Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина

ИНДЕКСЫ ИМПРИМИТИВНОСТИ ТЕМПОРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ ПОЛУГРУППЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Начнём с необходимых определений и фактов. Неотрицательная матрица A порядка n называется неприводимой, если для любых индексов i,j из множества $N = \{1,\dots,n\}$ существует такой показатель l, что (i,j)-элемент матрицы A^l положителен. Неприводимая матрица примитивна, если некоторая её степень содержит лишь положительные элементы. Спектральный радиус $\rho(A)$ неотрицательной неприводимой матрицы A является её простым собственным значением. Количество $r = r(A)$ собственных значений, равных $\rho(A)$ по модулю, называется индексом импримитивности матрицы A. По известной теореме Фробениуса, неприводимая неотрицательная матрица при $r = 1$ примитивна, а при $r \geqslant 2$ перестановочно подобна матрице вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

с квадратными диагональными блоками, причём в матрице

$$A^r = A_{11}^{(r)} \oplus A_{22}^{(r)} \oplus \dots \oplus A_{rr}^{(r)} \tag{2}$$

диагональные блоки примитивны (см, например, [1]). Это значит, что при достаточно больших l все ненулевые блоки в матрицах A^l положительны.

Для сокращения записи введём следующие обозначения:

P_n – полугруппа всех неотрицательных матриц порядка n,

Ключевые слова: неприводимая неотрицательная матрица, форма Фробениуса, индекс импримитивности.

Работа первого автора выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект No. 1.12878.2018/12.1.

$\mathbb{P}_n$ – полугруппа всех неотрицательных матриц порядка n без нулевых строк и столбцов,

$\overline{P}_n$ – полугруппа всех неотрицательных матриц порядка n без нулевых строк.

Определение неприводимости неотрицательной матрицы естественным образом переносится на мультипликативные полугруппы неотрицательных матриц. Полугруппа $\mathcal{P} \subseteq P_n$ называется неприводимой, если для любых $i, j \in N$ в $\mathcal{P}$ найдётся матрица с положительным (i,j)-элементом. Легко видеть, что неприводимость неотрицательной матрицы A эквивалентна неприводимости полугруппы $\langle A \rangle$, состоящей из матриц A^l $(l = 1, 2, \ldots)$.

Матрица (1) является примером блочно-мономиальной матрицы. В общем случае матрица

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k1} & A_{k2} & \ldots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

с квадратными диагональными блоками называется блочно-мономиальной, если она содержит k ненулевых блоков – по одному в каждой блочной строке и в каждом блочном столбце.

Недавно Протасов и Войнов [2] дали широкое обобщение теоремы Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц: любая неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ либо содержит положительную матрицу, либо посредством одного перестановочного подобия все матрицы полугруппы приводятся к блочно-мономиальной форме, причём некоторые матрицы полугруппы приводятся к блочно-диагональной форме с положительными диагональными блоками (полную формулировку см. в теореме 2.1).

Ключевую роль в теореме Протасова–Войнова играет понятие индекса импримитивности полугруппы неотрицательных матриц. Опишем это понятие способом, несколько отличным от оригинального, но удобным для дальнейшего изложения. Скажем, что индексы i и j из множества $N = \{1, \ldots, n\}$ совместимы полугруппой $\mathcal{P} \subseteq P_n$, если для некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$ и некоторого индекса $l \in N$ выполняются неравенства $(A)_{il} > 0$ и $(A)_{jl} > 0$. Индексом импримитивности полугруппы $\mathcal{P}$ называется максимальное число $r(\mathcal{P})$ индексов, любые два из которых несовместимы полугруппой $\mathcal{P}$. Это понятие является естественным обобщением понятия индекса импримитивности, известного из теории Перрона–Фробениуса, поскольку индекс импримитивности полугруппы, порожденной неприводимой неотрицательной матрицей A, совпадает с $r(A)$ (см. [2]).

Теорема Протасова–Войнова вызывает естественный интерес к полугруппам неотрицательных блочно-мономиальных матриц общего вида.

