Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов

АВТОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВА ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОДОБИЯМИ И ПСЕВДОПОДОБИЯМИ

§1. Введение

Пусть T_n – линейное пространство комплексных теплицевых $n \times n$-матриц. Рассмотрим следующие вопросы: (а) Какие невырожденные $n \times n$-матрицы отображают пространство T_n в себя посредством подобия? (б) Какие невырожденные $n \times n$-матрицы отображают T_n в себя, действуя посредством псевдоподобия? Если

$$\forall A \in T_n \to U^{-1}AU \in T_n,$$

то мы пишем $U \in \mathrm{Aut}(T_n)$. Запись $U \in \mathrm{Aut}_c(T_n)$ означает, что

$$\forall A \in T_n \to U^{-1}A\bar{U} \in T_n.$$

Цель настоящей статьи состоит в описании обеих групп $\mathrm{Aut}(T_n)$ и $\mathrm{Aut}_c(T_n)$. Эти описания даются следующими двумя теоремами.

Теорема 1. *Группа* $\mathrm{Aut}(T_n)$ *есть множество всех матриц, имеющих одну из следующих двух форм:*

$$U = \alpha \cdot \mathrm{diag}\ (1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^{n-1})$$

или

$$U = \alpha P_n \ \cdot \ \mathrm{diag}\ (1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^{n-1}).$$

Здесь α и μ – произвольные ненулевые комплексные числа, а P_n – так называемая перъединичная матрица порядка n:

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ключевые слова: теплицева матрица, подобие, псевдоподобие, ϕ-циркулянт.

Теорема 2. I. *Если $n > 2$, то группа* $\mathrm{Aut}_c(T_n)$ *есть множество всех матриц, имеющих одну из следующих двух форм:*

$$U = \alpha \cdot \mathrm{diag}\ (1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{n-1})$$

или

$$U = \alpha P_n \ \cdot \ \mathrm{diag}\ (1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{n-1}).$$

Здесь α – произвольное ненулевое комплексное число, а μ – произвольное ненулевое вещественное число.

II. *Если $n = 2$, то группа* $\mathrm{Aut}_c(T_2)$ *состоит из всех невырожденных матриц вида*

$$U = \alpha \begin{pmatrix} p & qi \\ ri & s \end{pmatrix}.$$

Здесь α – ненулевое комплексное число, а p, q, r и s – вещественные числа.

Мы полагаем, что факт, формулируемый теоремой 1, хорошо известен специалистам по теплицевым матрицам. Однако ни мы, ни коллеги, с которыми мы консультировались, не знаем публикации, где бы этот факт был доказан. Поэтому мы приводим в разделе 2 собственное доказательство теоремы 1.

Теорема 2 доказана в разделе 3. Мы думаем, что эта теорема является новым результатом, поскольку не встречали публикаций, в которых бы рассматривалось действие невырожденных матриц на T_n посредством неунитарного псевдоподобия.

Раздел 4 содержит наши заключительные замечания.

Прежде чем перейти к доказательствам, изложим несколько простых наблюдений, касающихся групп $\mathrm{Aut}(T_n)$ и $\mathrm{Aut}_c(T_n)$:

(i) $P_n \in \mathrm{Aut}(T_n)$ и $P_n \in \mathrm{Aut}_c(T_n)$.

(ii) Если $U \in \mathrm{Aut}(T_n)$, то и $U^T \in \mathrm{Aut}(T_n)$. То же самое верно для группы $\mathrm{Aut}_c(T_n)$.

(iii) Если $U \in \mathrm{Aut}(T_n)$, то матрицы $\bar{U}, P_nU, UP_n$ и P_nUP_n также принадлежат группе $\mathrm{Aut}(T_n)$. Аналогичное утверждение справедливо для группы $\mathrm{Aut}_c(T_n)$.

