

А. А. Федотов

## ОБ АДИАБАТИЧЕСКИХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛНАХ В ПРИБРЕЖНОМ КЛИНЕ

Посвящается памяти А. П. Качалова – замечательного  
ученого и человека

### §1. ВВЕДЕНИЕ

1. Следующая двумерная модель используется при исследовании распространения звука в прибрежном морском клине. В полуплоскости  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ , см. рис. 1, распространение звука описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta U(x, y) + k^2 U(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

с показателем преломления вида  $k = k(\varepsilon_1 x, y)$ , где  $\varepsilon_1 = \operatorname{tg}(\varepsilon/2)$ ,  $\varepsilon > 0$  – параметр,  $k(\xi, y)$  – кусочно постоянная функция,

$$k = \begin{cases} k_0 & \text{при } 0 \leq y \leq \xi, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1.2)$$

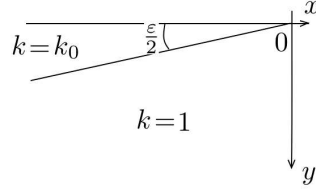
а  $k_0 > 1$  – фиксированное число. На “поверхности”, т.е. при  $y = 0$  уравнение (1.1) дополняется условием Дирихле, а на “дне”, т.е. при  $y = -\varepsilon_1 x$  и  $x < 0$  решение  $U$  считается непрерывным вместе с нормальной производной.

Конечно, для выделения физически интересного решения задачу необходимо дополнить подходящими условиями на бесконечности и у вершины “водного” клина  $W = \{(x, y) \in P, 0 < y < -\varepsilon_1 x\}$ .

Описанная задача хорошо известна в теории распространения волн и считается трудной нерешенной задачей. В задачах акустики океана параметр  $\varepsilon$  является малым и это дает дополнительные возможности для исследования. Имеется целый ряд работ посвященных построению формальных асимптотических решений. Мы выделим пионерские работы [1, 8, 9] и отметим, что полного построения формального асимптотического решения пока получить не удалось.

---

*Ключевые слова:* адиабатическая нормальная волна, узкий прибрежный клин.  
Работа поддержана грантом РФФИ No 17-01-00668-а.

Рис. 1. Полу плоскость  $P$ 

Мы надеемся строго исследовать задачу с малым  $\varepsilon$ . В этой работе делается первый шаг. Используя идеи [7], мы построим точное решение уравнения (1.1) в области  $Q_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\}$ . Это решение удовлетворяет описанным граничным условиям на границах клина, а при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вдали от вершины клина допускает асимптотическое разложение типа адиабатической нормальной волны.

Чтобы точнее сформулировать это свойство построенного решения, рассмотрим оператор  $H(\xi)$ , зависящий от  $\xi = \varepsilon_1 x$  как от параметра, действующий в  $L^2$  на положительной полуоси по формуле  $(H(\xi)\psi)(y) = \psi_{yy}(y) + k^2(\xi, y)\psi(y)$  и дополненный при  $y = 0$  условием Дирихле.

Положим

$$\xi_m = -\frac{\pi(m - 1/2)}{\sqrt{k_0^2 - 1}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

При  $\xi_{m+1} < \xi < \xi_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , число собственных значений  $H(\xi)$  равно  $m$ . Пусть  $E_m(\xi)$  –  $m$ -ое собственное значение. Оно удовлетворяет уравнению

$$-\xi \sqrt{k_0^2 - E} + \arctg \sqrt{\frac{k_0^2 - E}{E - 1}} = \pi m, \quad 1 \leq E \leq k_0. \quad (1.4)$$

Адиабатической нормальной волной  $U_m$ , отвечающей  $E_m(\xi)$ , называют формальное асимптотическое при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение уравнения (1.1) вида

$$U_m(x, y) \sim e^{-\frac{i}{\varepsilon_1} \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{E_m(\xi')} d\xi'} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_1^n \psi_{m,n}(y, \xi), \quad \xi = \varepsilon_1 x, \quad (1.5)$$

где  $\xi_0 < \xi_m$  – фиксированное число, а  $\psi_{m,0}(\cdot, \xi)$  – подходящим образом нормированная  $m$ -ая собственная функция оператора  $H(\xi)$ . Формальные асимптотические решения такого типа активно обсуждаются в разных областях математической физики и, в частности, в акустике океана, см., напр., [3, 4]. Аналогичные настоящие решения строго исследовались в квантовой механике, см., напр., книгу [10] и ссылки к ней.

Мы явно построим решение методом, который можно считать вариантом метода Зоммерфельда-Малюженца, см., напр., [2]. Это позволяет, пользуясь техникой работы [7], описать асимптотическое поведение этого решения для всех  $x < 0$  и, в частности, строго изучить эффекты, возникающие из-за исчезновения соответствующего собственного значения оператора  $H(\xi)$ .

Асимптотическое поведение построенного нами решения  $U_m$  описывает

**Теорема 1.1.** Пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $\Xi_1 < \Xi_2 < \xi_m$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\Xi_1 \leq \varepsilon x \leq \Xi_2$  и  $0 \leq y \leq -\varepsilon_1 x$  решение  $U_m$  допускает равномерное асимптотическое представление

$$U_m(x, y) = \sqrt{-\frac{d\sqrt{E_m}}{d\xi}} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\xi_m}^{\xi} \sqrt{E_m} d\xi + \frac{i\theta_m}{\varepsilon}} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n \psi_{m,n}(\xi, y) + O(\varepsilon^N) \right), \quad (1.6)$$

где  $E_m = E_m(\xi)$ ,  $\psi_{m,0} = \frac{\sin(\sqrt{k_0^2 - E_m} y)}{\sqrt{k_0^2 - E_m}}$ ,  $\theta_m$  – вещественная постоянная, а  $\psi_{m,n}$  – аналитические функции своих переменных.

Мы не будем обсуждать здесь поведение  $U_m(x, y)$  в “дне”, т.е. при  $y > -\varepsilon_1 x$ , и лишь отметим, что оно экспоненциально убывает с ростом  $y$ .

Решение  $U_m$  можно охарактеризовать, как адиабатическую нормальную волну, идущую к вершине клина слева. В следующих работах мы надеемся описать все возможные волны, которые можно интерпретировать как рассеянные в квадрант  $Q_L = \{x < 0, y > 0\}$ , и шить при малых  $\varepsilon$  подающую волну и линейную комбинацию этих рассеянных волн с линейной комбинацией “свободных” волн, уходящих на бесконечность в квадранте  $Q_R = \{x > 0, y > 0\}$  (где показатель преломления постоянный).

Опишем структуру этой работы. В следующем, втором параграфе, мы в  $Q_L$  построим специальное *производящее* решение уравнения (1.1),

удовлетворяющее граничным условиям на сторонах клина  $W$  и допускающее простую физическую интерпретацию. Грубо говоря, внутри  $W$  оно представляет собой линейную комбинацию плоской волны  $e^{ik_0(\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y)}$ , где  $\varphi$  – угол между направлением этой волны и осью  $x$ , и всех возможных волн, которые получаются из нее или превращаются в нее после ряда отражений. Производящее решение оказывается периодическим по  $\varphi$  с периодом  $\varepsilon$ . Обсуждавшееся выше решение  $U_m$  является его  $m$ -ым коэффициентом Фурье.

Построение производящего решения сводится к построению аналитического решения разностного уравнения первого порядка на комплексной плоскости. Параметром сдвига в этом уравнении оказывается параметр  $\varepsilon$ . В третьем параграфе работы мы описываем асимптотику решений этого разностного уравнения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и, используя эти асимптотики и интегральное представление для решения  $U_m$ , мы получаем асимптотическое представление (1.6).

## §2. ПРОИЗВОДЯЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Мы построим производящее решение в виде

$$U(x, y, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{cases} 2i \sum_{\substack{\alpha=\varphi+\varepsilon l, \\ l \in \mathbb{Z}}} R(\alpha) e^{ik_0 x \cos \alpha} \sin(k_0 y \sin \alpha), & 0 \leq y \leq -\varepsilon_1 x, \\ \sum_{\substack{\alpha=\varphi+\varepsilon l, \\ l \in \mathbb{Z}}} T(\alpha) R(\alpha) e^{i(x \cos \beta(\alpha) + y \sin \beta(\alpha))}, & y \geq -\varepsilon_1 x. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $\varphi$  – вещественный параметр, а  $R$ ,  $T$  и  $\beta$  – функции переменной  $\alpha$ , подлежащие определению.