В работе [3] введено понятие темпоральной компоненты полугруппы неотрицательных блочно-мономиальных матриц. Напомним его. Пусть $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ – полугруппа блочно-мономиальных матриц блочного порядка k. Множество матриц из $\mathcal{P}$, у которых (s,s)-блок ненулевой, образует подполугруппу в $\mathcal{P}$. Следовательно, множество $\mathcal{P}_s$ диагональных (s,s)-блоков матриц этой полугруппы тоже образует мультипликативную полугруппу матриц. Эта полугруппа называется s-й темпоральной компонентой полугруппы $\mathcal{P}$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$.

Например, матрица $A \in \overline{P}_n$ типа (1) порождает полугруппу $\langle A \rangle$ блочно-мономиальных матриц. Темпоральные компоненты полугруппы $\langle A \rangle$ порождаются диагональными блоками матрицы (2). Сами эти блоки называются темпоральными компонентами матрицы A.

Основные результаты статьи относятся к полугруппам блочно-мономиальных матриц без нулевых строк. Для таких полугрупп доказано (теорема 3.1), что индекс импримитивности полугруппы есть сумма индексов импримитивности её темпоральных компонент. При этом, если полугруппа блочно-неприводима, то индексы импримитивности всех темпоральных компонент равны (теорема 4.1). В заключение приводятся применения теорем 3.1 и 4.1 к полугруппам стохастических матриц.

§2. О полугруппах, преобразуемых к блочно-мономиальному виду

Здесь мы приведём две теоремы, показывающие, что преобразуемость матриц полугруппы к блочно-мономиальному виду посредством перестановочного подобия имеет место для широкого класса полугрупп неотрицательных матриц.

Пусть $A \in \overline{P}_n$, $L \subseteq N$ – произвольное подмножество N. Положим, что $LA = \{j | (A)_{ij} > 0, i \in L\}$. Тем самым матрица A определяет отображение на множестве подмножеств N. Теперь пусть на множестве N задано некоторое разбиение $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$. Скажем, что матрица A действует на разбиении π как отображение, если для всякого класса π_s найдётся класс π_t такой, что $\pi_s A \subseteq \pi_t$. Если $A \in \mathbb{P}_n$, то, как легко видеть, любое вложение $\pi_s A \subseteq \pi_t$ на самом деле является равенством: $\pi_s A = \pi_t$. Если отображение, определяемое матрицей A, биективно, то будем говорить, следуя [2], что A действует на разбиении π как перестановка.

Предположим, что матрица $A \in \overline{P}_n$ действует на разбиении $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ как перестановка. Тогда подходящим перестановочным подобием можно преобразовать A к блочно-мономиальному виду, при котором в блочной строке, отвечающей классу π_s, ненулевой блок стоит в столбце, отвечающем π_t, если $\pi_s A \subseteq \pi_t$. Когда это преобразование выполнено, то будем говорить, что матрица приведена к форме, согласованной с разбиением π. Ясно, что преобразование матрицы $A \in \overline{P}_n$ к блочно-мономиальному виду посредством перестановочного подобия возможно только в том случае, когда на некотором разбиении множества N матрица A действует как перестановка.

Например, матрица $A \in \mathbb{P}_n$ перестановочно подобна матрице типа (1), если существует такое разбиение $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ (называемое циклическим), что $\pi_1 A = \pi_2, \pi_2 A = \pi_3$ и т. д., наконец, $\pi_k A = \pi_1$. В частности, существование формы Фробениуса для неприводимой матрицы A с индексом импримитивности r эквивалентно существованию циклического разбиения на r классов.

Если все матрицы полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ действуют на разбиении π как перестановки, то все они одним перестановочным подобием преобразуются к блочно-мономиальному виду, согласованному с π. Когда это преобразование выполнено, то будем говорить, что полугруппа $\mathcal{P}$ находится в форме, согласованной с разбиением π.

Согласно теореме Протасова–Войнова [2], для полугрупп неотрицательных матриц существует аналог формы Фробениуса. Приведём эту теорему в несколько расширенной версии, учитывающей замечания 1 и 2 из [4].