Из этих утверждений в пояснении нуждается, пожалуй, лишь второе. Поскольку $U^{-1} \in \mathrm{Aut}(T_n)$, имеем

$$\forall A \in T_n \longrightarrow UAU^{-1} \in T_n.$$

Полагая $B = A^T$ и переходя к транспонированным матрицам, получаем:

$$\forall B \in T_n \longrightarrow U^{-T} B U^T \in T_n.$$

§2. Доказательство теоремы 1

В дальнейшем символ E_{ij} обозначает соответствующую матричную единицу, т.е. $n \times n$-матрицу, единственный ненулевой элемент которой стоит в позиции (i, j) и равен единице. Пусть $U \in \mathrm{Aut}(T_n)$. Тогда для теплицевых матриц $E_{1n}, E_{1,n-1} + E_{2n}, \ldots, E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{n-1,n}$ справедливы включения

$$\begin{aligned}
&U^{-1} E_{1n} U \in T_n,\\
&U^{-1}(E_{1,n-1} + E_{2n}) U \in T_n,\\
&U^{-1}(E_{1,n-2} + E_{2,n-1} + E_{3n}) U \in T_n,\\
\ldots\\
&U^{-1}(E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{n-1,n}) U \in T_n.
\end{aligned}$$

Матрицы, заключенные внутри скобок, имеют нулевую главную диагональ и, следовательно, нулевой след. Матрицы, получаемые из них посредством подобия с матрицей U, также имеют нулевой след и, будучи теплицевыми, нулевую главную диагональ. Обозначая элементы матриц U и U^{-1} через u_{ij} и w_{ij}, запишем этот факт с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned}
&\forall k = 1, \ldots, n \qquad u_{nk} w_{k1} = 0,\\
&\forall k = 1, \ldots, n \qquad u_{n-1,k} w_{k1} + u_{nk} w_{k2} = 0,\\
&\forall k = 1, \ldots, n \qquad u_{n-2,k} w_{k1} + u_{n-1,k} w_{k2} + u_{nk} w_{k3} = 0,\\
&\ldots\\
&\forall k = 1, \ldots, n \qquad u_{2k} w_{k1} + u_{3k} w_{k2} + \ldots + u_{nk} w_{k,n-1} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

В последней строке невырожденной матрицы U найдется ненулевой элемент u_{nk_1}. Полагая в (1) $k = k_1$, из первого равенства видим, что $w_{k_1 1} = 0$; затем из второго равенства заключаем, что $w_{k_1 2} = 0$, и т.д. В конечном счете, получаем

$$w_{k_1 1} = w_{k_1 2} = \ldots = w_{k_1, n-1} = 0.$$

Таким образом, в строке k_1 матрицы U^{-1} имеется лишь один ненулевой элемент $w_{k_1 n}$. В невырожденной матрице не может быть двух различных строк с единственным ненулевым элементом в последней позиции.

Следовательно, индекс k_1 такой, что $u_{nk_1} \neq 0$, определен единственным образом; поэтому последняя строка матрицы U содержит лишь один ненулевой элемент.

Предположим теперь, что $w_{k_2 1} \neq 0$ для некоторого индекса k_2. Полагая в (1) $k = k_2$, последовательно получаем

$$u_{nk_2} = u_{n-1,k_2} = \ldots = u_{2k_2} = 0.$$

Снова заключаем, что такой индекс k_2 определен единственным образом, т.е. первый столбец матрицы U^{-1} содержит лишь один ненулевой элемент.

Итак, для указанных индексов k_1 и k_2 имеем $u_{nk_1} w_{k_2 1} \neq 0$. Рассмотрим равенство $U^{-1} E_{1n} U = u_{nk_1} w_{k_2 1} E_{k_2 k_1}$. Поскольку эта матрица должна быть теплицевой, то существуют только два возможных варианта, а именно:

$$k_1 = n, \qquad k_2 = 1$$

и

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = n.$$

Для определенности исследуем первый случай. Второй случай можно свести к первому, заменяя U матрицей UP_n.

Таким образом, последняя строка матрицы U содержит лишь один ненулевой элемент, стоящий в позиции (n, n). Отсюда следует, что u_{nn} является в то же время единственным ненулевым элементом последнего столбца в U. В противном случае матрица U^T содержала бы в своей последней строке два ненулевых элемента, что невозможно согласно проведенным выше рассуждениям.

Аналогичное заключение (т.е. элемент (n, n) есть единственный ненулевой элемент в последней строке и последнем столбце) верно и для матрицы $P_n U P_n$. Это означает, что u_{11} является единственным ненулевым элементом в первой строке и первом столбце матрицы U. Отсюда выводим, что U может быть представлена как блочно-диагональная матрица

$$U = u_{11} \oplus U' \oplus u_{nn},$$

где U' – квадратная подматрица порядка $n - 2$.

