвольного $a \in AC^*(\mathcal{A}_n)$ имеем $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) \subsetneq \mathcal{A}_n'$. Значит, найдётся $b \in AC^*(\mathcal{A}_n) \setminus \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a)$.

(2) Если $\mathcal{A}_n^- = 0$ и $\mathcal{A}_n^0 \neq 0$, то $AC^*(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n' \setminus \{0\}$. Пусть теперь $a \in AC^*(\mathcal{A}_n)$. Если $a \in \mathcal{A}_n^0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathcal{A}_n'$, поэтому a антикоммутирует со всеми элементами из $AC^*(\mathcal{A}_n)$. Если же $a \notin \mathcal{A}_n^0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) \subsetneq \mathcal{A}_n'$, поэтому a не может удовлетворять данному условию. □

Лемма 5.17. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n'$.*

(1) *Предположим, что все $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ неположительны. Тогда a и b антикоммутируют, если и только если $a_\pm$ и $b_\pm$ ортогональны как элементы $(2^{n-q} - 1)$-мерного евклидова пространства.*

(2) *Предположим, что найдётся такое $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, что $\gamma_i > 0$. Тогда a и b антикоммутируют, если и только если $a_\pm$ и $b_\pm$ ортогональны как элементы псевдоевклидова пространства с сигнатурой $(2^{n-q-1} - 1, 2^{n-q-1})$.*

Доказательство. Утверждения следуют из леммы 5.8. □

Замечание 5.18. Таким образом, задача поиска клик среди чисто мнимых элементов в $\Gamma^E_{AC}(\mathcal{A}_n)$ сводится к задаче поиска ортогональных систем либо в $(2^{n-q}-1)$-мерном евклидовом пространстве, либо в псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой $(2^{n-q-1}-1, 2^{n-q-1})$.

Хорошо известен следующий факт, см. например, работу [17].

Лемма 5.19 ([17, стр. 282]). *Пусть E – псевдоевклидово пространство, U – подпространство в E, $U^\perp$ – пространство элементов, ортогональных каждому элементу из U. Тогда имеет место равенство*

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(E).$$

Следствие 5.20. *Пусть $S \subset \mathcal{A}_n^\pm$. Тогда*

$$rk(S) + \dim(\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(S) \cap \mathcal{A}_n^\pm) = 2^{n-q} - 1,$$

где $rk(S)$ – мощность максимальной линейно независимой подсистемы S.

Доказательство. Равенство непосредственно следует из лемм 5.17 и 5.19. □

Лемма 5.21. *Пусть $a \in AC^*(\mathcal{A}_n)$.*

(1) *Если $\mathfrak{Re}(a) = 0$, то $a \sim_{AC} b$, если и только если $b \neq 0$ и $b \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})a + \mathcal{A}_n^0$, то есть $b = \alpha a + x$ для некоторых $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{A}_n^0$.*

(2) *Если $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$, $n(a) = 0$, то $a \sim_{AC} b$, если и только если $b \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})a$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 5.8.

(1) Если $\mathfrak{Re}(a) = 0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) \subset \mathcal{A}'_n$, поэтому из $a \sim_{AC} b$ следует, что $\mathfrak{Re}(b) = 0$. Таким образом, как следует из леммы 5.8, $a \sim_{AC} b$, если и только если уравнения $\Lambda(a, d) = 0$ и $\Lambda(b, d) = 0$ относительно переменной $d = \sum\limits_{m=1}^{2^n-1} d_m e_m^{(n)}$ задают одно и то же множество решений. В силу определения множеств M_0 и $M_\pm$, имеем $M_0 \cup M_\pm = \{1, \ldots, 2^n-1\}$ и, кроме того, $\delta_m^{(n)} = 0$ при $m \in M_0$ и $\delta_m^{(n)} \neq 0$ при $m \in M_\pm$. Значит,

$$\Lambda(a, d) = \sum_{m=1}^{2^n-1} \delta_m^{(n)} a_m d_m = \sum_{m \in M_\pm} \delta_m^{(n)} a_m d_m,$$

и аналогичная формула справедлива для $\Lambda(b,d)$. Таким образом, $a \sim_{AC} b$, если и только если $b \neq 0$, $\mathfrak{Re}(b) = 0$ и $b_\pm = \alpha a_\pm$ для некоторого $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Легко заметить, что это выполнено тогда и только тогда, когда $b \neq 0$ и $b \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})a + \mathcal{A}_n^0$.

(2) Если $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$, $n(a) = 0$, то $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{R}\bar{a}$, $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) \cap \mathcal{A}_n' = 0$. Тогда из $a \sim_{AC} b$ следует, что $\mathfrak{Re}(b) \neq 0$, $n(b) = 0$, $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(b) = \mathbb{R}\bar{b}$. При этом $\mathbb{R}\bar{a} = \mathbb{R}\bar{b}$, если и только если $b \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})a$. □

Замечание 5.22. Из леммы 5.21 следует, что для любого $a \in \mathcal{A}_n' \setminus \mathcal{A}_n^0$ имеет место отношение $a \sim_{AC} a_\pm$. Однако при $a \in \mathcal{A}_n^0 \setminus \{0\}$ выполнено $a_\pm = 0$, $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathcal{A}_n'$, $\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a_\pm) = \mathcal{A}_n$.

Обозначение 5.23. При $\mathcal{A}_n^0 \neq 0$ выберем произвольный элемент из $\mathcal{A}_n^0 \setminus \{0\}$ и обозначим его $0'$. Положим $\overline{\mathcal{A}_n^\pm} = (\mathcal{A}_n^\pm \setminus \{0\}) \cup \{0'\}$.