**2.1. Функциональное уравнение для  $\beta$ , формула для  $T$  и разностное уравнение для  $R$ .** Предположим, что ряды в (2.1) сходятся достаточно хорошо (потом это будет обеспечено за счет выбора  $R$ ,  $T$  и  $\beta$ ). Очевидно, условие Дирихле на “поверхности” выполнено автоматически. Функция  $U$  окажется непрерывной по  $y$  при  $y = -\varepsilon_1 x$  для всех  $x < 0$ , если для всех  $\alpha \in \mathbb{R}$  и всех  $y > 0$ ,

$$\begin{aligned} R(\alpha) e^{ik_0 \left(-\frac{y}{\varepsilon_1} \cos \alpha + y \sin \alpha\right)} - R(\alpha + \varepsilon) e^{ik_0 \left(-\frac{y}{\varepsilon_1} \cos(\alpha + \varepsilon) - y \sin(\alpha + \varepsilon)\right)} \\ = T(\alpha) R(\alpha) e^{i \left(-\frac{y}{\varepsilon_1} \cos \beta(\alpha) + y \sin \beta(\alpha)\right)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для этого нужно потребовать, чтобы для всех  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\cos \alpha + \varepsilon_1 \sin \alpha &= -\cos(\alpha + \varepsilon) - \varepsilon_1 \sin(\alpha + \varepsilon) \\ &= \frac{-\cos \beta(\alpha) + \varepsilon_1 \sin \beta(\alpha)}{k_0}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку  $\varepsilon_1 = \operatorname{tg}(\varepsilon/2)$ , первое равенство выполняется автоматически, а из второго вытекает, что

$$k_0 \cos(\alpha + \varepsilon/2) = \cos(\beta(\alpha) + \varepsilon/2). \quad (2.4)$$

Если это соотношение выполнено, то из (2.2) вытекает соотношение

$$R(\alpha) - R(\alpha + \varepsilon) = T(\alpha) R(\alpha). \quad (2.5)$$

Теперь проанализируем условие непрерывности нормальной производной  $U$  на “дне”. Нормальная производная на нижней стороне клина  $W$  равна

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2}} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

и, рассуждая как при выводе (2.5), мы убеждаемся, что для непрерывности нормальной производной  $U$  достаточно потребовать выполнение соотношения

$$\begin{aligned} k_0(\varepsilon_1 \cos \alpha + \sin \alpha) R(\alpha) - k_0(\varepsilon_1 \cos(\alpha + \varepsilon) - \sin(\alpha + \varepsilon)) R(\alpha + \varepsilon) \\ = (\varepsilon_1 \cos \beta + \sin \beta) T(\alpha) R(\alpha), \end{aligned} \quad (2.6)$$

Откуда вытекает, что

$$R(\alpha) + R(\alpha + \varepsilon) = \frac{\sin(\beta + \frac{\varepsilon}{2})}{k_0 \sin(\alpha + \frac{\varepsilon}{2})} T(\alpha) R(\alpha). \quad (2.7)$$

Из полученных соотношений вытекает явная формула для  $T$  и разностное уравнение для  $R$ . Положим

$$\gamma(\alpha) = \beta \left( \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.8)$$

Из (2.4) вытекает уравнение для  $\gamma$ :

$$k_0 \cos \alpha = \cos \gamma(\alpha). \quad (2.9)$$

Сложив (2.5) и (2.7) и поделив результат на  $R(\alpha)$ , легко получить формулу для  $T$ :

$$T \left( \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{2k_0 \sin \alpha}{\sin \gamma(\alpha) + k_0 \sin \alpha}. \quad (2.10)$$

Отсюда и из (2.5) вытекает разностное уравнение для  $R$ :

$$R\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \rho(\alpha) R\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \rho(\alpha) = \frac{\sin \gamma(\alpha) - k_0 \sin \alpha}{\sin \gamma(\alpha) + k_0 \sin \alpha}. \quad (2.11)$$

В следующем параграфе, мы изучим многозначную аналитическую функцию  $\gamma$ , определяемую соотношением (2.9), проанализируем свойства  $T$  и коэффициента  $\rho$  из уравнения (2.11). Затем, мы построим такое аналитическое решение уравнения (2.11), чтобы ряды в (2.1) сходились и определяли решение изучаемого уравнения Гельмгольца.

**2.2. Функции  $\gamma$ ,  $T$  и  $\rho$ .** В этом параграфе мы сначала исследуем аналитические свойства функции  $\gamma$ , а в его двух заключительных разделах мы изучим связанные с ней явными формулами коэффициенты  $T$  и  $\rho$ .

2.2.1. *Точки ветвления.* Функция, определенная соотношением (2.9) – многозначная аналитическая функция. Ее точки ветвления описываются уравнениями

$$\pm 1 = k_0 \cos(\alpha). \quad (2.12)$$

Поскольку  $k_0 > 1$ , на отрезке  $(0, \pi/2)$  имеется одна точка ветвления. Обозначим ее через  $\alpha_0$ . Остальные точки ветвления имеют вид  $\pm\alpha_0 + \pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $\alpha_*$  – одна из точек ветвления, а  $\gamma_*$  – ветвь  $\gamma$  аналитическая в достаточно малой окрестности  $\alpha_*$ , разрезанной, скажем, вдоль линии  $\{\alpha \leq \alpha_*\}$ . Легко видеть, что  $\gamma_*$  оказывается аналитической функцией локальной переменной  $\tau = \sqrt{\alpha - \alpha_*}$  и

$$\gamma_*(\alpha) = \gamma_*(\alpha_*) + c_1\tau + c_2\tau^3 + \dots \quad (2.13)$$

2.2.2. *Конформные свойства.* Во внутренности полосы  $\Pi = \{\alpha \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \pi, \operatorname{Im} \alpha \geq 0\}$  нет точек ветвления. Фиксируем в  $\Pi$  однозначную аналитическую внутри и непрерывную вплоть до границы ветвь  $\gamma_0$  функции  $\gamma$  условием

$$\gamma_0(\alpha) \in i(0, +\infty) \quad \text{при} \quad 0 \leq \alpha < \alpha_0.$$

Ветвь  $\gamma_0$  биективно отображает  $\Pi$  на себя. При этом

$$\gamma_0(0) = i \operatorname{arcsch} k_0, \quad \gamma_0(\alpha_0) = 0, \quad \gamma_0(\pi - \alpha_0) = \pi, \quad \gamma_0(\pi) = \pi + i \operatorname{arcsch} k_0.$$

На рисунке рис. 2 показана кривая, идущая вдоль границы  $\Pi$  (слева) и ее образ при отображении  $\gamma_0$  (справа).

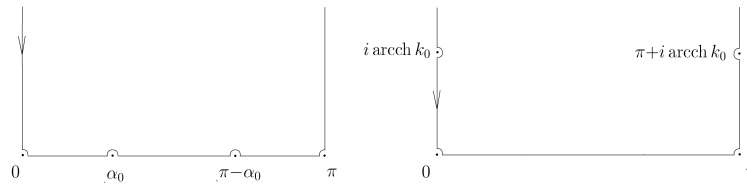


Рис. 2. Граница  $\Pi$  и ее образ при отображении  $\gamma_0$ .

2.2.3. Аналитическое продолжение ветви  $\gamma_0$  в область  $\mathbb{C}_0$ . Пусть

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -\alpha_0] \cup [\alpha_0, \infty)).$$

Продолжим аналитически  $\gamma_0$  в  $\mathbb{C}_0$ . Для аналитического продолжения сохраним обозначение  $\gamma_0$ .