Легко видеть, что $U' \in \mathrm{Aut}(T_{n-2})$. Применяя к U' те же рассуждения, что и выше, заключаем, что $U' = \mathrm{diag}\ (u_{22}, U'', u_{n-1,n-1})$ или $U' P_{n-2} = \mathrm{diag}\ (u_{2,n-1}, U'' P_{n-4}, u_{n-1,2})$. Покажем невозможность второго варианта методом от противного.

Предположим, что $n \geqslant 4$ и U – матрица вида

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & u_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & U'' & \vdots & \vdots \\ 0 & u_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

В таком случае,

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & u_{n-1,2}^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & (U'')^{-1} & \vdots & \vdots \\ 0 & u_{2,n-1}^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Но тогда матрица

$$U^{-1}(E_{1,n-1} + E_{2n})U = u_{11}^{-1}u_{n-1,2}E_{12} + u_{2,n-1}^{-1}u_{nn}E_{n-1,n}$$

не является теплицевой. Полученное противоречие доказывает, что все матрицы из $\mathrm{Aut}(T_n)$ с ненулевым элементом (n, n) должны быть диагональными. Произведения таких матриц с матрицей P_n составляют вторую половину группы $\mathrm{Aut}(T_n)$.

Остается выяснить, как выглядят указанные диагональные матрицы. Пусть $U = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и A – матрица, все элементы которой равны единице. Тогда $\{U^{-1}AU\}_{ij} = \alpha_i^{-1}\alpha_j$. Полагая $j = i+1$, получаем

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}.$$

Тем самым числа α_1, α_2, ..., α_n образуют геометрическую прогрессию. С другой стороны, очевидно, что всякая диагональная матрица этого типа отображает T_n в себя посредством подобия. Этим доказательство теоремы 1 завершается.

§3. Доказательство теоремы 2

Пусть $n > 2$ и U – произвольная матрица из группы $\mathrm{Aut}_c(T_n)$. Поскольку единичная матрица является теплицевой, то теплицевой должна быть и матрица $X = U^{-1}\bar{U}$. Проведем подробный анализ этой матрицы. Отметим, прежде всего, что

$$X\bar{X} = U^{-1}\bar{U}\bar{U}^{-1}U = I_n, \tag{2}$$

т.е. матрица X есть псевдоинволюция. Равенство (2) показывает, что матрица $\bar{X}$, обратная к теплицевой матрице X, сама теплицева. Согласно [1], это возможно лишь в том случае, когда X есть треугольная теплицева матрица или φ-циркулянт для ненулевого числа φ. Напомним, что φ-циркулянтом называется теплицева матрица, элементы которой связаны соотношениями

$$t_{j1} = \varphi t_{1,n+2-j},$$

где $j = 2, \ldots, n$ и φ – заданное комплексное число.

Матрица $\bar{X} = \bar{U}^{-1} U$, являющаяся произведением двух матриц из $\mathrm{Aut}_c(T_n)$, сама принадлежит этой группе. Поэтому

$$\bar{X}^{-1} A X = X A X \in T_n \tag{3}$$

для любой теплицевой матрицы A. В частности, теплицевой должна быть матрица $X E_{n1} X$, откуда следуют соотношения

$$\{X E_{n1} X\}_{n+1-j,j} = \{X E_{n1} X\}_{n-j,j-1}, \qquad j = 2, \ldots, n-1.$$

Однако

$$\{X E_{n1} X\}_{n+1-j,j} = x_{n+1-j,n} x_{1j} = x_{1j}^2,$$

$$\{X E_{n1} X\}_{n-j,j-1} = x_{n-j,n} x_{1,j-1} = x_{1,j-1} x_{1,j+1}.$$

Использованные здесь равенства $x_{n+1-j,n} = x_{1j}$ и $x_{n-j,n} = x_{1,j+1}$ вытекают из теплицевости матрицы X. Итак, имеем

$$x_{1j}^2 = x_{1,j-1} x_{1,j+1} \tag{4}$$

для $j = 2, \ldots, n-1$.