Предложение 5.24. *Для любого $a \in \mathcal{A}_n^0 \setminus \{0\}$ выполнено $a \sim_{AC} 0'$.*

Доказательство. Поскольку $a, 0' \in \mathcal{A}_n^0 \setminus \{0\}$, то

$$\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(0') = \mathcal{A}_n',$$

откуда $a \sim_{AC} 0'$. □

Следствие 5.25. (1) *Пусть $\mathcal{A}_n^0 = 0$. Тогда для любого $a \in \mathcal{A}_n' \setminus \{0\}$ в классе эквивалентности $[a]_{AC}$ можно выбрать элемент из $\mathcal{A}_n^\pm \setminus \{0\}$.*

(2) *Пусть $\mathcal{A}_n^0 \neq 0$. Тогда для любого $a \in \mathcal{A}_n' \setminus \{0\}$ в классе эквивалентности $[a]_{AC}$ можно выбрать элемент из $\overline{\mathcal{A}_n^\pm}$.*

§6. Графы антикоммутативности вещественных алгебр Кэли–Диксона

Обозначение 6.1. Для описания компонент связности графа $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ нам понадобятся следующие виды его максимальных подграфов на указанных подмножествах вершин:

(C_1): $\big\{[a], [\bar{a}]\big\}$, где $\mathfrak{Re}(a) \neq 0, n(a) = 0$;
(C_2): $\big\{[a] \bigm| a \in \mathcal{A}_n^\pm \setminus \{0\}\big\}$;
(C_3): $\big\{[a] \bigm| a \in \overline{\mathcal{A}_n^\pm}\big\}$.

Обозначение 6.2. Для описания клик графа $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ нам понадобятся следующие виды подмножеств его вершин:

(Q_1): $\big\{[a], [\bar{a}]\big\}$, где $\mathfrak{Re}(a) \neq 0, n(a) = 0$;

(Q_2^k): $\{[r_1a_1+\ldots+r_ka_k]\,|\,(r_1,\ldots,r_k)\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}\}\cup\{[b_1],\ldots,[b_{2^n-2k-1}]\}$, где

- $0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}-1$ (если $k=0$, то множество принимает вид $\{[b_1],\ldots,[b_{2^n-1}]\}$);
- $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_{2^n-2k-1}\in\mathcal{A}_n^{\pm}$ попарно антикоммутируют и линейно независимы в совокупности;
- $n(a_j)=0$ для всех $j=1,\ldots,k$;
- $n(b_j)\neq 0$ для всех $j=1,\ldots,2^n-2k-1$;

(Q_3^k): $\{[0']\}\cup\{[r_1a_1+\cdots+r_ka_k]\mid(r_1,\ldots,r_k)\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}\}\cup\{[b_1],\ldots,[b_{2^{n-q}-2k-1}]\}$, где

- $0\leqslant k\leqslant 2^{n-q-1}-1$ (если $k=0$, то множество принимает вид $\{[0'],[b_1],\ldots,[b_{2^{n-q}-1}]\}$),
- $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_{2^{n-q}-2k-1}\in\mathcal{A}_n^{\pm}$ попарно антикоммутируют и линейно независимы в совокупности,
- $n(a_j)=0$ для всех $j=1,\ldots,k$,
- $n(b_j)\neq 0$ для всех $j=1,\ldots,2^{n-q}-2k-1$.

Перейдем к описанию строения графов антикоммутативности в алгебрах $\mathcal{A}_n$.

Теорема 6.3. *Пусть $\gamma_0,\ldots,\gamma_{n-1}\in\{-1,0,1\}$, $\mathcal{A}_n=\mathcal{A}_n\{\gamma_0,\ldots,\gamma_{n-1}\}$.*

(A) *Пусть $n=0$ или $n=1$ и $\gamma_0<0$. Тогда $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ – граф с пустым множеством вершин.*

(B) *При $n=1$ и $\gamma_0>0$ граф $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ является полным графом на двух вершинах.*

(C) *При $n\geqslant 1$ и $q=n$ граф $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ является графом с одной вершиной.*

(D) *При $n\geqslant 2$, $q=0$ и $\mathcal{A}_n^-\neq 0$ вершины $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ – классы эквивалентности, соответствующие элементам $\{a\in\mathcal{A}_n\,|\,\mathfrak{Re}(a)\neq 0, n(a)=0\}$ и элементам $\mathcal{A}_n^{\pm}\setminus\{0\}$.*

Граф содержит компоненты связности вида C_1 и C_2. Диаметр каждой из компонент связности вида C_1 равен 1, диаметр компоненты связности C_2 равен 2.

Максимальные клики графа $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ могут принимать вид Q_1 и Q_2^k, $0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}-1$.

(E) *При $n\geqslant 2$, $q=0$ и $\mathcal{A}_n^-=0$ вершины $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ – классы эквивалентности, соответствующие элементам $\mathcal{A}_n^{\pm}\setminus\{0\}$.*

Граф связен, его диаметр равен 2 *(то есть* $\Gamma^E_{AC}(\mathcal{A}_n)$ *состоит из одной компоненты связности* C_2*).*

Максимальные клики $\Gamma^E_{AC}(\mathcal{A}_n)$ *имеют вид* Q^0_2.

(F) *При* $n \geqslant 2$, $0 < q < n$ *и* $\mathcal{A}^-_n \neq 0$ *вершины* $\Gamma^E_{AC}(\mathcal{A}_n)$ *– классы эквивалентности, соответствующие элементам* $\{a \in \mathcal{A}_n \,|\, \mathfrak{Re}(a) \neq 0, n(a)=0\}$ *и элементам* $\overline{\mathcal{A}^{\pm}_n}$.

Граф содержит компоненты связности вида C_1 *и* C_3*. Диаметр каждой из компонент связности вида* C_1 *равен* 1*, диаметр компоненты связности* C_3 *равен* 1*, если* $q = n-1$*, и* 2*, если* $q < n-1$.

Максимальные клики могут принимать вид Q_1 *и* Q^k_3, $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-q-1}-1$.