Поскольку  $\gamma_0(\alpha) \in i\mathbb{R}$  на отрезке  $(0, \alpha_0)$ , выполнено соотношение

$$\gamma_0(\bar{\alpha}) = -\overline{\gamma_0(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}_0. \tag{2.14}$$

А поскольку  $\gamma_0(i\mathbb{R}_+) \subset i\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ , то

$$\gamma_0(-\bar{\alpha}) = -\overline{\gamma_0(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}_0. \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) вытекает, что

$$\gamma_0(-\alpha) = \gamma_0(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}_0. \tag{2.16}$$

Поскольку  $\gamma_0(\pi + i\mathbb{R}_+) \subset \pi + i\mathbb{R}_+$ , то

$$\gamma_0(2\pi - \bar{\alpha}) = 2\pi - \overline{\gamma_0(\alpha)}, \quad \text{Im } \alpha > 0. \tag{2.17}$$

Наконец отметим, что если  $\alpha$  и  $\alpha + 2\pi$  принадлежат  $\mathbb{C}_0$ , то

$$\gamma_0(\alpha + 2\pi) = \gamma_0(\alpha) + 2\pi. \tag{2.18}$$

Действительно, проверим (2.18) в  $\mathbb{C}_+ = \{\text{Im } \alpha > 0\}$ . Очевидно,  $\alpha \mapsto \gamma_0(\alpha + 2\pi)$  – ветвь функции  $\gamma$  аналитическая в верхней полуплоскости вместе с  $\gamma_0$ . Отсюда и из (2.9) вытекает, что  $\gamma_0(\alpha + 2\pi) = \sigma\gamma_0(\alpha) + 2\pi l$  с некоторыми  $\sigma \in \{\pm 1\}$  и  $l \in \mathbb{Z}$ . Сравнивая эту формулу с (2.17) при  $\alpha \in i\mathbb{R}_+$ , приходим к (2.18).

2.2.4. *Продолжение  $\gamma_0$  вдоль вещественной оси.* Для определения рядов в (2.1) нам придется определить ветвь  $\gamma_{\mathbb{R}}$  функции  $\gamma$  вдоль вещественной оси. Эта ветвь получается аналитическим продолжением  $\gamma_0$  с отрезка  $(0, \alpha_0)$  вдоль кривой  $c_{\mathbb{R}}$ , инфинитезимально близкой к  $\mathbb{R}$  и изображенной в верхней части рис. 3. Эта кривая симметрична относительно точки нуля и периодична с периодом  $2\pi$  справа от нуля.

С помощью результатов раздела 2.2.2 и принципа симметрии Римана легко видеть, что  $\gamma_{\mathbb{R}}$  биективно отображает положительную полуось  $[0, +\infty)$  на кривую, изображенную в нижней части рис. 3. Эта кривая находится в правой полуплоскости и там периодична с периодом  $2\pi$ . При этом

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbb{R}}(0) &= i \operatorname{arcsch} k_0, & \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha_0) &= 0, & \gamma(\pi/2) &= \pi/2, & \gamma_{\mathbb{R}}(\pi - \alpha_0) &= \pi, \\ \gamma_{\mathbb{R}}(\pi) &= \pi - i \operatorname{arcsch} k_0, & \gamma_{\mathbb{R}}(\pi + \alpha_0) &= \pi, & \gamma_{\mathbb{R}}(2\pi - \alpha) &= 2\pi, \\ \gamma_{\mathbb{R}}(2\pi) &= 2\pi + \gamma_{\mathbb{R}}(0).\end{aligned}$$

В силу (2.16)

$$\gamma_{\mathbb{R}}(-\alpha) = \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha), \quad (2.19)$$

и  $\gamma_{\mathbb{R}}$  отображает всю вещественную ось на ту же кривую, что и положительную полуось.

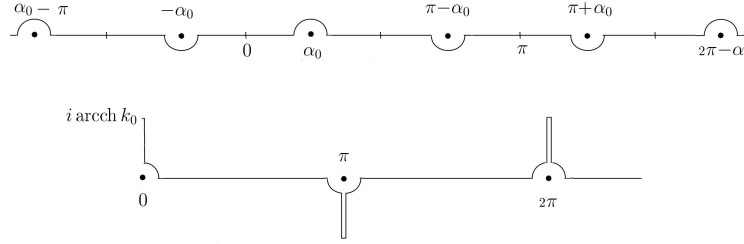


Рис. 3. Продолжение вдоль вещественной оси.

Нетрудно проверить, что

$$\gamma_{\mathbb{R}}(\alpha + 2\pi) = \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) + 2\pi, \quad \alpha \geq 0. \quad (2.20)$$

Действительно, поскольку справа от нуля  $c_{\mathbb{R}}$  периодична с периодом  $2\pi$ , то при  $\alpha > 0$   $\gamma_{\mathbb{R}}(\alpha + 2\pi) = \sigma \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) + 2\pi l$  с некоторыми  $\sigma \in \{\pm 1\}$  и  $l \in \mathbb{Z}$ . Формула (2.20) вытекает из этого соотношения и сравнения  $\gamma_{\mathbb{R}}(0)$  и  $\gamma_{\mathbb{R}}(2\pi)$ .



Наконец, мы отметим, что на кривой  $c_{\mathbb{R}}$  функция  $\gamma_{\mathbb{R}}$  обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{Im} \sin(\gamma_{\mathbb{R}}(\alpha)) \geq 0; \quad (2.21)$$

$$\operatorname{sign}(\sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha)) = \operatorname{sign}(\sin \alpha), \text{ если } \sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ и } \alpha > 0; \quad (2.22)$$

$$\operatorname{sign}(\sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha)) = -\operatorname{sign}(\sin \alpha), \text{ если } \sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ и } \alpha < 0. \quad (2.23)$$

**Замечание 2.1.** Обсудим множители  $E(x, y, \alpha) = e^{i(x \cos \beta(\alpha) + y \sin \beta(\alpha))}$  в формуле (2.1) для производящего решения в области, где  $y > -\varepsilon_1 x$ . Точке  $(x, y)$  с  $x < 0$  и  $y > 0$  будем сопоставлять  $r$  – расстояние от  $(x, y)$  до начала координат – и  $\theta \in (0, \pi)$  – угол между отрицательной частью оси  $x$  и лучем, идущим в  $(x, y)$  из начала координат. В рассматриваемой области  $\varepsilon/2 < \theta < \pi/2$ .

Будем считать, что  $\beta(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}) = \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) - \frac{\varepsilon}{2}$  (сравните с (2.8)). Тогда

$$E(x, y, \alpha - \varepsilon/2) = e^{ir(-\cos \theta \cos(\gamma(\alpha) - \varepsilon/2) + \sin \theta \sin(\gamma(\alpha) - \varepsilon/2))}.$$

Очевидно, либо  $\gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) \in \mathbb{R}$ , либо  $\gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) \in i\mathbb{R} + \pi\mathbb{Z}$ . Поэтому

$$|E(x, y, \alpha - \varepsilon/2)| = |e^{ir \sin \gamma(\alpha) \sin(\theta - \varepsilon/2)}|$$

и благодаря (2.21) для обсуждаемых  $(x, y)$  выясняется, что  $|E(x, y, \alpha - \varepsilon/2)| \leq 1$ .

Позже мы увидим, что (2.22)–(2.23) обеспечивают сходимость рядов в (2.1).

2.2.5. *Коэффициент  $T$ .* Из следующей леммы и определения  $T$  вытекает, что  $T$  – многозначная аналитическая функция  $\alpha$  (не имеет полюсов).

**Лемма 2.1.** *Функция  $\gamma$  удовлетворяет соотношению*

$$\sin^2 \gamma(\alpha) - k_0^2 \sin^2 \alpha = 1 - k_0^2. \quad (2.24)$$

**Доказательство.** Формула (2.24) следует напрямую из (2.9).  $\square$

Имеет место

**Следствие 2.1.**

$$T\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2k_0 \sin \alpha (\sin \gamma(\alpha) - k_0 \sin \alpha)}{1 - k_0^2}. \quad (2.25)$$

**Доказательство.** Умножая числитель и знаменатель в формуле (2.10) на выражение  $\sin \gamma(\alpha) - k_0 \sin \alpha$  и используя (2.24) для преобразования знаменателя полученной дроби, приходим к (2.25).  $\square$

Определим  $T$  на вещественной оси с помощью формулы (2.25) с  $\gamma = \gamma_{\mathbb{R}}$ . Полученная функция  $T$  определена на  $\mathbb{R}$ , непрерывна и благодаря (2.20)  $2\pi$ -периодична по  $\alpha$ .