Предположим, что в первой строке матрицы X имеется нулевой элемент. Покажем, что в этом случае равны нулю все элементы первой строки за возможным исключением первого и последнего элементов. Пусть верно противное, т.е. $x_{1j} \neq 0$ для некоторого индекса $j \in \{2, \ldots, n-1\}$. Из (4) следует, что

$$x_{1j} \neq 0 \Rightarrow x_{1,j-1} \neq 0,\ x_{1,j+1} \neq 0.$$

Последовательно применяя эту импликацию, заключаем, что все элементы первой строки отличны от нуля, что противоречит исходному предположению. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$x_{12} = x_{13} = \ldots = x_{1,n-1} = 0.$$

Соединяя эти равенства с общей формулой $\{XE_{n1}X\}_{ij} = x_{1,n-i+1}x_{1j}$, можем записать

$$XE_{n1}X = x_{11}x_{1n}E_{11} + x_{1n}^2E_{1n} + x_{11}^2E_{n1} + x_{11}x_{1n}E_{nn}.$$

Напомним, что $n > 2$ и матрица $XE_{n1}X$ должна быть теплицевой. Указанное выше представление этой матрицы не содержит слагаемого E_{22}, откуда следует равенство $x_{11}x_{1n} = 0$. Мы приходим к следующему выводу: если в первой строке матрицы X имеется нулевой элемент, то равны нулю все, кроме одного, элемента этой строки. Единственным ненулевым элементом является x_{11} либо x_{1n}.

Аналогичный вывод справедлив в отношении первого столбца матрицы X. Чтобы показать это, достаточно заменить E_{n1} в приведенных выше рассуждениях матрицей E_{1n}.

Итак, имеются следующие возможности: (а) X – или треугольная матрица, или φ-циркулянт; (б) в матрице X равны нулю все элементы первой строки (или первого столбца), кроме одного, или же в первой строке (столбце) этой матрицы вообще нет нулей. Покажем, что во всех случаях матрица X или не существует, или является скалярной.

Случай 1. Пусть X – треугольная теплицева матрица, для определенности, верхнетреугольная. Кроме того, все элементы первой строки в X, кроме одного, равны нулю. Поскольку X должна быть невырожденной матрицей, этим единственным ненулевым элементом первой строки является x_{11}. Следовательно, $X = x_{11}I_n$.

Случай 2. X – треугольная теплицева матрица. Снова предположим, что X – верхнетреугольная матрица. Кроме того, в первой строке X нет нулей. В таком случае соотношения (4) означают, что элементы первой строки образуют геометрическую прогрессию, т.е.

$$x_{1j} = \alpha\mu^{j-1}, \qquad \alpha \neq 0,\ \mu \neq 0,$$

для некоторых ненулевых чисел α и μ.

Пусть J – жорданова $n \times n$ клетка с нулем на главной диагонали. Матрицу X можно представить как многочлен от J степени $n-1$:

$$X = P(J),$$

где

$$P(t) = \alpha \cdot (1 + \mu t + \mu^2 t^2 + \ldots + \mu^{n-1}t^{n-1}).$$

Таким же образом $\bar{X}$ можно записать в виде

$$\bar{X} = Q(J),$$

где

$$Q(t) = \bar{\alpha} \cdot (1 + \bar{\mu}t + \bar{\mu}^2 t^2 + \ldots + \bar{\mu}^{n-1} t^{n-1}).$$

С помощью этих двух многочленов равенство (2) превращается в соотношение

$$P(t)Q(t) = 1 + t^n R(t), \tag{5}$$

где $R(t)$ – некоторый многочлен степени $n-2$. Подставляя в (5) $P(t)$ и $Q(t)$, записанные как дроби

$$P(t) = \alpha \cdot \frac{1 - \mu^n t^n}{1 - \mu t}, \qquad Q(t) = \bar{\alpha} \cdot \frac{1 - \bar{\mu}^n t^n}{1 - \bar{\mu} t},$$

получаем

$$(1 + t^n R(t))(1 - (\mu + \bar{\mu})t + \mu\bar{\mu}t^2) = 1 - (\mu^n + \bar{\mu}^n)t^n + \mu^n \bar{\mu}^n t^{2n}.$$

Напомним, что $n > 2$, и заметим, что в многочлене, стоящем в правой части этого равенства, отсутствует член с t^2. Отсюда следует, что $\mu\bar{\mu} = 0$, что невозможно, так как $\mu \neq 0$. Тем самым не существует матриц X, удовлетворяющих условиям данного случая.