(G) *При* $n \geqslant 2$, $0 < q < n$ *и* $\mathcal{A}^-_n = 0$ *вершины* $\Gamma^E_{AC}(\mathcal{A}_n)$ *– классы эквивалентности, соответствующие элементам* $\overline{\mathcal{A}^{\pm}_n}$.

Граф связен, его диаметр равен 1*, если* $q = n-1$*, и* 2*, если* $q < n-1$ *(то есть* $\Gamma^E_{AC}(\mathcal{A}_n)$ *состоит из одной компоненты связности* C_3*).*

Максимальные клики имеют вид Q^0_3.

Доказательство. (1) Случай A напрямую следует из леммы 5.15.

(2) В случае B, согласно лемме 5.15, $AC^*(\mathcal{A}_n) \cap \mathcal{A}'_n = \varnothing$. Тогда, как следует из леммы 5.8, $AC^*(\mathcal{A}_n) = \{a \in \mathcal{A}_n \mid \mathfrak{Re}(a) \neq 0, n(a) = 0\} = (\mathbb{R}\setminus\{0\})(\sqrt{\gamma_0}+e^{(1)}_1) \cup (\mathbb{R}\setminus\{0\})(\sqrt{\gamma_0}-e^{(1)}_1)$. Таким образом, вершинами $\Gamma^E_{AC}(\mathcal{A}_n)$ являются $\left[\sqrt{\gamma_0}+e^{(1)}_1\right]_{AC}$ и $\left[\sqrt{\gamma_0}-e^{(1)}_1\right]_{AC}$, и они соединены ребром.

(3) В случаях C, E и G, как следует из леммы 5.15, $AC^*(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}'_n$. Значит, в силу леммы 5.8, $AC^*(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}'_n \setminus \{0\}$.

(4) В случае C $\mathcal{A}^{\pm}_n = 0$, поэтому $AC^*(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}^0_n \setminus \{0\}$. Таким образом, множество вершин $\Gamma^E_{AC}(\mathcal{A}_n)$ содержит только элемент $[0']_{AC}$.

(5) Случаи F и G отличаются от случаев D и E соответственно добавлением элемента $[0']_{AC}$ и изменением $\dim(\mathcal{A}^{\pm}_n)$ с 2^n-1 на $2^{n-q}-1$. Стоит отдельно отметить, что в случаях F и G при $n-q=1$ имеем $\dim(\mathcal{A}^{\pm}_n) = 1$, поэтому компонента связности C_3 содержит только два элемента, значит, её диаметр равен 1. Если же $n-q \geqslant 2$, то $\dim(\mathcal{A}^{\pm}_n) \geqslant 3$, поэтому в C_3 найдутся хотя бы два элемента, не соединённые ребром.

(6) Таким образом, нам осталось рассмотреть случаи D и E, в которых $n \geqslant 2$, $q = 0$. Причины различия между ними описаны в лемме 5.17.

(7) Рассмотрим сначала случай D. Из леммы 5.8 ясно, что классы эквивалентности, соответствующие элементам $\{a \in \mathcal{A}_n \mid \mathfrak{Re}(a) \neq 0, n(a) = 0\}$ и элементам $\mathcal{A}_n^{\pm} \setminus \{0\}$, лежат в разных компонентах связности.

(a) Как следует из леммы 5.8, все классы эквивалентности элементов $\{a \in \mathcal{A}_n \mid \mathfrak{Re}(a) \neq 0, n(a) = 0\}$ содержатся в компонентах связности вида C_1, а максимальные клики в них совпадают с самими компонентами связности и имеют вид Q_1.

(b) Покажем, что подграф $\Gamma_{AC}^{E}(\mathcal{A}_n)$ на множестве вершин

$$\big\{[a]_{AC} \big| a \in \mathcal{A}_n^{\pm} \setminus \{0\}\big\}$$

связен и имеет диаметр 2. Воспользуемся леммой 5.17. Пространство элементов $\mathcal{A}_n^{\pm}$, ортогональных (в смысле псевдоевклидова пространства) заданному $a \in \mathcal{A}_n^{\pm} \setminus \{0\}$, имеет размерность $2^n - 2$, при этом $\dim(\mathcal{A}_n^{\pm}) = 2^n - 1$, поэтому для любых двух таких элементов пространства ортогональных им элементов имеют ненулевое пересечение (его размерность не меньше $2^n - 3$). Из этого следует, что рассматриваемый подграф связен, а его диаметр не превосходит 2. При этом его диаметр не меньше 2, так как найдутся вершины, не соединённые ребром (в псевдоевклидовом пространстве размерности $\geqslant 3$ найдётся пара неортогональных элементов).

(c) Рассмотрим виды максимальных клик, которые встречаются в компоненте связности C_2.

Заметим, что если клику образуют различные вершины $[a_1], \dots, [a_k]$, $[r_1 a_1 + \dots + r_k a_k]$, где $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$, то из $r_j \neq 0$ следует, что a_j антикоммутирует само с собой, то есть $n(a_j) = 0$ и $\mathfrak{Re}(a_j) = 0$ (из леммы 5.1). Отсюда получаем, что $n(r_1 a_1 + \dots + r_k a_k) = 0$.