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ – неприводимая полугруппа с индексом импримитивности r. Тогда*

1) *при* $r = 1$ *полугруппа* $\mathcal{P}$ *примитивна, т.е. содержит положительную матрицу;*

2) *если* $r \geqslant 2$, *то существует разбиение множества* N *на* r *подмножеств, называемое каноническим, на котором матрицы полугруппы* $\mathcal{P}$ *действуют как перестановки;*

3) *каноническое разбиение является подразбиением любого разбиения множества* N, *на котором матрицы из* $\mathcal{P}$ *действуют как перестановки;*

4) *если* $r \geqslant 2$ *и полугруппа* $\mathcal{P}$ *находится в форме, согласованной с каноническим разбиением, то* $\mathcal{P}$ *содержит идеал, составленный из матриц, в которых все ненулевые блоки положительны.*

Класс полугрупп, для которых верна теорема 2.1, можно немного расширить. Полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ называется вполне приводимой, если она неприводима или все матрицы из $\mathcal{P}$ одним перестановочным подобием могут быть преобразованы к блочно-диагональному виду

$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_\sigma, \tag{3}$$

где полугруппы $\mathcal{A}_s = \{A_s\}$ неприводимы ($s = 1, \ldots, \sigma$). Как доказано в [5], утверждения теоремы 2.1 верны для любой вполне приводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$. При этом дальнейшее ослабление условий теоремы невозможно: если для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ с индексом импримитивности r выполняются свойства 1–4, то $\mathcal{P}$ вполне приводима.

Однако, заменив в утверждениях 1 и 4 свойство положительности матриц на свойство стягиваемости, можно получить более широкий класс полугрупп, приводимых к блочно-мономиальному виду. Напомним, что неотрицательная прямоугольная матрица называется стягивающей, если любые две её строки содержат положительные элементы в некотором общем столбце. Однострочная ненулевая матрица считается стягивающей.

В [6] доказано, что бинарное отношение совместимости на множестве индексов N, определяемое неприводимой полугруппой $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$, является отношением эквивалентности, причём разбиение на классы совместимости совпадает с каноническим разбиением множества N.

В более общем случае, для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$, отношение совместимости на множестве N рефлексивно и симметрично, но не всегда транзитивно. Вместе с тем нетрудно привести примеры приводимых полугрупп с матрицами, включающими нулевые столбцы, для которых отношение совместимости транзитивно и, следовательно, определяет разбиение множества N на классы совместимости. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ – полугруппа с индексом импримитивности r. Предположим, что отношение $\mathcal{P}$-совместимости индексов транзитивно. Тогда*

1) *при $r = 1$ полугруппа $\mathcal{P}$ содержит стягивающую матрицу;*

2) *при $r \geqslant 2$ матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ действуют на классах совместимости как перестановки;*

3) *разбиение на классы совместимости является подразбиением любого разбиения множества N, на котором матрицы из $\mathcal{P}$ действуют как перестановки;*

4) *если полугруппа $\mathcal{P}$ находится в форме, согласованной с классами совместимости, то $\mathcal{P}$ содержит идеал, составленный из матриц, в которых все ненулевые блоки являются стягивающими матрицами.*

Доказательство. Утверждение 1) доказано в [4, предложение 9]. Доказательство 2) содержится в [4, предложение 4]; свойство 4) доказано в [6, предложение 4]. Доказательство 3) можно найти в замечании 1 из [4], однако мы приведём здесь более простое рассуждение. Пусть π – разбиение множества N на k классов (k-разбиение), на котором матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ действуют как перестановки. Пусть индексы i и j лежат в разных π-классах. Поскольку матрицы полугруппы действуют на разбиении инъективно, то A-последователи i и A-последователи j для всех $A \in \mathcal{P}$ тоже лежат в разных π-классах. Поэтому i и j несовместимы. Следовательно, совместимые индексы обязаны лежать в одном π-классе, что и доказывает утверждение 3). □

§3. Об индексах импримитивности темпоральных компонент

Пусть A – неотрицательная $(p\times q)$-матрица. Будем говорить, что индексы i и j $(1 \leqslant i, j \leqslant p)$ совместимы матрицей A, если для некоторого индекса l $(1 \leqslant l \leqslant q)$ одновременно $(A)_{il} > 0$ и $(A)_{jl} > 0$. Максимальное число $\tau(A)$ индексов, любые два из которых несовместимы матрицей A, называется рангом стягиваемости матрицы A. Если A – стягивающая матрица, то полагаем, что $\tau(A) = 1$.