2.2.6. *Функции  $\rho$  и  $l$ .* В  $\mathbb{C}_0$  определим коэффициент  $\rho_0 = \rho$  формулой (2.11) с  $\gamma = \gamma_0$ . Аналогично вдоль  $\mathbb{R}$  определим  $\rho_{\mathbb{R}} = \rho$  формулой (2.11) с  $\gamma = \gamma_{\mathbb{R}}$ . Справедлива

**Лемма 2.2.** *Функции  $\rho_0$  и  $\rho_{\mathbb{R}}$  не имеют нулей и полюсов. Они удовлетворяют соотношениям*

$$\rho_0(\bar{\alpha})\overline{\rho_0(\alpha)} = 1, \quad \rho_0(\alpha)\rho_0(-\alpha) = 1, \quad (2.26)$$

$$\rho_0(\alpha + 2\pi) = \rho_0(\alpha), \quad \text{если } \alpha, 2\pi + \alpha \in \mathbb{C}_0, \quad (2.27)$$

$$\rho_{\mathbb{R}}(\alpha)\rho_{\mathbb{R}}(-\alpha) = 1, \quad (2.28)$$

$$\rho_{\mathbb{R}}(\alpha + 2\pi) = \rho_{\mathbb{R}}(\alpha), \quad \text{если } \alpha, 2\pi + \alpha \in \mathbb{R}_+. \quad (2.29)$$

**Доказательство.** Утверждение о нулях и полюсах следует из (2.11) и соотношения (2.24). Равенства в (2.26) получаются с помощью (2.14) и (2.16), формула (2.28) следует из (2.19), а (2.27) и (2.29) вытекают из (2.18) и (2.20) соответственно.  $\square$

Чтобы построить и изучить решение (2.11) в  $\mathbb{C}_0$  нам потребуется аналитическая в  $\mathbb{C}_0$  функция, определенная формулами

$$l_0(p) = -i \ln \rho_0(p) = -i \ln \frac{\sin \gamma_0(\alpha) - k_0 \sin \alpha}{\sin \gamma_0(\alpha) + k_0 \sin \alpha}, \quad l_0(0) = 0. \quad (2.30)$$

Отображение  $l_0$  биективно отображает полосу  $\Pi_{1/2} = \{\alpha \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \pi/2, \operatorname{Im} \alpha \geq 0\}$  на полосу  $\Pi$ . На рисунке 4 слева изображена кривая идущая в  $\mathbb{C}_0$  вдоль границы полосы  $\Pi_{1/2}$ , а справа – ее образ при отображении  $l_0$ .

Мы отметим, что

$$l_0(\alpha_0) = \pi, \quad l_0(\pi/2) = \pi + i \frac{k_0 + 1}{k_0 - 1}. \quad (2.31)$$

Из (2.26) вытекает, что

$$l_0(-\alpha) = -l_0(\alpha), \quad l_0(\bar{\alpha}) = \overline{l_0(\alpha)}. \quad (2.32)$$

Далее,

$$l_0(\alpha + \pi) = l_0(\alpha) + 2\pi, \quad \alpha, \alpha + \pi \in \mathbb{C}_0. \quad (2.33)$$

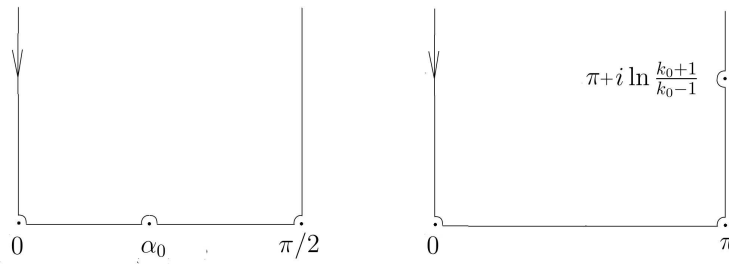


Рис. 4. Конформные свойства  $l_0$ .

Эту формулу достаточно проверить вдоль прямых  $\mathbb{R} \pm i0$ . На них она устанавливается с помощью принципа симметрии Римана и анализа рис. 4.

Наконец, мы определим на  $\mathbb{R}$  функцию  $l_{\mathbb{R}}$ , аналитически продолжив  $\gamma_0$  с отрезка  $(0, \alpha_0)$  вдоль  $c_{\mathbb{R}}$ . Эта функция удовлетворяет соотношениям

$$l_{\mathbb{R}}(-\alpha) = -l_{\mathbb{R}}(\alpha); \tag{2.34}$$

$$l_{\mathbb{R}}(\alpha + 2\pi) = l_{\mathbb{R}}(\alpha) \text{ и } \text{Im } l_{\mathbb{R}}(\alpha) = \text{Im } l_0(\alpha + i0) \text{ при } \alpha > 0. \tag{2.35}$$

Первая из этих формул вытекает из первой формулы из (2.32). Вторая и третья устанавливаются с помощью анализа рис. 4 и принципа симметрии Римана. При этом при доказательстве второй используется (2.29), а третьей – вторая. Мы опустим элементарные детали.

**2.3. Функция  $R$ .** Здесь мы построим решение уравнения (2.11) в области  $\mathbb{C}_0$ .

**2.3.1. Построение решения (2.11).** Нам потребуется следующее определение.

Кривая  $c \subset \mathbb{C}$  называется вертикальной, если вдоль нее  $\text{Re } \alpha$  – кусочно непрерывно дифференцируемая функция  $\text{Im } \alpha$ , а  $\frac{d\alpha}{d\text{Im } \alpha}$  равномерно ограничена.

Для  $\alpha \in \mathbb{C}$ , обозначим через  $c(\alpha) \subset \mathbb{C}$  бесконечную (вдоль нее  $\text{Im } \alpha$  пробегает  $\mathbb{R}$ ) вертикальную кривую, содержащую  $\alpha$ .

Имеет место

**Предложение 2.1.** Для  $\alpha \in \mathbb{C}_0$  положим

$$R_0(\alpha) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_0^\alpha L_0(\alpha) d\alpha\right), \quad (2.36)$$

где

$$L_0(\alpha) = \frac{\pi}{2i\varepsilon} \int_{c(\alpha)} \frac{l_0(\zeta) d\zeta}{\cos^2\left(\frac{\pi(\alpha-\zeta)}{\varepsilon}\right)}, \quad (2.37)$$

а  $c(\alpha) \subset \mathbb{C}_0$ . Функции  $L_0$  и  $R_0$  аналитичны в  $\mathbb{C}_0$ , и  $R_0$  непрерывна до ее границы.  $R_0$  – решение (2.11) с  $\rho = \rho_0$ , а  $L_0$  удовлетворяет соотношениям

$$L_0(\alpha + \varepsilon/2) - L_0(\alpha - \varepsilon/2) = \varepsilon l'_0(\alpha), \quad \alpha \pm \varepsilon/2 \in \mathbb{C}_0, \quad (2.38)$$

$$L_0(\bar{\alpha}) = \overline{L_0(\alpha)}, \quad L_0(-\alpha) = -L_0(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}_0. \quad (2.39)$$

**Доказательство.** Аналитичность  $L_0$  (и  $R_0$ ) следуют из выбора  $c(\alpha)$  и оценки

$$|l_0(\alpha)| \leq C_1 + C_2|\alpha|, \quad \alpha \in \mathbb{C}_0,$$

где  $C_{1,2} > 0$  – постоянные.

С помощью теоремы о вычетах проверяется, что  $L_0$  удовлетворяет (2.38). Для доказательства (2.39) с помощью (2.32) устанавливается, что вдоль  $i\mathbb{R}$ ,  $L_0(\alpha) \in i\mathbb{R}$  и  $L_0(-\alpha) = -L_0(\alpha)$ .

Докажем, что  $R_0$  удовлетворяет (2.11) с  $\rho = \rho_0$ . Для упрощения обозначений мы будем писать  $l$  и  $L$  вместо  $l_0$  и  $L_0$ . Для  $\alpha \pm \varepsilon/2 \in \mathbb{C}_0$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}} L(\alpha) d\alpha - \int_0^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}} L(\alpha) d\alpha &= \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^\alpha L\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) d\alpha - \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^\alpha L\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) d\alpha \\ &= \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^0 L\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) d\alpha - \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^0 L\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) d\alpha + \varepsilon \int_0^\alpha l'(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} L(\alpha) d\alpha + \varepsilon(l(\alpha) - l(0)). \end{aligned}$$

Так как  $L_0$  нечетна, а  $l_0(0) = 0$ , отсюда следует (2.11).

Из (2.37) следует, что фактически  $L_0$  и  $R_0$  аналитичны в области  $D = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -\alpha_0 - \varepsilon/2] \cup [\alpha_0 + \varepsilon/2, +\infty))$ . В силу (2.24) в  $\mathbb{C}_0$  и на ее границе  $\rho_0$  непрерывна и не имеет нулей (знаменатель и числитель в ее определении не обращаются в нуль). Отсюда и из (2.11) следует, что, являясь аналитической в  $D$ , функция  $R_0$  непрерывна вплоть до ее границы (для доказательства надо из подобласти  $D$ , где  $|\operatorname{Re} \alpha| < \alpha_0 + \varepsilon/2$ , продолжать  $R_0$  в  $D$  и на ее границу с помощью уравнения (2.11)).  $\square$

**2.4. Завершение конструкции производящего решения.** Сначала определим  $R$  – решение уравнения (2.11) вдоль вещественной оси.