Пусть Q – максимальная клика в C_2. Сопоставим каждому классу эквивалентности из Q его представитель из $\mathcal{A}_n^{\pm}$. Обозначим множество всех элементов полученного набора за S, множество элементов набора с нулевой нормой – за S_0. $\mathrm{Lin}(S)$ и $\mathrm{Lin}(S_0)$ – линейные пространства, порождённые S и S_0, соответственно, $\mathrm{Lin}(S_0) \subset \mathrm{Lin}(S) \subset \mathcal{A}_n^{\pm}$. Пусть

$$m = rk(S) = \dim(\mathrm{Lin}(S)), \quad k = rk(S_0) = \dim(\mathrm{Lin}(S_0)), \quad m \geqslant k.$$

Ясно, что $S_0 \subset \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(S) \cap \mathcal{A}_n^{\pm}$, откуда $\dim(\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(S) \cap \mathcal{A}_n^{\pm}) \geqslant k$. Кроме того, из замечания выше следует, что

$$\mathrm{Lin}(S) \cap (\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(S) \cap \mathcal{A}_n^{\pm}) = \mathrm{Lin}(S_0).$$

Используя следствие 5.20, получаем, что $m + \dim(\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(S) \cap \mathcal{A}_n^{\pm}) = 2^n - 1$, откуда $2k \leqslant k + m \leqslant 2^n - 1$. Значит, $k \leqslant 2^{n-1} - 1$. Кроме того, если $k + m < 2^n - 1$, то найдётся $b \in (\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(S) \cap \mathcal{A}_n^{\pm}) \setminus \mathrm{Lin}(S)$, и тогда $Q \cup \big\{[b]_{AC}\big\}$ тоже будет кликой. Но Q – максимальная клика, поэтому $k + m = 2^n - 1$. Значит, Q имеет вид Q_2^k.

Приведём пример клики вида Q_2^k для каждого возможного значения k, $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1$:

$$a_j = e_{2j-1}^{(n)} + e_{2j}^{(n)}, \quad j = 1, \ldots, k,$$
$$b_j = e_{2k+j}^{(n)}, \quad j = 1, \ldots, 2^n - 2k - 1.$$

(8) В случае E все элементы из $AC^*(\mathcal{A}_n)$ имеют нулевую действительную часть и ненулевую норму, а условие антикоммутативности выражается в терминах ортогональности в евклидовом пространстве размерности $2^n - 1$. Таким образом, аналогично показывается, что подграф $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$ вида C_2, совпадающий со всем графом $\Gamma_{AC}^E(\mathcal{A}_n)$, связен и имеет диаметр 2. Явный вид клик Q_2^0 следует из того факта, что в евклидовом пространстве любая ортогональная система дополняется до ортогонального базиса. □

§7. Примеры графов антикоммутативности

В случае кватернионов, контркомплексных чисел и контркватернионов лемма 5.8 и теорема 6.3 принимают описанный ниже вид.

Лемма 7.1. *Если $a \in \mathbb{H}$, $a \neq 0$, то $\mathrm{Anc}_{\mathbb{H}}(a) \neq 0$, если и только если $\mathfrak{Re}(a) = 0$.*

В случае, когда $\mathfrak{Re}(a) = 0$, $\dim(\mathrm{Anc}_{\mathbb{H}}(a)) = 2$ и $b \in \mathrm{Anc}_{\mathbb{H}}(a)$, если и только если $\mathfrak{Re}(b) = 0$ и $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, где $a = a_1i + a_2j + a_3k$, $b = b_1i + b_2j + b_3k$.

Доказательство. Это частный случай леммы 5.8 при $n = 2$, $\gamma_0 = -1$, $\gamma_1 = -1$. □

Теорема 7.2. *Множество вершин $\Gamma_{AC}^E(\mathbb{H})$ – множество классов эквивалентности ненулевых элементов $\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$, граф $\Gamma_{AC}^E(\mathbb{H})$ связен, и его диаметр равен 2.*

Клики соответствуют ортогональным системам без нулевых элементов в $\mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}k$ (с евклидовым скалярным произведением в $\mathbb{R}^3$). Любая такая ортогональная система дополняется до ортогонального базиса, поэтому максимальные клики имеют три вершины.

Доказательство. Это частный случай теоремы 6.3 при $n=2$, $\gamma_0=-1$, $\gamma_1=-1$. □

Лемма 7.3. *Нетривиальные пары антикоммутирующих элементов в $\widehat{\mathbb{C}}$ имеют следующий вид: это $a+a\ell$ и $b-b\ell$, где $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

Доказательство. Это частный случай леммы 5.8 при $n=1$, $\gamma_0=1$. □

Теорема 7.4. $\Gamma^E_{AC}(\widehat{\mathbb{C}})$ *– граф, состоящий из двух вершин $[1+\ell]_{AC}$ и $[1-\ell]_{AC}$, соединённых ребром.*

Доказательство. Это частный случай теоремы 6.3 при $n=1$, $\gamma_0=1$. □

Лемма 7.5. *Пусть $a\in\widehat{\mathbb{H}}$, $a\neq 0$.*

(1) *Если $\mathfrak{Re}(a)=0$, то $\dim(\mathrm{Anc}_{\widehat{\mathbb{H}}}(a))=2$, причём $b\in\mathrm{Anc}_{\widehat{\mathbb{H}}}(a)$, если и только если $\mathfrak{Re}(b)=0$ и $a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3=0$, где $a=a_1i+a_2\ell+a_3\ell i$, $b=b_1i+b_2\ell+b_3\ell i$.*
(2) *Если $\mathfrak{Re}(a)\neq 0$, $n(a)=0$, то $\dim(\mathrm{Anc}_{\widehat{\mathbb{H}}}(a))=1$, $\mathrm{Anc}_{\widehat{\mathbb{H}}}(a)=\mathbb{R}\bar{a}$. Все ненулевые элементы $b\in\mathrm{Anc}_{\widehat{\mathbb{H}}}(a)$ удовлетворяют условию $\mathfrak{Re}(b)\neq 0$.*
(3) *Если $\mathfrak{Re}(a)\neq 0$, $n(a)\neq 0$, то $\mathrm{Anc}_{\widehat{\mathbb{H}}}(a)=0$.*

Доказательство. Это частный случай леммы 5.8 при $n=2$, $\gamma_0=-1$, $\gamma_1=1$. □

Теорема 7.6. *Вершины $\Gamma^E_{AC}(M_2(\mathbb{R}))$ соответствуют ненулевым элементам $M_2(\mathbb{R})$ с нулевым следом либо нулевым определителем, а множества вершин компонент связности этого графа имеют один из двух видов:*