Из определений величин $\tau(A)$, $r(A)$ и $r(\mathcal{P})$ видно, что для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$
$$\tau(A) \geqslant r(A) \geqslant r(\mathcal{P}). \tag{4}$$

Нам потребуются следующие свойства ранга стягиваемости, доказанные в [7].

Свойство 1. Пусть A, B – прямоугольные неотрицательные матрицы без нулевых строк. Если произведение AB существует, то
$$\tau(AB) \leqslant \min(\tau(A), \tau(B)). \tag{5}$$

Это утверждение сформулировано в [7] для квадратных матриц, но доказательство верно и для прямоугольных матриц.

Свойство 2. Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ множество матриц
$$I(\mathcal{P}) = \{A \in \mathcal{P} \mid \tau(A) = \min_{B \in \mathcal{P}} \tau(B)\} \tag{6}$$
является идеалом.

Свойство 3. Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ справедливо равенство
$$r(\mathcal{P}) = \min_{A \in \mathcal{P}} \tau(A). \tag{7}$$

Свойство 4. $A \in I(\mathcal{P}) \;\Leftrightarrow\; \tau(A) = r(\mathcal{P})$.

Дальнейшие утверждения этого параграфа относятся к полугруппам, матрицы которых действуют как перестановки на некотором разбиении $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ множества N. Будем предполагать, что матрицы приведены к блочно-мономиальному виду, согласованному с разбиением π. Обозначим количества элементов в π-классах через $n_1, \ldots, n_k$ соответственно ($n_1 + \cdots + n_k = n$). Эти числа определяют размеры диагональных блоков и, следовательно, полностью задают разбиение матриц на блоки. Заметим, что число n_s равно порядку матриц в темпоральной компоненте $\mathcal{P}_s$ ($s = 1, \ldots, k$). Обозначим через $B(n_1, \ldots, n_k)$ подполугруппу полугруппы P_n, состоящую из всех блочно-мономиальных матриц с разбиением на блоки, которое определяется числами в скобках. Обозначения $\overline{B}(n_1, \ldots, n_k)$ и $\mathbb{B}(n_1, \ldots, n_k)$ имеют аналогичный смысл. Ясно, что
$$\mathbb{B}(n_1, \ldots, n_k) \subset \overline{B}(n_1, \ldots, n_k) \subset B(n_1, \ldots, n_k).$$

В дальнейшем, желая сделать формулы более лаконичными, мы будем писать просто A_s вместо A_{ss}. Это, конечно, не значит, что блок A_{st} не может быть диагональным.

Для блочно-мономиальных матриц свойство 1 может быть детализировано следующим образом: ранг стягиваемости блока, стоящего в s-й блочной строке матрицы A при умножении на матрицу B может лишь уменьшиться. Точнее, имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть* $A, B \in \overline{P}(n_1, \dots, n_k)$, A_{st}, C_{su} *– ненулевые подматрицы, стоящие в* s*-й строке матриц* A *и* $C = AB$. *Тогда* $\tau(A_{st}) \geqslant \tau(C_{su})$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что $C_{su} = A_{st}B_{tu}$. Осталось применить к этому равенству свойство 1. □

Лемма 3.2. *Пусть* $A \in \overline{P}(n_1, \dots, n_k)$ *– матрица с ненулевыми блоками* $A_{1t_1}, \dots, A_{kt_k}$. *Пусть* m *– некоторый (например, минимальный) показатель, при котором матрица* $C = A^m$ *является блочно-диагональной:* $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_k$. *Тогда*

$$\tau(A_{1t_1}) \geqslant \tau(C_1), \quad \dots, \quad \tau(A_{kt_k}) \geqslant \tau(C_k). \tag{8}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно положить $B = A^{m-1}$ и применить лемму 3.1. □