Пусть  $R_0$  – решение (2.11), описанное в предложении 2.1. Для  $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$ , положим  $R(\alpha) = R_0(\alpha)$ . Затем выберем  $\rho = \rho_{\mathbb{R}}$ . Заметим, что на отрезке  $(-\alpha_0, \alpha_0)$  функции  $\rho$  и  $\rho_0$  совпадают. Наконец, продолжим  $R$  с отрезка  $(-\alpha_0, \alpha_0)$  на кривую  $c_R$  с помощью уравнения (2.11). Это легко осуществимо, если  $\varepsilon < 2\alpha_0$ , но нас интересует только случай малых  $\varepsilon$ .

Определим  $T$  вдоль вещественной оси как в разделе 2.2.5.

Определим  $U$  формулами (2.1). Имеет место

**Теорема 2.1.** Пусть  $0 < \varepsilon < \min\{2\alpha_0, \pi - 2\alpha_0\}$ . Будем считать, что  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq 0$ , а  $y \geq 0$ . Функция  $U$  непрерывна по  $(x, y, \varphi)$ . При  $0 < y < -\varepsilon_1 x$  и  $y > -\varepsilon_1 x$  она бесконечно дифференцируема по  $(x, y)$  и удовлетворяет уравнению (1.1). При  $y = 0$ ,  $U$  удовлетворяет условию Дирихле, а на нижней границе клина  $W$ , т.е. при  $y = -\varepsilon_1 x$ , непрерывна ее нормальная производная. Как функция  $\varphi$ ,  $\Psi$   $\varepsilon$ -периодична.

**Доказательство.** Напомним, что условие  $0 < \varepsilon < 2\alpha_0$  было использовано для определения  $R$  на вещественной оси.

Для доказательства достаточно проверить, что ряды в (2.1) сходятся достаточно быстро. С учетом замечания 2.1 и ограниченности  $T$  вдоль вещественной оси (см. раздел 2.2.5) достаточно проверить, что  $R$  достаточно быстро убывает вдоль вещественной оси.

Пусть  $\alpha > 0$ . Так как  $0 < \varepsilon < 2\alpha_0$ , можно считать, что  $\alpha = N\varepsilon + \alpha'$  с  $\alpha' \in (-\alpha_0, \alpha_0)$  и  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Согласно (2.11)

$$R(\alpha) = \prod_{l=1}^N \rho(\alpha' + \varepsilon(l - 1/2)) R(\alpha'). \quad (2.40)$$

Из рассмотрений раздела 2.2.4 вытекают наблюдения:

- На интервалах вещественной оси  $[-\alpha_0, \alpha_0] + \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha) \in i\mathbb{R}$  и, поэтому,  $|\rho(\alpha)| = 1$ .
- На интервалах вещественной оси  $I_m = (\alpha_0, \pi - \alpha_0) + \pi m$  с  $m = 0, 1, 2 \dots$  знаки  $\sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha)$  и  $\sin \alpha$  одинаковы и, поэтому,  $|\rho(\alpha)| < 1$ .
- На интервалах вещественной оси  $I_m = (\alpha_0, \pi - \alpha_0) + \pi m$  с  $m = -1, -2 \dots$  знаки  $\sin \gamma_{\mathbb{R}}(\alpha)$  и  $\sin \alpha$  противоположены и, поэтому,  $|1/\rho(\alpha)| < 1$ .

Поскольку  $0 < \varepsilon < \pi - 2\alpha_0$ , то на каждый из интервалов  $I_m$ , расположенных между  $\alpha$  и  $\alpha'$ , попадет не менее двух точек вида  $\alpha' + \varepsilon(l-1/2)$  с  $l = 1, 2 \dots N$ . При этом одна из них обязательно попадет на его замкнутый подинтервал  $J_m = [\pi/2 - \varepsilon/2, \pi/2 + \varepsilon/2] + \pi m$ . Ясно, что существует такое  $q \in (0, 1)$ , что на  $J_0$  и  $J_1$  выполнена оценка  $|\rho(\alpha)| \leq q$ . Из (2.29) вытекает, что эта же оценка выполняется на любом из интервалов  $J_m$ . Поэтому

$$|R(\alpha)| \leq q^{(\text{число } J_m \text{ между } \alpha \text{ и } \alpha')} \asymp q^{|\alpha - \alpha'|/\pi}. \quad (2.41)$$

Отсюда следует экспоненциальное убывание  $R(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Случай, когда  $\alpha \rightarrow -\infty$  исследуется аналогично. Экспоненциальное убывание  $R$  на бесконечности достаточно для обоснования всех формальных выкладок, проведенных в разделе 2.1 и свойств гладкости  $U$ , упомянутых в теореме. Периодичность  $U$  по  $\varphi$  очевидна.  $\square$

### §3. АДИАБАТИЧЕСКИЕ НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Обозначим через  $U_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , коэффициенты Фурье  $U$  как функции  $\varphi$ . Из (2.1) вытекает, что в клине, т.е. при  $0 \leq y \leq -\varepsilon_1 x$ ,  $x \leq 0$ ,

$$U_m(x, y, \varphi) = \frac{i}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0 x \cos \alpha - 2\pi i m \alpha / \varepsilon} \sin(k_0 y \sin \alpha) R(\alpha) d\alpha, \quad (3.1)$$

а под ним, т.е. при  $y \geq -\varepsilon_1 x$ ,  $x \leq 0$ ,

$$U_m(x, y, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x \cos \beta(\alpha) + y \sin \beta(\alpha) - 2\pi m \alpha / \varepsilon)} T(\alpha) R(\alpha) d\alpha.$$

Вместе с  $U$   $U_m$  удовлетворяют уравнению (1.1) и граничным условиям на сторонах клина  $W$ . В этом разделе мы покажем, что именно эти решения и допускают при  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотические представления вида (1.5). Поэтому мы называем их адиабатическими нормальными волнами.

Ниже  $C$  обозначает положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ . Для любой заданной функции  $z \rightarrow f(z)$ ,  $O(f(z))$  обозначает функцию, удовлетворяющую оценке  $|O(f(z))| \leq C|f(z)|$ .

**3.1. Функции  $L$  и  $R$  при малых  $\varepsilon$ .** Здесь для дальнейшего исследования  $U_m$  мы изучим  $L$  и  $R$  при малых  $\varepsilon$ .

**3.2. Асимптотика  $L_0$  в  $\mathbb{C}_0$ .** Справедлива

**Теорема 3.1.** Пусть  $K_0 \subset \mathbb{C}_0$  – компакт. При достаточно малых  $\varepsilon$

$$L_0(\alpha) = l_0(\alpha) + O(\varepsilon^2), \quad \alpha \in K_0. \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Ниже  $\alpha \in K_0$ . Напомним, что  $c(\alpha)$  – вертикальная кривая в (2.37). Мы можем и будем считать, что для всех  $\alpha \in K_0$

(1)  $c(\alpha)$  расположена в  $\mathbb{C}_0$  вне фиксированной окрестности лучей  $\{\alpha \geq \alpha_0\}$  и  $\{\alpha \leq -\alpha_0\}$ ;

(2) угол  $0 < \theta < \pi/2$  между  $c(\alpha)$  и  $\mathbb{R}$  в любой точке  $c(\alpha)$  отделен от нуля некоторой положительной константой, не зависящей от  $\alpha$ .

С помощью (2.30) и (2.9) легко видеть, что

$$l'_0(\alpha) = 2ik_0 \cos \alpha / \sin \gamma_0(\alpha). \quad (3.3)$$

Отсюда вытекает, что в  $\mathbb{C}_0$  вне фиксированной окрестности лучей  $\{\alpha \geq \alpha_0\}$  и  $\{\alpha \leq -\alpha_0\}$ ,  $|l''_0(\alpha)| \leq C$ . Поэтому на  $c(\alpha)$

$$l_0(t) = l_0(\alpha) + l'_0(\alpha)(t - \alpha) + O(|t - \alpha|^2). \quad (3.4)$$

Подставляя это представление в (2.37), мы получаем

$$L_0(\alpha) = l_0(\alpha) + I(\alpha), \quad I(\alpha) = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{c(\alpha)} \frac{|t - \alpha|^2 d \operatorname{Im} t}{\left|\cos^2 \frac{\pi(t - \alpha)}{\varepsilon}\right|}\right). \quad (3.5)$$

При наших условиях на  $c(\alpha)$   $|I(\alpha)| \leq C\varepsilon^2$ . Отсюда и следует утверждение леммы.  $\square$

Заменяя (3.4) аналогичной формулой с большим числом членов ряда Тейлора для  $l_0$ , мы приходим к следующему утверждению:

**Лемма 3.1.** Для любого выбранного  $J \in \mathbb{N}$  в  $K_0$

$$L_0(\alpha) = \sum_{j=0}^{J-1} \varepsilon^{2j} l_{2j}(\alpha) + O(\varepsilon^{2J}), \quad (3.6)$$

где все  $l_{2j}$  аналитичны в  $\mathbb{C}_0$ .