(1) *классы эквивалентности всех ненулевых элементов с нулевым следом, причём диаметр этой компоненты связности равен 2;*
(2) $\{[A]_{AC},[\bar{A}]_{AC}\}$, *где $\mathrm{tr}(A)\neq 0,\det(A)=0$.*

Максимальные клики могут принимать следующий вид:

(i) $\{[A]_{AC},[\bar{A}]_{AC}\}$, *где $\mathrm{tr}(A)\neq 0,\det(A)=0$;*
(ii) $\{[A]_{AC},[B]_{AC},[C]_{AC}\}$, *где*

- A, B, C *линейно независимы и попарно антикоммутируют,*
- $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(C) = 0$*,*
- $\det(A), \det(B), \det(C) \neq 0$*;*

(iii) $\{[A]_{AC}, [B]_{AC}\}$*, где*
- A *и* B *антикоммутируют,*
- $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0$*,*
- $\det(A) = 0$*,* $\det(B) \neq 0$*.*

Доказательство. Это частный случай теоремы 6.3 при $n = 2$, $\gamma_0 = -1$, $\gamma_1 = 1$. □

§8. Связь централизатора и ортогонализатора

Определение 8.1. Ассоциатором тройки элементов $a, b, c \in \mathcal{A}$ называется элемент $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$.

Предложение 8.2. *Ассоциатор – линейная по каждому аргументу функция.*

Доказательство. Этот факт очевидным образом следует из определения алгебры над полем. □

Определение 8.3. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *эластичной*, если для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $(ab)a = a(ba)$.

Лемма 8.4 ([27, теорема 1])**.** $\mathcal{A}_n$ *– эластичная алгебра для любых* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$*.*

Следствие 8.5. *Для любых* $a, b, c \in \mathcal{A}_n$ *выполняется* $[a, b, c] = -[c, b, a]$*.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 = [a + c, b, a + c] &= [a, b, a] + [a, b, c] + [c, b, a] + [c, b, c] \\ &= 0 + [a, b, c] + [c, b, a] + 0 = [a, b, c] + [c, b, a]. \end{aligned}$$ □

Определение 8.6. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *альтернативной*, если для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $a^2 b = a(ab)$ и $ba^2 = (ba)a$.

Лемма 8.7 ([5, стр. 172])**.** *Алгебра* $\mathcal{A}\{\gamma\}$ *является альтернативной, если и только если* $\mathcal{A}$ *– ассоциативная алгебра.*

Следствие 8.8 ([27, стр. 436])**.** $\mathcal{A}_n$ *является альтернативной алгеброй, если и только если* $n \leqslant 3$*.*

Следствие 8.9. *При* $n \leqslant 3$ *ассоциатор на* $\mathcal{A}_n$ *кососимметричен, то есть меняет знак при транспозиции аргументов.*

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 8.5. □

Лемма 8.10. *Пусть* $a \in \mathcal{A}_n$, $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$. *Тогда*

$$C_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{R} \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) \oplus V,$$

где $\dim(V) \leqslant 1$.

Доказательство. Ясно, что $C_{\mathcal{A}_n}(a) = C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$, поэтому требуется показать, что

$$\mathfrak{Im}(C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))) = \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) \oplus V,$$

где $\dim(V) \leqslant 1$. Поскольку, согласно лемме 5.8, $\mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) \subset \mathcal{A}'_n$, то

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) &= C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) \cap \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) \\ &= \mathfrak{Im}(C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))) \cap \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))\end{aligned}$$

и при $b \in \mathfrak{Im}(C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)))$ (а значит, $\mathfrak{Re}(b) = 0$) условие $b \in \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$ задаётся одним линейным уравнением (возможно, тривиальным), то

$$\dim(\mathfrak{Im}(C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)))) - \dim(\mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))) \leqslant 1. \qquad \square$$

Лемма 8.11. *Пусть* $a \in \mathcal{A}_n$, $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$. *Тогда*

(1) *если* $n(\mathfrak{Im}(a)) = 0$ *и, кроме того, либо* $\mathfrak{Im}(a) \in \mathcal{A}_n^0$, *либо* $n \leqslant 3$, *то* $C_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{R} \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$;
(2) *если* $n(\mathfrak{Im}(a)) \neq 0$, *то* $C_{\mathcal{A}_n}(a) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$.

Доказательство. Очевидно, для любого $a \in \mathcal{A}_n$ выполнено включение $C_{\mathcal{A}_n}(a) \supseteq \mathbb{R} + \mathbb{R}a + \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$. Как следует из леммы 5.1, условия $n(\mathfrak{Im}(a)) = 0$ и $\mathfrak{Im}(a) \in \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$ эквивалентны. Поскольку, по условию, $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$, то

(1) если $n(\mathfrak{Im}(a)) = 0$, это включение принимает вид $C_{\mathcal{A}_n}(a) \supseteq \mathbb{R} \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$;
(2) если $n(\mathfrak{Im}(a)) \neq 0$, оно имеет вид $C_{\mathcal{A}_n}(a) \supseteq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$.

Покажем, что в указанных случаях имеет место также и обратное включение. Пусть $b \in C_{\mathcal{A}_n}(a)$, тогда $\mathfrak{Im}(b) \in C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$.

(1) Рассмотрим случай, когда $n(\mathfrak{Im}(a)) = 0$, то есть $(\mathfrak{Im}(a))^2 = 0$.
   - Если $\mathfrak{Im}(a) \in \mathcal{A}_n^0$, то, как следует из леммы 5.8, $\mathfrak{Im}(b) \in \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$, откуда

$$\mathfrak{Im}(b) \in \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) \cap C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) = \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)).$$

- Если $n \leqslant 3$, то, в силу следствия 8.8, можно воспользоваться альтернативностью $\mathcal{A}_n$. Заметим, что

$$\overline{\mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b)} = \overline{\mathfrak{Im}(b)} \cdot \overline{\mathfrak{Im}(a)} = \mathfrak{Im}(b)\mathfrak{Im}(a) = \mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b),$$

то есть $\mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b) = r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$0 = (\mathfrak{Im}(a))^2\mathfrak{Im}(b) = \mathfrak{Im}(a)(\mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b)) = r\mathfrak{Im}(a),$$

поэтому $r = 0$, то есть $\mathfrak{Im}(b) \in \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$.