В следующей лемме доказывается, что блочно-диагональная матрица из полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \dots, n_k)$ принадлежит идеалу $I(\mathcal{P})$ в точности тогда, когда её диагональные блоки принадлежат идеалам соответствующих темпоральных компонент. В силу свойств 3 и 4, это утверждение эквивалентно тому, что минимальное значение индекса стягиваемости в полугруппе $\mathcal{P}$ достигается на множестве блочно-диагональных матриц, причём достигается в точности тогда, когда её диагональные блоки имеют минимальную стягиваемость в своих темпоральных компонентах.

Лемма 3.3. *В полугруппе* $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \dots, n_k)$ *для любой блочно-диагональной матрицы* $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ *следующие условия равносильны:*

1) $A \in I(\mathcal{P})$;
2) $A_t \in I(\mathcal{P}_t)$, $t = 1, \dots, k$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Вначале докажем, что существует блочно-диагональная матрица $D \in \mathcal{P}$, для которой выполняются условия 2). Для любого $t = 1, \dots, k$ существует такая блочно–диагональная матрица $C^{(t)} = C_1^{(t)} \oplus \dots \oplus C_k^{(t)}$, что $C_t^{(t)} \in I(\mathcal{P}_t)$. Действительно, рассмотрим любую матрицу $B^{(t)} \in I(\mathcal{P})$, у которой $B_t^{(t)} \in I(\mathcal{P}_t)$. Пусть m – показатель, при котором $(B^{(t)})^m$ – блочно-диагональная матрица. Тогда положим $C^{(t)} = (B^{(t)})^m$. Ясно, что $C_t^{(t)} = (B_t^{(t)})^m$ и $C_t^{(t)} \in I(\mathcal{P}_t)$ как степень матрицы, принадлежащей $I(\mathcal{P}_t)$. Произведение $D = C^{(1)} \cdots C^{(k)}$ – тоже блочно-диагональная матрица: $D = D_1 \oplus \cdots \oplus D_k$. Ясно, что $D_t = C_t^{(1)} \cdots C_t^{(k)}$. В этом произведении все сомножители принадлежат $\mathcal{P}_t$, причём $C_t^{(t)} \in I(\mathcal{P}_t)$, значит, и $D_t \in I(\mathcal{P}_t)$. Согласно свойствам 3 и 4,

$$\tau(D_1) = \min_{G\in\mathcal{P}_1} \tau(G) = r(\mathcal{P}_1), \quad \ldots, \quad \tau(D_k) = \min_{G\in\mathcal{P}_k} \tau(G) = r(\mathcal{P}_k), \tag{9}$$

т.е. для D выполняются условия 2).

Теперь рассмотрим матрицу $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, принадлежащую $I(\mathcal{P})$, для которой, вследствие этого,

$$\tau(A) = \min_{G\in\mathcal{P}} \tau(G) = r(\mathcal{P}). \tag{10}$$

Ввиду равенств (9), имеем:

$$r(\mathcal{P}_1) = \tau(D_1) \leqslant \tau(A_1), \quad \ldots, \quad r(\mathcal{P}_k) = \tau(D_k) \leqslant \tau(A_k). \tag{11}$$

Предположим, что одно из неравенств в соотношениях (11) является строгим. Тогда

$$\tau(A) = \tau(A_1) + \cdots + \tau(A_k) > \tau(D_1) + \cdots + \tau(D_k) = \tau(D),$$

что противоречит равенствам (10). Итак, все нестрогие неравенства в (11) являются равенствами, то есть выполняются условия 2).