Случай 3. Пусть X является φ-циркулянтом для некоторого числа $\varphi \neq 0$. Кроме того, все элементы первой строки в X, кроме одного, равны нулю. Если $x_{11} = 0$, то X – матрица вида

$$X = x_{1n} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \varphi & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае $\{X\bar{X}\}_{1,n-1} = x_{1n}\bar{x}_{1n}\bar{\varphi}$. Поскольку $n > 2$, это произведение не может быть равно нулевому элементу единичной матрицы I_n в позиции $(1, n-1)$. Отсюда следует, что $x_{1n} = 0$ и, значит, $X = x_{11} I_n$.

Случай 4. X является φ-циркулянтом для некоторого числа $\varphi \neq 0$. Кроме того, в первой строке X нет нулей. Как и в случае 2, заключаем, что элементы первой строки образуют геометрическую прогрессию:

$$x_{1j} = \alpha\mu^{j-1}, \qquad \alpha \neq 0,\ \mu \neq 0.$$

Теперь мы используем равенство первых двух диагональных элементов теплицевой матрицы $XE_{1n}X$:

$$\{XE_{1n}X\}_{11} = x_{11}x_{n1} = x_{11} \cdot \varphi x_{12} = \alpha^2 \varphi\mu;$$
$$\{XE_{1n}X\}_{22} = x_{21}x_{n2} = \varphi x_{1n} \cdot \varphi x_{13} = \alpha^2 \varphi^2 \mu^{n+1}.$$

Из равенства

$$\{XE_{1n}X\}_{11} = \{XE_{1n}X\}_{22}$$

следует, что $\varphi\mu^n = 1$. Поэтому $x_{21} = \varphi x_{1n} = \alpha\mu^{-1}$. Тем самым элементы второй строки матрицы X, т.е. числа

$$\alpha\mu^{-1}, \alpha, \alpha\mu, \ldots, \alpha\mu^{n-2},$$

образуют геометрическую прогрессию с тем же знаменателем μ, что и элементы первой строки. Эти две строки пропорциональны, что невозможно вследствие невырожденности матрицы X.

Наш анализ матрицы X завершен. Из него следует, что X – невырожденная скалярная матрица. В свою очередь, это означает, что для всякой матрицы $U \in \mathrm{Aut}_c(T_n)$ и соответствующего комплексного числа γ имеет место равенство $U^{-1}\bar{U} = X = \gamma I_n$, или

$$\bar{U} = \gamma U. \tag{6}$$

Сравнивая нормы обеих матриц в (6), заключаем, что $|\gamma| = 1$. Полагая $V = \gamma^{1/2}U$, выводим из (6) равенство $V = \bar{V}$. Таким образом, всякая матрица $U \in \mathrm{Aut}_c(T_n)$ $(n > 2)$ отличается от вещественной матрицы лишь комплексным скалярным множителем. Однако для вещественной трансформирующей матрицы V псевдоподобие и подобие суть идентичные преобразования. Поэтому матрица V описывается теоремой 1 для некоторого вещественного μ. Этим доказано первое утверждение теоремы 2.

Рассмотрим теперь случай $n = 2$. Положим

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Ясно, что включение $U \in \mathrm{Aut}_c(T_2)$ верно тогда и только тогда, когда матрицы, полученные из I_2, E_{12} и E_{21} посредством псевдоподобия с трансформирующей матрицей U, являются теплицевыми, иначе говоря, тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\{U^{-1}\bar{U}\}_{11} = \{U^{-1}\bar{U}\}_{22}, \qquad \{U^{-1}E_{12}\bar{U}\}_{11} = \{U^{-1}E_{12}\bar{U}\}_{22}$$

и

$$\{U^{-1}E_{21}\bar{U}\}_{11} = \{U^{-1}E_{21}\bar{U}\}_{22}.$$

Эти равенства эквивалентны соотношениям

$$\bar{a}d - b\bar{c} \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

$$\bar{c}di \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

$$a\bar{b}i \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Предположим вначале, что $a, d \neq 0$. Тогда из соотношений (9) и (8) вытекает, что $b = k \cdot ai$ и $c = l \cdot di$ для некоторых чисел $k, l \in \mathbf{R}$. Отсюда выводим

$$0 = \mathrm{Im}\ (\bar{a}d - b\bar{c}) = \mathrm{Im}\ (\bar{a}d - kl \cdot a\bar{d}) = (1 + kl) \cdot \mathrm{Im}\ (\bar{a}d).$$

