Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, М. А. Даффнер

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ, СОХРАНЯЮЩИЕ ПЕРМАНЕНТ

§1. Введение

Теория линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, множества и отношения, активно исследуется на протяжении последних более чем ста лет, начиная с работы Фробениуса [10] о характеризации отображений, сохраняющих определитель, а именно, таких линейных биективных отображений T, что $\det(T(A)) = \det(A)$ для всех $A \in M_n(\mathbb{C})$. Преобразование $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ называется стандартным, если существуют такие обратимые матрицы $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, что $T(X) = MXN$ для всех $X \in M_n(\mathbb{C})$ или $T(X) = MX^TN$ для всех $X \in M_n(\mathbb{C})$. Фробениусу удалось доказать, что линейные биективные отображения, сохраняющие определитель, исчерпываются стандартными отображениями с дополнительным условием $\det(MN) = 1$ и только ими. В 1925 Шур [17] обобщил теорему Фробениуса. Он заменил условие инвариантности определителя на условие инвариантности всех миноров некоторого фиксированного порядка r. Приведем формулировку его теоремы, принадлежащую Маркусу и Мэю [14]. Для произвольной матрицы $X \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ рассматривается r-ая матрица дополнений $C_r(X) \in M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbb{C})$, состоящая из миноров матрицы X порядка r, упорядоченных лексикографически по строкам и столбцам.

Теорема 1.1. ([17, Шур]) (см. также [14]). *Пусть $T : M_{m\,n}(\mathbf{C}) \to M_{m\,n}(\mathbf{C})$ – биективное линейное преобразование. Для заданного параметра r, $2 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$, предположим, что существует такое биективное линейное преобразование $S : M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbb{C}) \to M_{\binom{m}{r},\binom{n}{r}}(\mathbb{C})$, что для любой матрицы $X \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ имеет место равенство*

$$C_r(T(X)) = S(C_r(X)).$$

Ключевые слова: определитель, перманент, имманант, линейные отображения, кососимметрические матрицы.

Работа первого и второго авторов поддержана грантом РНФ 17-11-01124.

Тогда преобразование T является стандартным.

Теорема Фробениуса имеет сложное комбинаторное доказательство. В 1949 Дьедонне [9] предложил новый подход к классификации биективных линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, базирующийся на основной теореме проективной геометрии. Дьедонне получил стандартную характеризацию биективных линейных отображений, сохраняющих вырожденные матрицы над произвольным полем.

Теорема 1.2 ([9, Дьедонне]). *Пусть $\mathbf{F}$ – произвольное поле и T – обратимое линейное отображение на $M_n(\mathbf{F})$ такое, что из* $\det X = 0$ *следует* $\det T(X) = 0$. *Тогда отображение T является стандартным.*

С этих теорем началось столетие интенсивного и плодотворного изучения фробениусовых эндоморфизмов, т.е. линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, свойства или отношения. Особенно интенсивно данный круг вопросов исследовался в течение последних 50 лет. Наиболее полное описание известных результатов можно найти в обзорах [11, 16].

Изучение отображений, сохраняющих перманент, восходит к работе Маркуса и Мэя [15], см. также [1]. На пространстве симметрических матриц такие отображения были охарактеризованы Лимом и Онгом в [13]. Соответствующий вопрос про детерминант был рассмотрен в [12] Лимом. В работах [6–8] изучены линейные отображения, сохраняющие и переводящие друг в друга различные иммананты на пространстве симметрических матриц.

Отображения пространства кососимметрических матриц

$$Q_n(\mathbb{C}) = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) |\ a_{ij} = -a_{ji} \text{ при } i < j,\ a_{ii} = 0\},$$

где $\mathbb{C}$ обозначает поле комплексных чисел, сохраняющие иммананты, также изучались ранее. В работе [3] Као и Танга охарактеризованы линейные отображения, сохраняющие определитель. В статье Даффнер и Куэльо [5] охарактеризованы линейные отображения, сохраняющие имманант d_χ в случае $\chi \notin \{1, \epsilon, [n-1, 1], [2, 1^{n-2}]\}$.