$2 \Rightarrow 1$. Для любой блочно-диагональной матрицы $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, принадлежащей $\mathcal{P}$, имеем

$$\tau(A) = \tau(A_1) + \cdots + \tau(A_k). \tag{12}$$

Пусть каждое из слагаемых в (12) принимает минимальное значение в своей темпоральной компоненте, то есть выполняются условия 2):

$$\tau(A_1) = \min_{G\in\mathcal{P}_1} \tau(G) = r(\mathcal{P}_1), \quad \ldots, \quad \tau(A_k) = \min_{G\in\mathcal{P}_k} \tau(G) = r(\mathcal{P}_k).$$

Тогда сумма этих слагаемых тоже получает наименьшее значение:

$$\tau(A) = \min_{G\in\mathcal{P}} \tau(G) = r(\mathcal{P}).$$

Следовательно, $A \in I(\mathcal{P})$. $\square$

Теорема 3.1. *Индекс импримитивности произвольной полугруппы* $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$ *равен сумме индексов импримитивности её темпоральных компонент:*

$$r(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P}_1) + \cdots + r(\mathcal{P}_k). \tag{13}$$

Доказательство. В силу леммы 3.3, для матрицы $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, принадлежащей $I(\mathcal{P})$, имеем:

$$\tau(A) = r(\mathcal{P}),\ \tau(A_1) = r(\mathcal{P}_1), \quad \ldots, \quad \tau(A_k) = r(\mathcal{P}_k).$$

Из этих равенств и равенства (12) следует утверждение теоремы, т.е. равенство (13). □

Следующая теорема показывает, что индексы импримитивности темпоральных компонент определяются по любой из матриц, принадлежащих идеалу $I(\mathcal{P})$.

Теорема 3.2. *Для всех матриц, принадлежащих идеалу* $I(\mathcal{P})$ *полугруппы* $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$, *ранг стягиваемости ненулевого блока* t*-й блочной строки* ($t = 1, \ldots, k$) *принимает одно и то же значение. Оно равно индексу импримитивности* t*-й темпоральной компоненты полугруппы* $\mathcal{P}$.

Доказательство. Пусть A – любая матрица из $I(\mathcal{P})$. Обозначим её ненулевые блоки через $A_{1t_1}, \ldots, A_{kt_k}$. Для матрицы A и блочно-диагональной матрицы $A^m = C = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$, согласно лемме 3.2 и свойству 3, имеем неравенства

$$\tau(A_{1t_1}) \geqslant \tau(C_1) \geqslant r(\mathcal{P}_1), \quad \ldots, \quad \tau(A_{1t_k}) \geqslant \tau(C_k) \geqslant r(\mathcal{P}_k). \tag{14}$$

Если хотя бы одно из неравенств в (14) является строгим, то, ввиду равенства

$$\tau(A) = \tau(A_{1t_1}) + \cdots + \tau(A_{1t_k})$$

и вследствие теоремы 3.1, получим:

$$\tau(A) > r(\mathcal{P}_1) + \cdots + r(\mathcal{P}_k) = r(\mathcal{P}).$$

Но это противоречит свойству 4, согласно которому $\tau(A) = r(\mathcal{P})$ для всех $A \in I(\mathcal{P})$. Итак, все нестрогие неравенства в (14) являются равенствами; следовательно,

$$\tau(A_{1t_1}) = r(\mathcal{P}_1), \quad \ldots, \quad \tau(A_{kt_1}) = r(\mathcal{P}_k),$$

что и требовалось доказать. □

§4. Блочно-неприводимые полугруппы

Полугруппу $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$ будем называть блочно-неприводимой, если для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ полугруппа содержит матрицу с ненулевым (s,t)-блоком. Нетрудно заметить, что всякая неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$ блочно-неприводима, но обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть $M \in P_n$ – конечное семейство матриц. Как известно [2], неприводимость полугруппы $\langle M \rangle$, состоящей из всевозможных произведений матриц из M, эквивалентна неприводимости единственной матрицы, полученной суммированием всех матриц из M. Вопрос о блочной неприводимости полугруппы $\langle M \rangle$, порождённой конечным семейством $M \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$, тоже сводится к вопросу о неприводимости единственной матрицы. Определим матрицу $G = (g_{st})$ порядка k следующим образом: $g_{st} = 1$, если некоторая матрица $A \in M$ имеет ненулевой (s,t)-блок. В противном случае положим $g_{st} = 0$. Блочная неприводимость полугруппы $\mathcal{M}$ эквивалентна неприводимости матрицы $G = (g_{st})$. Мы опустим простое доказательство этого факта.