(2) Пусть теперь $n(\mathfrak{Im}(a)) \neq 0$, то есть $(\mathfrak{Im}(a))^2 \neq 0$. В силу следствия 5.12 существует единственное разложение

$$\mathfrak{Im}(b) = k\mathfrak{Im}(a) + d,$$

где $d \in \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a))$. Заметим, что

$$d = \mathfrak{Im}(b) - k\mathfrak{Im}(a) \in C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)),$$
$$d \in \mathrm{Anc}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) \cap C_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)) = \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)),$$
$$\mathfrak{Im}(b) \in \mathbb{R}\mathfrak{Im}(a) \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{Im}(a)).$$

□

Пример 8.12. Если $\mathcal{A}_n$ – алгебра главной последовательности Кэли–Диксона, то любой элемент $a \in \mathcal{A}_n$, $\mathfrak{Im}(a) \neq 0$, удовлетворяет условию леммы 8.11.

Лемма 8.13 ([1], [22, лемма 1.2])**.** *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная алгебра. Тогда для любых $x, y, z, w \in \mathcal{A}$ имеет место равенство*

$$x[y, z, w] + [x, y, z]w = [xy, z, w] - [x, yz, w] + [x, y, zw].$$

Лемма 8.14 ([27, лемма 2])**.** *Для любых $x, y, z \in \mathcal{A}_n$ выполнено*

$$\mathfrak{Re}([x, y, z]) = 0.$$

Предложение 8.15. *Пусть*

$$a \in \mathcal{A}_4\{-1, -1, -1, 1\} = \mathbb{O}\{1\} = \widehat{\mathbb{S}}, \quad n(\mathfrak{Im}(a)) = 0.$$

Тогда справедливо $C_{\widehat{\mathbb{S}}}(a) = \mathbb{R} \oplus \mathrm{O}_{\widehat{\mathbb{S}}}(\mathfrak{Im}(a))$.

Доказательство. Предположим, что $b \in C_{\widehat{\mathbb{S}}}(a) \setminus (\mathbb{R} \oplus \mathrm{O}_{\widehat{\mathbb{S}}}(\mathfrak{Im}(a)))$. Тогда $\mathfrak{Im}(b) \in C_{\widehat{\mathbb{S}}}(a)$, поэтому

$$\overline{\mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b)} = \overline{\mathfrak{Im}(b)} \cdot \overline{\mathfrak{Im}(a)} = \mathfrak{Im}(b)\mathfrak{Im}(a) = \mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b),$$

то есть $\mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b) = r \in \mathbb{R}$. Поскольку $\mathfrak{Im}(b) \notin \mathrm{O}_{\widehat{\mathbb{S}}}(\mathfrak{Im}(a))$, то $r \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $r = 1$.

Обозначим $\mathfrak{Im}(a) = (a_1, a_2)$, $\mathfrak{Im}(b) = (b_1, b_2)$, где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{O}$, $\mathfrak{Re}(a_1) = \mathfrak{Re}(b_1) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1, a_2)^2 = (a_1^2 + \bar{a_2}a_2, a_2a_1 + a_2\bar{a_1}) = (a_1^2 + n(a_2), 0), \\ (1, 0) &= (a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1 + \bar{b_2}a_2, b_2a_1 + a_2\bar{b_1}) \\ &= (a_1b_1 + \bar{b_2}a_2, b_2a_1 - a_2b_1). \end{aligned}$$

Используя равенства $b_2a_1 = a_2b_1$ и $n(a_2) = -a_1^2 \in \mathbb{R}$, а также альтернативность $\mathbb{O}$, получаем

$$\begin{aligned} n(a_2)b_2 &= -b_2a_1^2 = -(b_2a_1)a_1 = -(a_2b_1)a_1, \\ n(a_2)\bar{b_2} &= \overline{n(a_2)b_2} = \overline{-(a_2b_1)a_1} = -\bar{a_1}(\bar{b_1}\bar{a_2}) = -a_1(b_1\bar{a_2}). \end{aligned}$$

Умножив равенство $1 = a_1b_1 + \bar{b_2}a_2$ справа на $\bar{a_2}$ и подставив выражение для $n(a_2)\bar{b_2}$, получим

$$\begin{aligned} \bar{a_2} = (a_1b_1)\bar{a_2} + (\bar{b_2}a_2)\bar{a_2} = (a_1b_1)\bar{a_2} + \bar{b_2}(a_2\bar{a_2}) &= (a_1b_1)\bar{a_2} + n(a_2)\bar{b_2} \\ &= (a_1b_1)\bar{a_2} - a_1(b_1\bar{a_2}) = [a_1, b_1, \bar{a_2}]. \end{aligned}$$

В силу леммы 8.14, $\mathfrak{Re}(\bar{a_2}) = 0$, поэтому $\bar{a_2} = -a_2$ и $a_2 = [a_1, b_1, a_2]$. Применим лемму 8.14 для $x = w = a_2, y = a_1, z = b_1$, используя кососимметричность ассоциатора на $\mathbb{O}$:

$$\begin{aligned} -2n(a_2) = 2a_2^2 &= a_2[a_1, b_1, a_2] + [a_2, a_1, b_1]a_2 \\ &= [a_2a_1, b_1, a_2] - [a_2, a_1b_1, a_2] + [a_2, a_1, b_1a_2]. \end{aligned}$$

Действительная часть правой части равенства равна 0, поэтому $n(a_2) = 0$, а значит, и $n(a_1) = 0$, откуда $a_1 = a_2 = 0$, $\mathfrak{Im}(a)\mathfrak{Im}(b) = 0$. Противоречие. □

Покажем существенность дополнительных условий в пункте (1) леммы 8.11. Для этого нам понадобится следующее обозначение и некоторые утверждения, непосредственно из него следующие.