Однако в этом случае искомые отображения имеют более сложный вид, и еще много вопросов пока остаются открытыми.

В настоящей работе мы охарактеризовали линейные отображения пространства кососимметрических матриц, сохраняющие перманент, для произвольного четного $n > 4$. Заметим, что поскольку перманент кососимметрической матрицы нечетного порядка всегда равняется 0, при нечетном n все отображения $Q_n(\mathbb{C})$ в себя его сохраняют.

В нашей работе будут использоваться следующие обозначения. Через S_n обозначается группа перестановок на множестве $\{1,\ldots,n\}$, $M_n(\mathbb{C})$ – пространство всех $n\times n$ матриц с элементами из $\mathbb{C}$, $|X|$ – мощность множества X. Через I_n обозначим единичную $n\times n$ матрицу. Как обычно, A^T обозначает транспонированную матрицу A. Если $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, то $A\circ B$ обозначает адамарово (поэлементное) произведение A и B.

Пусть $\{E_{ij}\}$ – стандартный базис $M_n(\mathbb{C})$, где матрица E_{ij} содержит одну 1 на (i,j)-ом месте и 0 на всех остальных. Через U_{ij} обозначим матрицу $U_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$, где $i<j$. Очевидно, что множество $\{U_{ij}\}_{1<i<j<n}$ является базисом линейного пространства $Q_n(\mathbb{C})$.

Для фиксированной перестановки $\sigma\in S_n$ через $P(\sigma)=(p_{ij})$ обозначим матрицу перестановки, где

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } j=\sigma^{-1}(i),\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Наша статья организована следующим образом. §2 содержит предварительные сведения и некоторые вспомогательные утверждения. В §3 доказан основной результат при $n>4$. В §4 рассмотрен случай $n=4$.

§2. Вспомогательные факты

Определение 2.1. Пусть $\chi: S_n\to\mathbb{C}$ – неприводимый характер группы S_n. Имманант, ассоциированный с χ, – это функция $d_\chi: M_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$, определенная равенством

$$d_\chi(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\chi(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

для любой матрицы $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$.

Доказательство следующей леммы получается непосредственной проверкой.

Лемма 2.2. 1. *Если $\chi=\epsilon$ – знакопеременный характер S_n, то d_χ является определителем матрицы. Если $\chi=1$ – тождественный характер S_n, то d_χ совпадает с перманентом матрицы.*

2. *Пусть* $A_n \subset S_n$ *– подгруппа индекса 2, состоящая из четных перестановок,* $P_n = \{\sigma \in S_n : \sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r,\ \sigma_i \in A_n$ *для всех* $i \in \{1, \dots, r\}\}$. *Если* $A \in Q_n(\mathbb{C})$, *то*

$$d_\chi(A) = \sum_{\sigma \in P_n} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

3. *Для произвольной перестановки* $\sigma \in S_n$ *обозначим* $\mathrm{fix}(\sigma) = |\{\mathrm{i} : \sigma(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\}|$. *Пусть* $n \geqslant 2$. *Если* $\chi = [n-1, 1]$, *то* $\chi(\sigma) = \mathrm{fix}(\sigma) - 1$. *В частности, если* $A \in Q_n(\mathbb{C})$, *то* $d_\chi(A) = -\mathrm{per}(A)$. (Действительно, $d_\chi(A) = \sum\limits_{\sigma \in P_n} \chi(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, и для любой $\sigma \in P_n$ выполнено $\mathrm{fix}(\sigma) = 0$, а значит $\mathrm{fix}(\sigma) - 1 = -1$ для всех $\sigma \in P_n$.)

4. *Если* n *четное,* $n > 2$, $\chi = [n-1, 1]$, *то линейное отображение* $T : Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$ *удовлетворяет условию*

$$d_\chi(T(A)) = d_\chi(A)$$

для всех $A \in Q_n(\mathbb{C})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{per}(T(A)) = \mathrm{per}(A) \text{ для всех } A \in Q_n(\mathbb{C}).$$

Следующая лемма аналогична утверждению [5, лемма 5.1]. Для полноты приведем ее доказательство.