**3.3. Оценки  $R$ .** Начнем с доказательства следующей леммы.

**Лемма 3.2.** Пусть  $Y > 0$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  для  $N \in \mathbb{N}$  и  $\alpha \in S = \{\alpha \in \mathbb{C}_0 : \operatorname{Re} \alpha \geq 0, \operatorname{Im} \alpha \in [+0, Y]\}$ ,

$$R_0(\alpha + N\varepsilon) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha + N\varepsilon} l_0(t) dt + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}} N)\right) R_0(\alpha), \quad (3.7)$$

где поправочный член оценивается через  $C\varepsilon^{\frac{1}{2}}N$  с константой  $C$ , не зависящей от  $\alpha$ ,  $N$  и  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Из уравнения для  $\rho_0$  и определения  $l_0$ , см. (2.11) и (2.30), следует, что

$$R_0(\alpha + N\varepsilon)/R_0(\alpha) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \sum_{l=0}^{N-1} l_0(\alpha + \varepsilon(1/2 + l))\varepsilon\right). \quad (3.8)$$

В правой части мы узнаем сумму Римана для интеграла из (3.7). Для доказательства леммы достаточно оценить их разность. Для этого заметим, что  $l_0$  – функция аналитическая в верхней полуплоскости – в ее замыкании оказывается липшицевой функцией с показателем  $1/2$ ,

$$|l_0(\alpha_1) - l_0(\alpha_2)| \leq F|\alpha_1 - \alpha_2|^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_{1,2} \in S, \quad (3.9)$$

где  $F$  – некоторая постоянная.

В любой ограниченной части  $S$  это вытекает из того, что точки ветвления  $\gamma_0$  накапливаются лишь к бесконечности, что около любой своей точки ветвления  $\alpha_*$  функция  $\gamma_0$  оказывается аналитической функцией локальной переменной  $\sqrt{\alpha - \alpha_*}$ , см. (2.13), из формулы для  $\rho_0$ , в которой ни числитель, ни знаменатель не обращаются в нуль, см. лемму 2.1, и из определения  $l_0$ , см. (2.30).

Для доказательства того, что (3.9) сохраняется во всей полуполосе  $S$  с одной и той же постоянной  $F$ , нужно воспользоваться соотношением (2.33).



Используя (3.9), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{l=0}^{N-1} l_0(\alpha + \varepsilon(1/2 + l))\varepsilon - \int_{\alpha}^{\alpha+N\varepsilon} l_0(t) dt \right| \\ &= \left| \sum_{l=0}^{N-1} \int_0^{\varepsilon} (l_0(\alpha + \varepsilon l + t) - l_0(\alpha + \varepsilon(1/2 + l))) dt \right| \\ &\leq F \sum_{l=0}^{N-1} \int_0^{\varepsilon} |t - \varepsilon/2|^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{3} FN\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы.  $\square$

Нам потребуется следствие:

**Следствие 3.1.** Пусть  $Y > 0$ . Предположим, что  $\alpha \in \mathcal{L} = \{\alpha \in \mathbb{C}_0 : \operatorname{Re} \alpha = \pi/2, \operatorname{Im} \alpha \in [0, Y]\}$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  справедлива равномерная оценка:

$$R_0(\alpha) = \exp \left( \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\alpha} l_0(t) dt + O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \right). \quad (3.10)$$

**Доказательство.** Утверждение вытекает из предыдущей леммы, предложения 2.1 и (3.2).  $\square$

Обозначим через  $R_{\mathbb{R}}$  аналитическое продолжение  $R_0$  с отрезка  $(0, \alpha_0)$  вдоль  $s_{\mathbb{R}}$  (обозначалось через  $R$  в разделе 2.4). Справедливо утверждение

**Лемма 3.3.** При достаточно малом  $\varepsilon$

$$|R_{\mathbb{R}}(\alpha)| = \exp \left( -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\alpha} \operatorname{Im} l_0(t + i0) dt + O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(1 + \alpha)) \right), \quad \alpha > 0, \quad (3.11)$$

где поправочный член оценивается через  $C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(1 + \alpha)$  с константой  $C$ , не зависящей от  $\alpha$  и  $\varepsilon$ .

**Доказательство.** Сначала аналогично (3.7) устанавливается, что при достаточно малом  $\varepsilon$  для  $N \in \mathbb{N}$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$R_{\mathbb{R}}(\alpha + N\varepsilon) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha+N\varepsilon} l_{\mathbb{R}}(t) dt + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}N)\right) R_{\mathbb{R}}(\alpha), \quad (3.12)$$

где поправочный член оценивается через  $C\varepsilon^{\frac{1}{2}}N$  с константой  $C$ , не зависящей от  $\alpha$ ,  $N$  и  $\varepsilon$ . Затем, мы убеждаемся, что при достаточно малом  $\varepsilon$  для  $\alpha \geq 0$

$$R_{\mathbb{R}}(\alpha) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\alpha} l_{\mathbb{R}}(t) dt + O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(1 + |\alpha|))\right), \quad (3.13)$$

Действительно, для  $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$   $R_{\mathbb{R}} = R_0$  и это – прямое следствие из формул (2.36) и (3.2). При  $\alpha > \varepsilon$ , мы можем представить  $\alpha$  в виде  $\alpha = \alpha' + N\varepsilon$  с  $\alpha' \in [0, \varepsilon]$  и  $N \in \mathbb{N}$ . После этого остается только воспользоваться (3.12) и (3.13) с  $\alpha'$  вместо  $\alpha$ .

Оценка (3.11) вытекает из (3.13) благодаря второй формуле в (2.35).  $\square$

**3.4. Асимптотики решения  $U_m$ .** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Здесь мы докажем теорему 1.1.

Мы фиксируем  $\Xi_1 < \Xi_2 < 0$  и будем предполагать, что  $\Xi_1 \leq \xi \leq \Xi_2$ , где  $\xi = \varepsilon_1 x$ , а  $\varepsilon_1 = \text{tg}(\varepsilon/2)$ . Кроме того мы будем считать, что  $\varepsilon$  достаточно мало.

**3.4.1. Контур интегрирования.** Напомним, что решение  $U_m$  в клине  $W$  описывается формулой (3.1) с  $R = R_{\mathbb{R}}$ . Для вычисления его асимптотики в  $W$  мы деформируем контур интегрирования в этой формуле. Опишем, как это делается.

Из определения функции  $R = R_{\mathbb{R}}$  вдоль вещественной оси, см. раздел 2.4, и выбора кривой  $c_{\mathbb{R}}$ , см. рис. 3, следует, что на отрезках  $[0, \pi - \alpha_0]$  и  $[\alpha_0 - \pi, 0]$  значения  $R$  совпадают со значениями  $R_0$  на  $[0, \pi - \alpha_0] + i0$  и  $[\alpha_0 - \pi, 0] - i0$  соответственно.

Это позволяет продеформировать контур интегрирования к кривой  $c_{\text{new}}$ , показанной непрерывной кривой на рис. 5. Число  $\delta > 0$  и центральный отрезок контура интегрирования – гладкая кривая  $c_0$ , идущая от точки пересечения с прямой  $\text{Im } \alpha = -\delta$  до точки пересечения с прямой  $\text{Im } \alpha = +\delta$  и пересекающая вещественную ось в некоторой точке  $\alpha_m$ , будут выбраны позже.

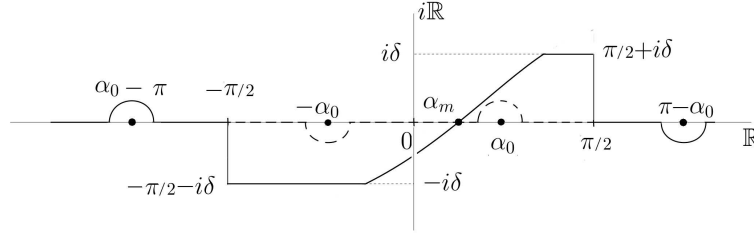


Рис. 5. Новый контур интегрирования.