Обозначение 8.16. Пусть для некоторых $a, b \in \mathcal{A}_n$ выполнено $ba = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\mathfrak{Re}(a) = 0$ и $n(a) = \gamma_n n(b) \neq 0$.

(1) Положим $c = (a, b), d = (0, b) \in \mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n\{\gamma_n\}$.
(2) Если, кроме того, $\gamma_n > 0$ и $ab = 0$, то для любого $r \in \mathbb{R}$, $|r| < 1$, обозначим $c(r) = \big(a, r(\sqrt{\gamma_n})^{-1}a + \sqrt{1 - r^2}b\big) \in \mathcal{A}_{n+1}$.

Предложение 8.17. *Пусть для $a, b \in \mathcal{A}_n$ выполнено $ba = 0$, $a \neq 0$, $\mathfrak{Re}(a) = 0$. Тогда условия $ab = 0$ и $\mathfrak{Re}(b) = 0$ эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку $a \neq 0$, это утверждение следует из следующего равенства:

$$ab = \overline{\bar{b}\bar{a}} = \overline{-(2\mathfrak{Re}(b) - b)a} = \overline{-2\mathfrak{Re}(b)a + ba} = -2\mathfrak{Re}(b)\bar{a} = 2\mathfrak{Re}(b)a. \qquad \square$$

Предложение 8.18. *Пусть* $a, b, c, c(r)$ *введены в обозначении* 8.16. *Тогда*

(1) $\mathfrak{Re}(c) = 0$, $n(c) = 0$*;*
(2) $\mathfrak{Re}(c(r)) = 0$, $n(c(r)) = 0$.

Доказательство. (1) В силу леммы 3.20, выполнено

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(c) &= \mathfrak{Re}((a,b)) = \mathfrak{Re}(a) = 0, \\ n(c) &= n((a,b)) = n(a) - \gamma_n n(b) = 0. \end{aligned}$$

(2) Очевидно, $\mathfrak{Re}\big(r(\sqrt{\gamma_n})^{-1}a + \sqrt{1-r^2}b\big) = 0$, $\mathfrak{Re}(c(r)) = 0$. Проверим, что $n(c(r)) = 0$:

$$\begin{aligned} n(c(r)) &= n(a) - \gamma_n n\left(\frac{r}{\sqrt{\gamma_n}}a + \sqrt{1-r^2}b\right) \\ &= \gamma_n\left(n(b) + \left(\frac{r}{\sqrt{\gamma_n}}a + \sqrt{1-r^2}b\right)^2\right) \\ &= \gamma_n\left(n(b) + \frac{r^2}{\gamma_n}a^2 + \frac{r\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{\gamma_n}}(ab+ba) + (1-r^2)b^2\right) \\ &= \gamma_n\big(n(b) - r^2 n(b) - (1-r^2)n(b)\big) = 0. \qquad \square \end{aligned}$$

Предложение 8.19. *Пусть* $a, b, c, c(r), d$ *введены в обозначении* 8.16. *Тогда*

(1) $C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$*;*
(2) $C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c(r)) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_{n+1}}(c(r))$.

Доказательство. (1) Нетрудно видеть, что

$$cd = (a,b)(0,b) = (a0 + \gamma_n \bar{b}b, ba + b\bar{0}) = \gamma_n n(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Кроме того, $\mathfrak{Re}(c) = \mathfrak{Re}(d) = 0$, поэтому $dc = \bar{d}\bar{c} = \overline{cd} = cd$. Таким образом, $d \in C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$. Однако $d \notin \mathbb{R} \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$, поскольку $d \notin \mathrm{O}_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$ и для любого $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполнено $\mathfrak{Im}(c(d-r)) = -rc \neq 0$. В силу леммы 8.10, это означает, что $C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_{n+1}}(c)$.

(2) Покажем, что $c(r)d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Действительно,

$$c(r)d = \left(a, \frac{r}{\sqrt{\gamma_n}}a + \sqrt{1-r^2}b\right)(0,b)$$

$$= \left(a0 + \gamma_n \bar{b}\left(\frac{r}{\sqrt{\gamma_n}}a + \sqrt{1-r^2}b\right), ba + \left(\frac{r}{\sqrt{\gamma_n}}a + \sqrt{1-r^2}b\right)\bar{0}\right)$$

$$= \big(-r\sqrt{\gamma_n}ba + \gamma_n\sqrt{1-r^2}\bar{b}b, ba\big) = \gamma_n\sqrt{1-r^2}n(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Доказательство того факта, что $C_{\mathcal{A}_{n+1}}(c(r)) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}d \oplus \mathrm{O}_{\mathcal{A}_{n+1}}(c(r))$, проводится аналогично предыдущему пункту. □

Пример 8.20. Обоим условиям, приведенным в обозначении 8.16, удовлетворяют, например,

$$a = (e_1, e_4), \quad b = (e_2, e_7) \in \mathbb{S} = \mathcal{A}_4\{-1,-1,-1,-1\} \quad \text{при } \gamma_4 = 1.$$

§9. Заключение

Особенный интерес представляет изучение графов коммутативности вещественных алгебр Кэли–Диксона, однако уже при $n = 4$ возникают сложности. В отношении графа коммутативности алгебры седенионов имеется следующая гипотеза.

Гипотеза 9.1. Элементы $\mathbb{S}$, мнимая часть которых является делителем нуля, образуют в $\Gamma_C(\mathbb{S})$ одну компоненту связности с диаметром 3.