Лемма 2.3. *Если* n *четное и линейное отображение* $T : Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$ *удовлетворяет условию*

$$\mathrm{per}(T(A)) = \mathrm{per}(A)$$

для всех $A \in Q_n(\mathbb{C})$, *то отображение* T *является невырожденным.*

Доказательство. При $n = 2$ результат может быть получен непосредственным вычислением.

Предположим, что существует матрица $A = (a_{ij}) \in Q_n(\mathbb{C})$, $n > 2$, для которой $T(A) = 0$. Тогда $\mathrm{per}(\alpha A + B) = \mathrm{per}(T(\alpha A + B)) = \mathrm{per}(T(B)) = \mathrm{per}(B)$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ и всех $B = (b_{ij}) \in Q_n(\mathbb{C})$. Пусть x – переменная над $\mathbb{C}$. Тогда можно заключить, что для всех кососимметрических матриц с коэффициентами из $\mathbb{C}[x]$ многочлены $\mathrm{per}(xA + B)$ и $\mathrm{per}(B)$ равны.

Рассмотрим $B = U_{34} + U_{56} + \cdots + U_{n-1n}$. Поскольку у B есть нулевая строка, $\mathrm{per}(B) = 0$. Отсюда следует, что $\mathrm{per}(xA + B) = 0$, в частности, коэффициент при x^2 многочлена $\mathrm{per}(xA + B)$ нулевой.

С другой стороны, рассмотрим непосредственное вычисление этого коэффициента из разложения $\mathrm{per}(xA+B) = \sum_{\pi\in S_n}\prod_{t=1}^{n}(xa_{t\pi(t)} + b_{t\pi(t)})$. Матрица B выбрана таким образом, что ненулевой коэффициент при x^2 возникает только для перестановки $\pi = \pi_0 = (12)(34)\dots(n-1n)$, а для перестановки π_0 этот коэффициент равняется $(-1)^r a_{12}^2$, где $n = 2r$. Тогда коэффициент при x^2 многочлена $\mathrm{per}(xA+B)$ равняется $(-1)^r a_{12}^2$, откуда $a_{12} = 0$. Более того, так как $\mathrm{per}(P(\rho)XP(\rho)^{-1}) = \mathrm{per}(X)$ для всех перестановок $\rho \in S_n$, получаем, что $a_{ij} = 0$ для всех i, j. Отсюда $A = 0$. □

При $n = 2$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть $T : Q_2(\mathbb{C}) \to Q_2(\mathbb{C})$ – линейное отображение. Тогда T удовлетворяет условию $\mathrm{per}(T(A)) = \mathrm{per}(A)$ для всех $A \in Q_2(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $T(A) = A$ или $T(A) = A^T$ для всех $A \in Q_2(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Так как $Q_2(\mathbb{C})$ – пространство размерности 1, то для любого линейного отображения T существует такой элемент $a \in \mathbb{C}$, что $T(U_{12}) = aU_{12}$. Так как $\mathrm{per}(T(U_{12})) = \mathrm{per}(U_{12})$, то $a = 1$ или $a = -1$.

Легко видеть, что оба приведенных отображения сохраняют перманент. □

Рассмотрим множество A_1, определенное следующим равенством:

$$A_1 = \{A \in Q_n(\mathbb{C}) |\ \deg\ \mathrm{per}(xA + B) \leqslant 2 \text{ для всех } B \in Q_n\}.$$

Лемма 2.5 ([5, лемма 5.3])**.** *Пусть n четное. Если линейное отображение $T : Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$ сохраняет перманент, то $T(A_1) \subset A_1$. Более того, если $A \in A_1$, то для всех $\sigma \in S_n$ имеем $P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) \in A_1$.*

Охарактеризуем множество A_1.