Поскольку $\det U = ad - bc = (1 + kl) \cdot ad \neq 0$, имеем

$$\bar{a}d \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, $d = m \cdot a$ для некоторого вещественного числа m. Это позволяет нам записать матрицу U в виде

$$U = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & ki \\ lmi & m \end{pmatrix}.$$

Теперь предположим, что $a = 0$ и, как следствие, $bc \neq 0$. Тогда из (7) и (8) следует, что $b = k \cdot c$ и $d = l \cdot ci$ для некоторых вещественных чисел k и l. В этом случае матрицу U можно записать как

$$U = ci \cdot \begin{pmatrix} 0 & -ki \\ -i & l \end{pmatrix}.$$

Последним возможным случаем является равенство $d = 0$. Снова имеем $bc \neq 0$. Из (9) и (7) выводим, что $a = k \cdot bi$ и $c = l \cdot b$ для некоторых вещественных чисел k и l. В этом случае U можно записать как

$$U = bi \cdot \begin{pmatrix} k & -i \\ -li & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, всякая матрица $U \in \mathrm{Aut}_c(T_2)$ имеет вид

$$U = \alpha \begin{pmatrix} p & qi \\ ri & s \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \mathbf{C}$ и $p, q, r, s \in \mathbf{R}$. С другой стороны, любая матрица такого вида удовлетворяет соотношениям (7)–(9) и, следовательно, принадлежит группе $\mathrm{Aut}_c(T_2)$. Это устанавливает второе утверждение теоремы 2 и завершает доказательство всей теоремы.

§4. Заключительные замечания

Ранее [2, 3] авторы получили описания действий унитарной группы U_n на T_n посредством соответственно подобий и Т-конгруэнций. Эти описания даются следующими двумя теоремами.

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{UAut}(T_n)$ *– множество всех унитарных* $n \times n$*-матриц таких, что*

$$\forall A \in T_n \longrightarrow U^* A U \in T_n.$$

Тогда всякая матрица из $\mathrm{UAut}(T_n)$ *имеет одну из двух форм:*

$$U = \alpha \cdot \mathrm{diag}\ (1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{n-1})$$

или

$$U = \alpha P_n \ \cdot \ \mathrm{diag}\ (1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{n-1}).$$

Здесь α *и* μ *– комплексные числа с модулем* 1.

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{UAut}_c(T_n)$ *– множество всех унитарных* $n \times n$*-матриц таких, что*

$$\forall A \in T_n \longrightarrow U^T A U \in T_n.$$

Тогда:

I. *Если* $n > 2$*, то* $\mathrm{UAut}_c(T_n)$ *есть группа всех матриц, имеющих вид*

$$U = \alpha \cdot \mathrm{diag}\ (1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{n-1})$$

или

$$U = \alpha P_n \ \cdot \ \mathrm{diag}\ (1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{n-1}).$$

Здесь α *– комплексное число,* μ *– вещественное число, и оба имеют модуль* 1.

II. *Если* $n = 2$*, то* $\mathrm{UAut}_c(T_2)$ *есть группа унитарных матриц вида*

$$U = \alpha \begin{pmatrix} \cos\phi & i\sin\phi \\ i\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Здесь α *– произвольное комплексное число с модулем* 1.

Мы видим, что теоремы 3 и 4 прекрасно согласуются с теоремами 1 и 2.

Список литературы

1. T. N. E. Greville, *Toeplitz matrices with Toeplitz inverses revisited.* — Linear Algebra Appl. **55** (1983), 87–92.
2. Х. Д. Икрамов, *Унитарные автоморфизмы пространства теплицевых матриц.* — Докл. Акад. Наук **456** (2014), 389–391.
3. A. K. Abdikalykov, V. N. Chugunov, Kh. D. Ikramov, *Unitary congruence automorphisms of the space of Toeplitz matrices.* — Linear Multilinear Algebra **63** (2015), 1195–1203.

Abdikalykov A. K., Ikramov Kh. D. Similarity and consimilarity automorphisms of the space of Toeplitz matrices.

Let T_n be the set of complex Toeplitz $n \times n$ matrices. We describe the matrices U in the linear group $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ such that

$$\forall A \in T_n \longrightarrow U^{-1}AU \in T_n$$

and the matrices $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ such that

$$\forall A \in T_n \longrightarrow U^{-1}A\bar{U} \in T_n.$$

Московский государственный университет,
Казахстанский филиал,
Астана, Казахстан
E-mail: adiko2008@gmail.com

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 1 марта 2018 г.