Теорема 4.1. *Если полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$ блочно-неприводима, то индексы импримитивности всех её темпоральных компонент совпадают.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}_s$ и $\mathcal{P}_t$ – любые темпоральные компоненты полугруппы $\mathcal{P}$. Пусть матрица $A \in \mathcal{P}$ такова, что $\tau(A_s) = r(\mathcal{P}_s)$. Из условия теоремы следует, что существуют матрицы $B, C \in \mathcal{P}$ такие, что $B_{ts} \neq 0, C_{st} \neq 0$. Тогда для матрицы $D = BAC$ имеем

$$D_t = B_{ts} A_s C_{st} \in \mathcal{P}_t.$$

Пользуясь неравенствами (4) и (5), можем записать

$$r(\mathcal{P}_t) \leqslant \tau(D_t) \leqslant \min\{\tau(B_{ts}), \tau(A_s), \tau(C_{st})\} \leqslant \tau(A_s) = r(\mathcal{P}_s).$$

Итак, для индексов импримитивности любых двух темпоральных компонент $\mathcal{P}_s$ и $\mathcal{P}_t$ верно неравенство $r(\mathcal{P}_t) \leqslant r(\mathcal{P}_s)$. Это значит, что индексы всех компонент равны. □

Следствие 4.1. *Пусть полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$ блочно-неприводима. Тогда*

1) *если $r(\mathcal{P}) = r$, то индекс импримитивности любой темпоральной компоненты равен r/k;*

2) *если индекс импримитивности некоторой темпоральной компоненты равен* r_0, *то индекс импримитивности* $\mathcal{P}$ *равен* $r = kr_0$;

3) *индекс импримитивности блочно-неприводимой полугруппы* $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$ *равен* k *тогда и только тогда, когда индекс импримитивности некоторой темпоральной компоненты равен единице.*

Доказательство. Все утверждения легко следуют из теорем 3.1 и 4.1. Мы докажем только первое из них. По теореме 3.1 имеем $r = r(\mathcal{P}_1) + \cdots + r(\mathcal{P}_k)$, а по теореме 4.1 все слагаемые в этой сумме равны. Следовательно, каждое из них равно r/k. $\square$

Заметим, что, в силу теоремы 2.2, индекс импримитивности темпоральной компоненты полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1, \ldots, n_k)$ равен единице в точности тогда, когда эта компонента содержит стягивающую матрицу.

Следующие две теоремы доказаны в [3].

Теорема 4.2. *Если полугруппа* $\mathcal{P} \subseteq P(n_1, \ldots, n_k)$ *неприводима, то все её темпоральные компоненты неприводимы.*

Теорема 4.3. *Если некоторая темпоральная компонента блочно-неприводимой полугруппы* $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}(n_1, \ldots, n_k)$ *неприводима, то полугруппа* $\mathcal{P}$ *неприводима.*

Соединяя теоремы 4.2 и 4.3 со следствием 4.1, получаем

Следствие 4.2. *Пусть полугруппа* $\mathcal{P}$ *лежит в* $\mathbb{P}(n_1, \ldots, n_k)$. *Тогда*

1) *если* $\mathcal{P}$ *неприводима и* $r(\mathcal{P}) = r$, *то любая темпоральная компонента неприводима и имеет индекс импримитивности* r/k;

2) *если некоторая темпоральная компонента неприводима и её индекс импримитивности равен* r_0, *то* $\mathcal{P}$ *неприводима и* $r(\mathcal{P}) = kr_0$;

3) *полугруппа* $\mathcal{P}$ *неприводима с индексом импримитивности* k *тогда и только тогда, когда некоторая темпоральная компонента неприводима и её индекс импримитивности равен единице.*

Заметим, что, в силу теоремы 2.1, индекс импримитивности неприводимой темпоральной компоненты равен единице в точности тогда, когда эта компонента содержит положительную матрицу.

Следующая теорема содержится в [8, 9].