Лемма 2.6. *Пусть $n \geqslant 4$ является четным. Если $A = (a_{ij}) \in A_1$, то для всех попарно различных $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, \dots, n\}$ выполняется равенство*

$$a_{i_1i_2}^2 a_{i_3i_4} + a_{i_1i_2}(a_{i_1i_3}a_{i_2i_4} - a_{i_1i_4}a_{i_2i_3}) = 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим множество различных переменных

$$\Theta = \{y_{ij} | 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Пусть $Y = [Y_{ij}]$ – $n \times n$ кососимметрическая матрица, определяемая равенством $Y_{ij} = y_{ij}$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $Y_{ii} = 0$ и $Y_{ji} = -y_{ij}$ $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Для произвольной матрицы $A \in Q_n(\mathbb{C})$ вычислим многочлен $\operatorname{per}(xA + Y) \in \mathbb{C}[x, \Theta]$:

$$\operatorname{per}(xA+Y) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} (xA+Y)_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} (xa_{i\sigma(i)} + y_{i\sigma(i)}).$$

Рассматривая многочлен

$$\prod_{i=1}^{n}(xa_{i\sigma(i)}+y_{i\sigma(i)}) = (xa_{1\sigma(1)}+y_{1\sigma(1)})(xa_{2\sigma(2)}+y_{2\sigma(2)})\cdots(xa_{n\sigma(n)}+y_{n\sigma(n)})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} y_{i\sigma(i)} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)} \prod_{i\neq j, i=1}^{n} y_{i\sigma(i)}\right)x + \cdots + \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right)x^n,$$

можем заключить, что

$$\operatorname{per}(xA+Y) = f_0(A) + f_1(A)x + \cdots + f_n(A)x^n,$$

где $f_n(A) = \operatorname{per}(A)$ и для $k < n$ многочлен $f_k(A) \in \mathbb{C}[\Theta]$ либо является нулевым, либо является однородным многочленом степени $n-k$.

Рассмотрим $\sigma = (12)(34)\cdots(n-1\,n)$, $\tau = (1234)(56)\cdots(n-1\,n)$, $\rho = (1342)(56)\cdots(n-1\,n)$ и обратные к τ и ρ перестановки.

Выпишем сумму слагаемых из выражения для $\operatorname{per}(xA+Y)$, которые отвечают выбранным перестановкам:

$$\begin{aligned}\Sigma &= (-1)^r(xa_{12}+y_{12})^2(xa_{34}+y_{34})^2(xa_{56}+y_{56})^2\cdots(xa_{n-1\,n}+y_{n-1\,n})^2\\ &+ (-1)^r 2(xa_{12}+y_{12})(xa_{23}+y_{23})(xa_{34}+y_{34})(xa_{41}+y_{41})(xa_{56}+y_{56})^2\\ &\cdots(xa_{n-1\,n}+y_{n-1\,n})^2 + (-1)^r 2(xa_{13}+y_{13})(xa_{34}+y_{34})(xa_{42}+y_{42})\\ &\times(xa_{21}+y_{21})(xa_{56}+y_{56})^2\cdots(xa_{n-1\,n}+y_{n-1\,n})^2.\end{aligned}$$

Здесь коэффициент два перед вторым и третьим слагаемыми возникает за счет рассмотрения перестановки и ее обратной.

Среди слагаемых, составляющих $\operatorname{per}(xA+Y)$, есть скалярное кратное монома x^3p, где $p = y_{34}y_{56}^2y_{78}^2\cdots y_{n-1\,n}^2$. Тогда коэффициент K при мономе p в многочлене $f_3(A)$, т.е., коэффициент при x^3p, является суммой некоторых коэффициентов слагаемых, отвечающих перестановкам σ, τ, τ^{-1}, ρ, ρ^{-1} и исключительно им. Таким образом, с одной стороны, K равняется сумме некоторых коэффициентов Σ, а именно,

$$K = 2(-1)^r a_{12}^2 a_{34} + 2(-1)^{r-2} a_{12}a_{23}a_{41} + 2(-1)^{r-2} a_{21}a_{13}a_{42}$$