Всюду ниже мы интегрируем вдоль кривой  $c_{\text{new}}$ , если специально не оговорено другое.

3.4.2. *Интеграл по  $c_0$ .* Проверим лемму:

**Лемма 3.4.** *Вклад в  $U_m$  от интеграла по  $c_0$  можно описать формулами:*

$$U_m^{(0)}(x, y) = \frac{i}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{c_0} A(\xi, y, \alpha) e^{\frac{i}{\varepsilon} S_m(\xi, \alpha)} d\alpha, \quad (3.14)$$

$$S(\xi, \alpha) = 2k_0\xi \cos \alpha - 2\pi t\alpha + \int_0^\alpha l_0(\alpha) d\alpha, \quad (3.15)$$

$$A(\xi, y, \alpha) = \sin(k_0 y \sin \alpha) (1 + O(\varepsilon^2)), \quad (3.16)$$

поправочный член в последней формуле аналитичен в  $\mathbb{C}_0$ , его оценка равномерна по  $x$ ,  $y$  и  $\alpha$ , если  $\alpha$  принадлежит заданному компакту в  $\mathbb{C}_0$ .

**Доказательство.** Напомним, что в  $\mathbb{C}_0$  функцию  $R = R_0$  можно представить в виде (2.36). Поэтому из (3.1) вытекает (3.14) с  $S$ , определенным в (3.15), и

$$A(\xi, y, \alpha) = \sin(k_0 y \sin \alpha) e^{-ik_0 x \cos \alpha (2\varepsilon_1/\varepsilon - 1) + \frac{i}{\varepsilon} \int_0^\alpha (L_0(\alpha) - l_0(\alpha)) d\alpha}.$$

Так как  $2\varepsilon_1/\varepsilon - 1 = O(\varepsilon^2)$ , а асимптотика  $L_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  описывается теоремой 3.1, из этого представления вытекает (3.16).  $\square$

**Замечание 3.1.** Пусть  $K \in \mathbb{N}$ . С учетом леммы 3.1, фактор  $A$  допускает асимптотическое разложение

$$A(\xi, y, \alpha) = \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon^k A_k(\xi, y, \alpha) + O(\varepsilon^K), \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

с  $A_0 = \sin(k_0 y \sin \alpha)$  и  $A_l$ , не зависящими от  $\varepsilon$ , аналитическими по  $(x, y) \in W$  и  $\alpha \in \mathbb{C}_0$ . Разложение равномерно по  $(x, y) \in W$  при  $\Xi_1 \leq \xi \leq \Xi_2$  и по  $\alpha$ , находящемся на заданном компакте в  $\mathbb{C}_0$ .

3.4.3. *Точка перевала.* При  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотика интеграла в (3.14) вычисляется методом перевала. Точка перевала определяется уравнением

$$S_\alpha(\xi, \alpha) = -2k_0 \xi \sin \alpha - 2\pi m + l_0(\alpha) = 0. \quad (3.18)$$

Изучим его при  $-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0$ . Для этого удобно перейти к параметру  $E = k_0^2 \cos^2(\alpha)$ . Очевидно, при  $0 < \alpha < \alpha_0$  выполнены неравенства  $1 < E < k_0^2$ . Справедлива

**Лемма 3.5.** Пусть  $\xi < \xi_m$ , где  $\xi_m$  определено в (1.3). На отрезке  $(-\alpha_0, \alpha_0)$  есть единственная точка перевала  $\alpha_m(\xi)$ . Она находится на отрезке  $(0, \alpha_0)$  и определяется уравнением (1.4). В точке перевала  $S_{\alpha\alpha} > 0$ .

**Доказательство.** Отметим, что из наблюдений раздела 2.2.3 вытекает, что

- (1) на отрезке  $(-\alpha_0, \alpha_0)$   $\gamma_0(\alpha) \in i(0, +\infty)$ ;
- (2)  $\gamma_0(\pm\alpha_0) = 0$ ;
- (3) на  $[-\alpha_0, \alpha_0]$  функция  $\operatorname{Im} \gamma_0$  имеет один (невырожденный) максимум в нуле.

Поэтому, на отрезке  $[-\alpha_0, \alpha_0]$

$$l_0(p) = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_0 \sin \alpha}{-i \sin \gamma_0(\alpha)},$$

и с ростом  $\alpha$  функция  $l_0$  монотонно растет от  $-\pi$  до  $\pi$ . Так как  $\xi < 0$ , то функция  $S_\alpha(\xi, \alpha)$  монотонно возрастает. Она возрастает от  $+2k_0 \xi \sin \alpha_0 - 2\pi m - \pi$  до  $-2k_0 \xi \sin \alpha_0 - 2\pi m + \pi$ . Поэтому при

$$-k_0 \xi \sin \alpha_0 + \pi/2 > \pi m \quad (3.19)$$

на отрезке  $(-\alpha_0, \alpha_0)$  имеется одна точка перевала  $\alpha_m$ . Очевидно,  $0 < \alpha_m < \alpha_0$ , а условие (3.19) эквивалентно неравенству  $\xi < \xi_m$ .

Пусть  $0 < \alpha < \alpha_0$ . Переходя к параметру  $E$ , получаем

$$k_0 \sin \alpha = \sqrt{k_0^2 - E}, \quad \sin \gamma_0(\alpha) = i\sqrt{E - 1}.$$

Поэтому, уравнение (3.18) эквивалентно уравнению (1.4).

Простое вычисление показывает, что

$$S_{\alpha\alpha}(\xi, \alpha) = 2k_0 \cos \alpha \left( -\xi + \frac{1}{-i \sin \gamma_0(\alpha)} \right) = 2\sqrt{E} \left( -\xi + \frac{1}{\sqrt{E - 1}} \right),$$

а отсюда следует утверждение о знаке второй производной  $S$ .  $\square$

**3.4.4. Асимптотика интеграла по кривой  $c_0$ .** Ниже мы будем считать, что  $\xi < \xi_m$ . В виду леммы 3.5 линия наискорейшего спуска, пересекающая отрезок  $(-\alpha_0, \alpha_0)$  в  $\alpha_m$ , пересекает его под углом  $\pi/4$  слева направо снизу вверх. Мы можем и будем считать, что кривая  $c_0$  – отрезок этой линии между прямыми  $\text{Im } \alpha = \pm\delta$ , а  $\delta$  – достаточно малое положительное число.

Применяя к интегралу в (3.14) метод перевала и учитывая (3.17), получим при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$U_m^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{S_{\alpha\alpha}(\xi, \alpha_m)}} e^{\frac{iS(\xi, \alpha_m)}{\varepsilon} + \frac{3i\pi}{4}} \times \left( \sin(k_0 y \sin \alpha_m) + \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon^n \psi_{m,n}(\xi, y) + O(\varepsilon^N) \right), \quad (3.20)$$

где  $\alpha_m = \alpha_m(\xi)$ ,  $\psi_{n,k}$  аналитичны при  $0 \leq y \leq -\xi$  и  $\xi \leq 0$ , а оценка погрешности равномерна при  $0 \leq y \leq -\xi$  и  $\Xi_1 \leq \xi < \Xi_2$ .

Теперь нам потребуется

**Лемма 3.6.** При  $\xi < \xi_m$ ,

$$S(\xi, \alpha_m) = 2 \int_{\xi_m}^{\xi} \sqrt{E_m} d\xi + \theta_m, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{S_{\alpha\alpha}(\xi, \alpha_m)} = -\frac{1}{2(k_0^2 - E_m)} \frac{d\sqrt{E_m}}{d\xi},$$

где  $\alpha_m = \alpha_m(\xi)$ ,  $E_m = E_m(\xi)$  – решение уравнения (1.4), а  $\theta_m$  – некоторая вещественная постоянная.