В случае алгебр главной последовательности Кэли–Диксона, лемма 8.11 полностью описывает связь между централизатором и ортогонализатором произвольного элемента. Кроме того, очевидно, что $\Gamma_O(\mathcal{A})$ всегда является подграфом в $\Gamma_C(\mathcal{A})$. В связи с этим возникает следующий вопрос.

Вопрос 9.2. Какова связь между $\Gamma_O(\mathcal{A}_n)$ и $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ для алгебры главной последовательности Кэли–Диксона $\mathcal{A}_n$? Для произвольной вещественной алгебры Кэли–Диксона?

Замечание 9.3. Недавно авторам стало известно, что в работе [28] изучены графы ортогональности конечномерных формально действительных йордановых алгебр. В частности, определены их кликовые числа и доказано, что две конечномерные формально действительные йордановы алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их графы ортогональности.

Стоит отметить, что из любой вещественной алгебры Кэли–Диксона $(\mathcal{A}_n, +, \cdot)$ можно получить Йорданову алгебру $(\mathcal{A}_n, +, \circ)$ с операцией $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Тогда граф антикоммутативности алгебры $(\mathcal{A}_n, +, \cdot)$ изоморфен графу ортогональности алгебры $(\mathcal{A}_n, +, \circ)$. При этом алгебра $(\mathcal{A}_n, +, \circ)$ является формально действительной, если и только если $(\mathcal{A}_n, +, \cdot)$ — либо алгебра главной последовательности Кэли-Диксона, либо алгебра контркомплексных чисел. Тем самым, рассматриваемые в [28] и настоящей работе классы алгебр не совпадают, но нетривиально пересекаются. Непосредственная проверка показывает, что результаты, полученные для классов алгебр из пересечения, согласуются.

Список литературы

1. J. Adem, *Construction of some normed maps.* — Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **20**, No. 2 (1975), 59–75.
2. S. Akbari, H. Bidkhori, A. Mohammadian, *Commuting graphs of matrix algebras.* — Commun. Algebra **36**, No. 11 (2008), 4020–4031.
3. S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian, *On commuting graphs of semisimple rings.* — Linear Algebra Appl. **390** (2004), 345–355.
4. S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, *On the diameters of commuting graphs.* — Linear Algebra Appl. **418**, No. 1 (2006), 161–176.
5. A. A. Albert, *Qyadratic forms permitting composition.* — Ann. Math. **43** (1942), 161–177.
6. D. F. Anderson, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring.* — J. Algebra **217**, No. 2 (1999), 434–447.
7. L. Babai, Á. Seress, *On the diameter of permutation groups.* — Eur. J. Combin. **13**:4 (1992), 231–243.
8. J. C. Baez, *The octonions.* — Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), 145–205.
9. B. R. Bakhadly, *Orthogonality graph of the algebra of upper triangular matrices.* — Oper. Matrices **11**, No. 2 (2017), 455–463.
10. Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 49–80.
11. I. Beck, *Coloring of commuatitive rings.* — J. Algebra **116**, No. 1 (1988), 208–226.
12. I. Bozic, Z. Petrovic, *Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings.* — Commun. Algebra **37**, No. 4 (2009), 1186–1192.
13. K. Carmody, *Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions.* — Appl. Math. Comput. **28** (1988), 47–72.
14. K. Carmody, *Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions—further results.* — Appl. Math. Comput. **84** (1997), 27–48.
15. R. E. Cawagas, *On the structure and zero divisors of the Cayley–Dickson sedenion algebra.* — Disc. Math. **24** (2004), 251–265.
16. G. Dolinar, A. E. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak, *Commuting graphs and extremal centralizers.* — Ars Math. Contemp. **7**, No. 2 (2014), 453–459.
17. W. Greub, *Linear Algebra,* Springer, New York, 1975.

18. А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Графы ортогональности матриц над телами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **463** (2017), 81–93.
19. K. Imaeda, M. Imaeda, *Sedenions: Algebra and analysis.* — Appl. Math. Comput. **115**, No. 2–3 (2000), 77–88.
20. R. P. C. de Marrais, *The* 42 *assessors and the box-kites they fly: diagonal axis-pair systems of zero-divisors in the sedenions'*16 *dimensions.* — http://arXiv.org/abs/math.GM/0011260 (2000).
21. K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras,* Springer-Verlag, New York, 2004.
22. G. Moreno, *The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers.* — Bol. Soc. Mat. Mex. (tercera serie) **4**, No. 1 (1998), 13–28.
23. G. Moreno, *Alternative elements in the Cayley–Dickson algebras.* — Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebanski, 2006, 333–346.
24. G. Moreno, *Constructing zero divisors in the higher dimensional Cayley–Dickson algebras.* — https://arxiv.org/abs/math.RA/0512517 (2005).
25. S. B. Mulay, *Cycles and symmetries of zero-divisors.* — Commun. Algebra **30** (2002), 3533–3558.
26. S. P. Redmond, *The zero-divisor graph of a noncommutative ring.* — Int. J. Commut. Rings **1**, No. 4 (2002), 203–211.
27. R. D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley–Dickson process.* — Amer. J. Math. **76**, No. 2 (1954), 435–446.
28. G. Dolinar, B. Kuzma, N. Stopar, *The orthogonality relation classifies formally real simple Jordan algebras.* Preprint.

Guterman A. E., Zhilina S. A. Relation graphs of real Cayley–Dickson algebras.

The paper presents anticommutativity conditions for elements of arbitrary real Cayley–Dickson algebras, based on which the anticommutativity graphs on equivalence classes of such algebras are classified. Under some additional conditions on the algebras considered, an expression for the centralizer of an element in terms of its orthogonalizer is obtained. Conditions sufficient for this interrelation to hold are provided. Also examples of real Cayley–Dickson algebras in which the centralizer and orthogonalizer of an element are not interrelated in this way are considered.

Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова;
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный, Россия

E-mail: guterman@list.ru

Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова

E-mail: s.a.zhilina@gmail.com

Поступило 1 ноября 2018 г.