Теорема 4.4 [8, 9]**.** *Пусть* A – *неотрицательная матрица без нулевых строк и столбцов в форме* (1). *Тогда* A *неприводима с индексом импримитивности* r *тогда и только тогда, когда произведение*

$A_{12}A_{23}\cdots A_{k1}$ *является неприводимой матрицей с индексом импримитивности* r/k. *В частности,* A *неприводима с индексом импримитивности* k *в точности тогда, когда матрица* $A_{12}A_{23}\cdots A_{k1}$ *примитивна.*

Легко вычислить, что $A_{12}A_{23}\cdots A_{k1} = A_{11}^{(r)}$ – см. формулу (2). Матрица $A_{11}^{(r)}$ порождает первую темпоральную компоненту полугруппы $\langle A\rangle$. Как уже отмечалось выше, неприводимость неотрицательной матрицы эквивалентна неприводимости порождаемой ею полугруппы. Отсюда вытекает, что теорема 4.4 – частный случай следствия 4.2.

§5. Приложения к полугруппам стохастических матриц

В теории цепей Маркова важную роль играют стохастические матрицы, т.е. неотрицательные матрицы, у которых сумма элементов каждой строки равна единице. Как известно, спектральный радиус стохастической матрицы равен единице. Обозначим через $\mu(A)$ число собственных значений стохастической матрицы A, равных единице по модулю (с учетом их кратностей). Для полугруппы $\mathcal{P}$ стохастических матриц положим, что

$$\mu(\mathcal{P}) = \min_{A\in\mathcal{P}} \mu(A).$$

В работе [2] (см. также [7]) доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. Для любой полугруппы $\mathcal{P}$ стохастических матриц

$$\mu(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P}).$$

Таким образом, в любой полугруппе стохастических матриц существует матрица, у которой число собственных значений, равных единице по модулю, равно индексу импримитивности полугруппы.

Предложение 5.1. *Пусть* $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}(n_1,\dots,n_k)$ *– полугруппа стохастических матриц с темпоральными компонентами* $\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_k$. *Тогда*

$$\mu(\mathcal{P}) = \mu(\mathcal{P}_1) + \dots + \mu(\mathcal{P}_k).$$

Это утверждение прямо следует из теорем 3.1 и 5.1.

Предложение 5.2. *Предположим, что полугруппа* $\mathcal{P}\subseteq\overline{P}(n_1,\dots,n_k)$ *стохастических матриц блочно-неприводима. Тогда*

$\mu(\mathcal{P}_1) = \dots = \mu(\mathcal{P}_k)$;

$\mu(\mathcal{P}) = k\mu(\mathcal{P}_1)$.

Это предложение непосредственно следует из следствия 4.1 и теоремы 5.1.

Список литературы

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* — М.: Наука, 1967.
2. V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products.* — Linear Algebra Appl. **437** (2012), 749–765.
3. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Темпоральные компоненты полугруппы неотрицательных матриц. Обобщение теоремы Минка о структуре неприводимой матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **463** (2017), 5–12.
4. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Комбинаторные свойства целых полугрупп неотрицательных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 13–31.
5. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Локально строго примитивные полугруппы неотрицательных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 5–14.
6. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Комбинаторные свойства неприводимых полугрупп неотрицательных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 13–23.
7. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Комбинаторные и спектральные свойства полугрупп стохастических матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 13–25.
8. H. Minc, *The structure of irreducible matrices.* — Linear Multilinear Algebra **2** (1974), 85–90.
9. H. Mink, *Nonnegative Matrices*, Wiley, New York etc., 1988.

Al'pin Yu.A., Al'pina V.S. Indices of imprimitivity of the temporal components of a semigroup of nonnegative matrices.

It is proved that the index of imprimitivity of a semigroup of nonnegative block-monominal matrices free of zero rows decomposes into a sum of the indices of imprimitivity of its temporal components, and if the semigroup is block irreducible, then the indices of imprimitivity of all the temporal components are equal.

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская 18, 420008 Казань, Россия
E-mail: `Yuri.Alpin@kpfu.ru`

Казанский национальный исследовательский
технологический университет,
ул. К.Маркса 68, 420015 Казань, Россия
E-mail: `alpina.valentina@yandex.ru`

Поступило 22 октября 2018 г.