**Доказательство.** Поскольку  $S_\alpha(\alpha_m(\xi), \xi) = 0$ ,

$$\frac{dS(\xi, \alpha_m(\xi))}{d\xi} = S_\xi(\xi, \alpha_m(\xi)) = 2k_0 \cos \alpha_m(\xi) = 2\sqrt{E_m(\xi)}.$$

Поэтому,

$$S(\xi, \alpha_m(\xi)) = S(\xi_m, \alpha_m(\xi_m)) + \int_{\xi_m}^{\xi} \sqrt{E_m(\tau)} d\tau. \quad (3.22)$$

Заметим, что  $\alpha_m(\xi_m) = \alpha_0$ . Отсюда следует, что

$$S(\xi_m, \alpha_m(\xi_m)) = 2\xi_m - 2\pi m \alpha_0 + \int_0^{\alpha_0} l_0(t) dt. \quad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) следует первое соотношение в (3.21).

Используя определение  $\alpha_m$ , мы получаем, что

$$0 = \frac{d}{d\xi} S_\alpha(\xi, \alpha_m) = S_{\alpha\alpha}(\xi, \alpha_m) \alpha'_m + S_{\xi\alpha}(\xi, \alpha_m), \quad \alpha_m = \alpha_m(\xi).$$

Поскольку  $S_{\xi\alpha}(\xi, \alpha_m) = -2k_0 \sin \alpha_m$ , мы получаем

$$\frac{1}{S_{\alpha\alpha}(\xi, \alpha_m)} = \frac{\alpha'_m}{2k_0 \sin \alpha_m}.$$

Выражая этот ответ через  $E_m$ , приходим ко второму соотношению в (3.21).  $\square$

Преобразуя старший член в (3.20) с помощью доказанной леммы, получим окончательно:

$$U_m^{(0)} = \sqrt{-\frac{d\sqrt{E_m}}{d\xi}} e^{\frac{2i}{\varepsilon} \int_{\xi_m}^{\xi} \sqrt{E_m} d\xi + \frac{i\theta_m}{\varepsilon}} \times \left( \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n \psi_{m,n}(\xi, y) + O(\varepsilon^N) \right), \quad (3.24)$$

где  $E_m = E_m(\xi)$ ,  $\psi_{m,0} = \frac{\sin(\sqrt{k_0^2 - E_m} y)}{\sqrt{k_0^2 - E_m}}$ , а  $\theta_m$  – вещественная постоянная.

В ближайшем разделе мы покажем, что остальные участки контура интегрирования  $c_{\text{new}}$  дают экспоненциально малый вклад в асимптотику  $U_m$ . Это завершит доказательство теоремы 1.1.

3.4.5. *Вклады остальных участков контура.* Мы покажем, что участки контура  $c_{\text{new}}$ , расположенные справа от  $c_0$  дают в асимптотику  $U_m$  вклад экспоненциально малый при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Участки контура расположенные слева от  $c_0$  обрабатываются аналогично (удобно использовать свойства симметрии  $c_{\mathbb{R}}$ ,  $\gamma_{\mathbb{R}}$ ,  $l_{\mathbb{R}}$  и  $R_{\mathbb{R}}$  относительно нуля).

**1. Вклад отрезка  $c_1$  прямой  $\text{Im } \alpha = \delta$ , соединяющего  $c_0$  с прямой  $\text{Re } \alpha = \pi/2$ .** Рассмотрим отрезок прямой  $\text{Im } \alpha = \delta > 0$ , на котором  $0 \leq \text{Re } \alpha \leq \pi/2$ . На нем

$$\text{Im } S'_\alpha(\xi, \alpha) = -2\xi k_0 \cos(\text{Re } \alpha) \text{sh } \delta + \text{Im } l_0(\alpha) > 0. \quad (3.25)$$

Действительно, первое слагаемое неотрицательно, так как  $\xi < 0$ ; положительность второго очевидна из анализа  $l_0$ , проведенного в разделе 2.2.6, см. рис. 4. Как в доказательстве Леммы 3.4 проверяется, что вклад  $c_1$  в  $U_m$  описывается формулой (3.14) с кривой  $c_0$ , замененной на  $c_1$ . Оценка (3.25) позволяет оценить интеграл с помощью интегрирования по частям. В итоге получается, что вклад  $c_1$  в асимптотику  $U_m$  экспоненциально мал (вместе со значением подынтегрального выражения на общем с  $c_1$  конце  $c_0$  – линии наискорейшего убывания) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Мы опустим элементарные детали.

**2. Вклад отрезка  $c_2$  прямой  $\text{Re } \alpha = \pi/2$ , соединяющего  $c_1$  с вещественной осью.** Используя оценку (3.10), опять приходим к формуле (3.14) с кривой  $c_0$ , замененной на  $c_2$  и дополнительным поправочным членом  $O(1/\sqrt{\varepsilon})$  в показателе экспоненты под интегралом. Теперь экспоненциальная малость вклада вытекает из оценок

$$\begin{aligned} \text{Re } S'_\alpha(\xi, \pi/2 + iy) &= -2\xi k_0 \text{ch } y - 2\pi m + \text{Re } l_0(\pi/2 + iy) \\ &= -2\xi k_0 \text{ch } y - 2\pi m + \pi > -2\left(\xi_m \sqrt{k_0^2 - 1} \right. \\ &\quad \left. + \pi m - \pi/2\right) = 0 \quad \text{при } y \geq 0; \\ \text{Im } S(\xi, \pi/2) &= \int_0^{\pi/2} \text{Im } l_0(\alpha) d\alpha > 0. \end{aligned}$$

Обе оценки используют анализ  $l_0$ , проведенный в разделе 2.2.6, см. рис. 4. Мы опустим дальнейшие детали.

**3. Вклад луча  $c_3 = [\pi/2, +\infty)$  вещественной прямой.** Используя (3.11), мы видим, что вклад  $c_3$  оценивается выражением

$$\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Im} l_0(t) dt}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{\pi/2}^{\infty} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\pi/2}^{\alpha} \operatorname{Im} l_0(t+i0) dt + O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}(1+\alpha))} d\alpha.$$

Теперь экспоненциальная малость вклада вытекает из уже использованной оценки  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{Im} l_0(\alpha) d\alpha > 0$ , из  $\pi$ -периодичности  $\operatorname{Im} l_0$ , см. (2.33), и того, что  $\operatorname{Im} l_0 \geq 0$  на периоде  $[0, \pi]$  и положительна на отрезке  $[\alpha_0, \pi/2]$ . Два последних наблюдения легко получаются с помощью анализа рис. 4.

На этом доказательство теоремы 1.1 заканчивается.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. M. Arnold, L. B. Felsen, *Rays and local modes in a wedge-shaped ocean*. — J. Acoust. Soc. Amer. **73** (1983), 1105–1119.
2. V. Babich, M. Lyalinov, V. Grikurov, *Diffraction theory: the Sommerfeld-Malyuzhinets technique*. Oxford, Alpha Science (2008).
3. L. Brekhovskikh, Yu. Lysanov, *Fundamentals of ocean acoustics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH (1982).
4. В. С. Булдырев, В. С. Буслаев, *Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117** (1981), 39–77.
5. Frank W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*. New York, Academic Press (1974).
6. A. B. Smirnov, A. A. Fedotov, *Adiabatic Evolution Generated by a Schrödinger Operator with Discrete and Continuous Spectra*. — Funct. Anal. Appl. **50** (2016), 76–79.
7. A. Fedotov, *Adiabatic evolution generated by a one-dimensional Schrödinger operator with decreasing number of eigenvalues*. (2016). [arXiv:1609.09473](https://arxiv.org/abs/1609.09473)
8. A. D. Pierce, *Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost stratified medium*. — J. Acoust. Soc. Amer. **37** (1965).
9. A. D. Pierce, *Guided mode disappearance during upslope propagation in variable depth shallow water overlying a fluid bottom*. — J. Acoust. Soc. Amer. **72** (1982), 523–531.
10. S. Teufel, *Adiabatic Perturbation Theory in Quantum Dynamics*. — Lec. Notes Math. **1821**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2003).
11. R. Wong, *Asymptotic approximations of integrals*. Philadelphia, SIAM (2001).



Fedotov A. A. On adiabatic normal modes in a wedge shaped sea.

We study a two-dimensional problem that is a model for sound propagation in a narrow water wedge near the shore of a sea. We explicitly construct a solution to the Helmholtz equation that is asymptotically a normal wave propagating along “water” wedge to the “shore”. The solution satisfies the Helmholtz equation in the quadrant one side of which is “the surface of the water”, and the second is perpendicular to it, starts at the top of the wedge and goes into the “bottom”. Boundary conditions at wedge boundaries and at infinity in the “ bottom ” are satisfied.

С.-Петербургский  
государственный университет  
*E-mail*: a.fedotov@spbu.ru

Поступило 6 ноября 2018 г.