$$= 2(-1)^r(a_{12}^2 a_{34} - a_{12}a_{23}a_{14} + a_{12}a_{13}a_{24}).$$

Действительно, вид p позволяет легко заключить, что перестановки, отличные от σ, τ, τ^{-1}, ρ, ρ^{-1}, вносят нулевой вклад в коэффициент при мономе px^3, а вклад, соответствующий этим перестановкам, в точности равняется K. С другой стороны, так как $A \in A_1$, то $f_3(A) = 0$. Следовательно, $K = 0$. Таким образом мы получили требуемый результат в случае $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Для произвольных попарно различных $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, \ldots, n\}$ утверждение следует из леммы 2.5. $\square$

В следующих результатах используются подпространства V_i пространства $Q_n(\mathbb{C})$, $i = 1, \ldots, n$, и подпространства $W_{(i,j,k)}$, где индексы $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ попарно различны, а подпространства определены следующим образом:

$$\begin{aligned} V_i &= \langle U_{ij} |\, j = 1, \ldots, n, j \neq i \rangle, \\ W_{(i,j,k)} &= \langle U_{ij}, U_{ik}, U_{kj} \rangle. \end{aligned}$$

Подпространства V_i состоят из кососимметрических $n \times n$ матриц, таких что все ненулевые элементы каждой матрицы лежат в i-ой строке и i-ом столбце. Таким образом, если $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ попарно различны, то

$$W_{(i,j,k)} = (V_i + V_j) \cap (V_j + V_k) \cap (V_i + V_k).$$

§3. Линейные отображения, сохраняющие перманент при $n > 4$

Лемма 3.1. *Пусть n четное, $n \geqslant 4$, и $A \in Q_n(\mathbb{C})$. Тогда $A \in A_1$ в том и только в том случае, когда $A \in V_i$, или $A \in W_{(i,j,k)}$, или существует перестановка $\sigma \in S_n$, такая что*

$$P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{13} & 0 & 0 & a_{34} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a_{24} & -a_{34} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Основным инструментом доказательства этого результата является формула (1) из леммы 2.6. Общая ситуация распадается на следующие три случая.

Случай 1: в матрице A есть строка с одним ненулевым коэффициентом и нет строк с более, чем одним, ненулевым коэффициентом.

С точностью до перестановки строк и столбцов можно предположить, что $a_{12} \neq 0$. Рассмотрим $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 \neq i_4$ и $i_3, i_4 \geqslant 3$. Тогда из формулы (1) следует равенство $a_{12}^2 a_{i_3 i_4} = 0$, откуда $a_{i_3 i_4} = 0$. Поскольку каждая строка матрицы A содержит не более одного ненулевого элемента, получаем $A = U_{12} \in W_{(1,2,3)}$.

Случай 2: в матрице A есть строка с тремя или более ненулевыми элементами.

Тогда существует такая перестановка $\sigma \in S_n$, что первая строка матрицы $P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) = (a_{ij})$ содержит не менее трех ненулевых элементов. Более того, мы можем выбрать σ таким образом, что $a_{12} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$ и $a_{14} \neq 0$. Тогда аналогично доказанному в случае 1 получаем, что $a_{i_3 i_4} = 0$ для всех $i_3, i_4 \geqslant 5$.

Также из формулы (1) леммы 2.6 следуют равенства:

$$\begin{aligned}
a_{12}^2 a_{34} + a_{12}(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) &= 0,\\
a_{13}^2 a_{24} + a_{13}(a_{12}a_{34} - a_{14}a_{32}) &= 0,\\
a_{14}^2 a_{23} + a_{14}(a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42}) &= 0,
\end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}
a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} &= 0,\\
a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34} + a_{14}a_{23} &= 0,\\
a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} &= 0.
\end{aligned}$$

Вычитая попарно последние равенства и используя условие рассматриваемого случая $a_{12}a_{13}a_{14} \neq 0$, получаем $a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0$.

Если $a_{1i} \neq 0$ для некоторого $i > 4$, то аналогично имеем $a_{2i} = a_{3i} = 0$. В случае $a_{1i} = 0$, применяя формулу (1) для наборов $(1, 2, 3, i)$ и $(1, i, 2, 3)$, получаем $a_{12}a_{3i} + a_{13}a_{2i} = 0$ и $a_{13}a_{2i} - a_{12}a_{3i} = 0$, откуда $a_{2i} = a_{3i} = 0$. Аналогично, $a_{4i} = 0$.

Таким образом, получаем включение $P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) \in V_1$.

Случай 3: существует строка A, содержащая два ненулевых коэффициента, и нет строк с тремя или более ненулевыми коэффициентами.

В этом случае существует такая перестановка $\sigma \in S_n$, что у матрицы $P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) = (a_{ij})$ два ненулевых элемента расположены в первой строке, и эти элементы $a_{12} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$. По условию рассматриваемого случая, отсюда следует, что

$$a_{1i} = 0 \text{ для всех } i \geqslant 4. \tag{2}$$

В силу формулы (1), для всех $i \geqslant 4$ выполняются соотношения:

$$a_{12}^2 a_{3i} + a_{12}(a_{13}a_{2i} - a_{1i}a_{23}) = 0,$$
$$a_{13}^2 a_{2i} + a_{13}(a_{12}a_{3i} - a_{1i}a_{32}) = 0.$$

Подставляя $a_{1i} = 0$, получаем равенство

$$a_{13}a_{2i} + a_{12}a_{3i} = 0. \tag{3}$$

Применяя равенство (1) к четверке индексов $(1, 2, j, k)$, где $j, k > 4$, получим, что $a_{jk} = 0$ для всех $j, k > 4$, поскольку $a_{1j} = a_{1k} = 0$ в силу (2).

Предположим сперва, что $a_{23} \neq 0$ и $a_{2i} \neq 0$ для некоторого $i > 3$. Тогда во второй строке есть три ненулевых элемента, поскольку $a_{12} \neq 0$, что противоречит условиям этого случая.

Если для некоторого $i > 3$ выполняется $a_{2i} = 0$ и $a_{23} \neq 0$, то из (3) следует $a_{3i} = 0$. Тогда $P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) = U_{12} + U_{13} + U_{23} \in W_{(1,2,3)}$.

Таким образом, далее рассматриваем случай $a_{23} = 0$ и $a_{2i} \neq 0$. С точностью до перестановки столбцов считаем $i = 4$. Тогда

$$P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{13} & 0 & 0 & a_{34} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{24} & -a_{34} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34} = 0$. □

Лемма 3.2. *Пусть n четное, $n \geqslant 6$, и линейное отображение*

$$T : Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$$

сохраняет перманент. Тогда существует перестановка $\sigma \in S_n$, такая что $T(V_i) = V_{\sigma(i)}$ для $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Так как $V_i \subset A_1$, то, по лемме 2.5, получаем $T(V_i) \subset A_1$. Отображение T невырожденное, следовательно, $\dim T(V_i) = \dim V_i = n-1$. Если $T(V_i)$ имеет вид (2) или (3) из формулировки леммы 3.1, то $\dim T(V_i) \leqslant 4$. Последнее невозможно, так как $\dim T(V_i) \geqslant 5$. Результат следует из леммы 3.1 и невырожденности отображения T. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть n четное, $n \geqslant 6$, и линейное отображение*

$$T : Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$$

удовлетворяет равенству

$$\mathrm{per}(T(A)) = \mathrm{per}(A)$$

для всех $A \in Q_n(\mathbb{C})$. Тогда существуют перестановка $\sigma \in S_n$ и константы c_{pq} такие, что для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ имеет место равенство $T(U_{ij}) = c_{\sigma(i)\sigma(j)} U_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

Доказательство. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим подпространство $V_i = \langle U_{ij} | j \in \{1, \dots, n\}, i < j \rangle$. По лемме 3.2, существует перестановка $\sigma \in S_n$, такая что $T(V_i) = V_{\sigma(i)}$.

Так как $U_{ij} \in V_i \cap V_j$, то $T(U_{ij}) \in V_{\sigma(i)} \cap V_{\sigma(j)} = \langle U_{\sigma(i)\sigma(j)} \rangle$. Таким образом, существуют ненулевые константы c_{pq} такие, что $T(U_{ij}) = c_{\sigma(i)\sigma(j)} U_{\sigma(i)\sigma(j)}$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть n четное, $n \geqslant 6$, и линейное отображение*

$$T : Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$$

удовлетворяет условию

$$\mathrm{per}(T(A)) = \mathrm{per}(A) \text{ для всех } A \in Q_n(\mathbb{C}).$$

Тогда существуют перестановка $\pi \in S_n$ и симметрическая матрица $C \in M_n(\mathbb{C})$, такие что

$$T(A) = C \circ P(\pi) A P(\pi^{-1})$$

для всех $A \in Q_n(\mathbb{C})$.

Доказательство. Пусть линейное отображение

$$T : Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$$

удовлетворяет условию

$$\mathrm{per}(T(A)) = \mathrm{per}(A) \text{ для всех } A \in Q_n(\mathbb{C}).$$

По лемме 3.3, существуют $\sigma \in S_n$ и константы c_{pq} такие, что $T(U_{ij}) = c_{\sigma(i)\sigma(j)} U_{\sigma(i)\sigma(j)}$ для всех различных $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Так как отображение T невырожденное, все эти константы ненулевые. Положим $c_{ii} = 0$ и рассмотрим матрицу $C = (c_{kp}) \in M_n(\mathbb{C})$.

Для всех различных i, j имеет место равенство

$$c_{\sigma(j)\sigma(i)}U_{\sigma(j)\sigma(i)} = T(U_{ji}) = -T(U_{ij}) = -c_{\sigma(i)\sigma(j)}U_{\sigma(i)\sigma(j)} \\ = c_{\sigma(i)\sigma(j)}U_{\sigma(j)\sigma(i)}.$$

Следовательно, $c_{\sigma(j)\sigma(i)} = c_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Получаем, что матрица C симметрическая. Используя условие $T(U_{ij}) = c_{\sigma(i)\sigma(j)}U_{\sigma(i)\sigma(j)}$ и линейность T, получаем

$$T(A) = C \circ P(\pi)AP(\pi^{-1}) \text{ для любой } A \in Q_n(\mathbb{C}). \qquad \square$$

Замечание 3.5. Заметим, что, поскольку перманент кососимметрической матрицы нечетного порядка всегда равняется 0, при нечетных n все отображения $Q_n(\mathbb{C})$ в себя его сохраняют.

§4. Случай кососимметрических 4×4 матриц

Пусть $n = 4$. Рассмотрим линейное отображение

$$T_0 : Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C}),$$

определенное равенством

$$T_0(A) = C \circ P(\pi)AP(\pi^{-1}) \text{ для всех } A \in Q_4(\mathbb{C}), \tag{4}$$

где $\pi \in S_4$ и $C \in M_4(\mathbb{C})$ – симметрическая матрица, удовлетворяющая условию

$$\prod_{t=1}^{4} c_{t\rho(t)} = 1 \text{ для всех } \rho \in P_4. \tag{5}$$

Лемма 4.1. *Отображение T_0 является линейным и сохраняет перманент, а именно,* $\operatorname{per} T_0(A) = \operatorname{per}(A)$ *для всех $A \in Q_4(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Результат получается прямыми вычислениями с учетом того, что T_0 линейно в силу своего определения, а матрица C удовлетворяет условию (5). $\square$

Следующий пример показывает, что условие (4) не является необходимым, и при $n = 4$ существуют другие типы отображений, сохраняющие перманент.

Пример 4.2. Пусть линейное отображение

$$T_1 : Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$$

определено равенством

$$T_1(U_{13}) = U_{24}, \quad T_1(U_{24}) = U_{13}$$

и пусть для всех (i, j) таких, что $i < j$, $(i, j) \neq (1, 3)$ и $(i, j) \neq (2, 4)$, выполнено

$$T_1(U_{ij}) = U_{ij}.$$

Тогда

$$\operatorname{per}(T_1(A)) = \operatorname{per}(A) \text{ для всех } A \in Q_4(\mathbb{C}).$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение T_1 не может быть записано в форме (4) для некоторой матрицы C и перестановки π.

Характеризация таких отображений в случае $n = 4$ – открытый вопрос.

Проблема 4.3. *Охарактеризовать линейные отображения $Q_n(\mathbb{C})$, сохраняющие перманент, для $n = 4$.*

Авторы благодарны Д. М. Барченкову за интересные обсуждения в ходе работы над этой статьей.

Список литературы

1. P. Botta, *On the conversion of the determinant into the permanent.* — Canad. Math. Bull. **11** (1968), 31–34.
2. C. Cao, X. Tang, *Determinant preserving transformations on symmetric matrix spaces.* — Electr. J. Linear Algebra **11** (2004), 205–211.
3. C. Cao, X. Tang, *Linear maps preserving rank* 2 on the space of alternate matrices and their applications. — Int. J. Math. Sci. **61–64** (2004), 3409–3417.
4. M. P. Coelho, *Linear preservers of the permanent on symmetric matrices.* — Linear Multilinear Algebra **41** (1996), 1–8.
5. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *Linear preservers of immanants on skew-symmetric matrices.* — Linear Algebra Appl. **436** (2012), 2536–2553.
6. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *Linear preservers of immanants on symmetric matrices.* — Linear Algebra Appl. **255** (1997), 314–334.
7. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *On the relation between the determinant and the permanent on symmetric matrices.* — Linear Multilinear Algebra **51**:2 (2003), 127–136.
8. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *On the conversion of an immanant into another on symmetric matrices.* — Linear Multilinear Algebra **51**:2 (2003), 137–145.
9. J. Dieudonné, *Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables.* — Arch. Math. **1** (1949), 282–287.

10. G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.* — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.
11. C.-K. Li, N.-K. Tsing, *Linear preserver problems: a brief introduction and some special techniques. Directions in matrix theory.* — Linear Algebra Appl. **162/164** (1992), 217–235.
12. M. H. Lim, *Linear transformations on symmetric matrices.* — Linear Multilinear Algebra **7** (1979), 47–57.
13. M. H. Lim, Hock Ong, *Linear transformations on symmetric matrices that preserve the permanent.* — Linear Algebra App. **21**:2 (1978), 143–151.
14. M. Marcus, F. May, *On a theorem of I. Schur conserning matrix transformations.* — Arch. Math. **11** (1960), 27–30.
15. M. Marcus, F. May, *The permanent function.* — Can. J. Math. **14** (1962), 177–189.
16. S. Pierce and others, *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–119.
17. I. Schur, *Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie.* — Akad. Wiss. Berlin, S.-Ber. Preuß. (1925), 454–463.
18. V. Tan and F. Wang, *On determinant preserver problems.* — Linear Algebra Appl. **369** (2003), 311–317.

Budrevich M. V., Guterman A. E., Duffner M. A. Permanent preserving linear transformations of skew-symmetric matrices.

Let $Q_n(\mathbb{C})$ denote the space of all skew-symmetric $n \times n$ matrices over the complex field $\mathbb{C}$. The paper characterizes the linear mappings $T\colon Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$ that satisfy the condition $\mathrm{per}(T(A)) = \mathrm{per}(A)$ for all $A \in Q_n(\mathbb{C})$ and an arbitrary $n > 4$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Московский физико-технический институт (Университет),
Долгопрудный, 141701 Россия
E-mail: mbudrevich@yandex.ru
guterman@list.ru

Поступило 6 ноября 2018 г.

Университет Лиссабона, Лиссабон, Португалия, 1700-016
E-mail: mamonteiro@fc.ul.pt