

С. А. Симонов

## ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [14] было введено понятие волнового спектра симметричного полуограниченного снизу оператора. Волновой спектр строится как топологическое пространство, определяемое оператором. В той же работе волновой спектр был изучен для оператора Лапласа на компактном многообразии и было установлено, что в общей ситуации на волновом спектре можно таким образом ввести метрику, что он становится изометричным исходному многообразию. В работе [3] была предложена схема построения функциональной модели такого оператора, названной *волновой моделью* и основанной на понятии волнового спектра. В качестве модельного пространства бралось пространство функций на волновом спектре. График модельного оператора восстанавливался с помощью метода граничного управления, на котором основана и конструкция волнового спектра. Эта схема в [3] была реализована для положительно определенного оператора Шредингера на полуоси в случае предельной точки. Точнее, волновая модель была построена для симметричного сужения такого оператора с индексами дефекта  $(1, 1)$ .

В данной работе мы строим волновую модель симметричного положительно определенного оператора с индексами дефекта  $(2, 2)$ , а именно, симметричного сужения регулярного оператора Штурма–Лиувилля, заданного дифференциальным выражением  $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$  на отрезке  $[0, l]$  с граничными условиями  $u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0$ . Потенциал  $q$  предполагается гладким и обеспечивающим положительную определенность оператора. Попутно мы уточняем и развиваем абстрактную схему волновой модели.

---

*Ключевые слова:* функциональная модель симметрического оператора, система Грина, волновой спектр, обратная задача.

Работа поддержана грантом РФФИ 18-31-00185мол\_а.

Статья состоит из двух частей. В первой, абстрактной, части дается определение волнового спектра и описывается схема построения волновой модели. Стараясь сохранить некоторый уровень общности, мы формулируем набор условий, которым должен удовлетворять симметричный оператор для построения модели. Условия сформулированы в довольно абстрактных терминах, поэтому их проверку можно произвести лишь по ходу построения модели конкретного оператора. Вторая часть статьи посвящена реализации схемы для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке, в ней введенные в первой части объекты описываются явным образом и выполнение условий проверяется непосредственно.

Важная особенность волновой функциональной модели состоит в том, что она оказывается практически тождественной оригиналу (исходному оператору). Так происходит в рассмотренном ранее примере [3] и в нашем случае. Данные обратной задачи (спектральные, динамические) в каких-то случаях позволяют построить некую «вспомогательную модель», то есть модельное пространство и оператор в нем, унитарно эквивалентный оригинальному оператору. В этом смысле можно различать объекты, доступные «внешнему наблюдателю» (те, что можно получить из данных обратной задачи), и доступные «внутреннему наблюдателю» (те, что можно получить, зная оригинал, решение обратной задачи). Зная вспомогательную модель, «внешний наблюдатель» сможет построить ее волновую модель, из которой легко восстановить оригинал. В наших примерах волновая модель оказывается дифференциальным оператором. Из коэффициентов этого оператора можно явным образом получить потенциал оригинального оператора. В случае регулярного оператора Штурма–Лиувилля потенциал восстанавливается с точностью до отражения от середины отрезка  $[0, l]$ .

Результаты работы были анонсированы в [19], где было дано краткое описание построенной здесь конструкции.

## §1. АБСТРАКТНАЯ СХЕМА

**1.1. Оператор  $L_0$ .** Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  задан замкнутый симметричный линейный оператор  $L_0$  и он положительно определен: существует такое  $\varkappa > 0$ , что для любого  $u \in \text{Dom } L_0$  выполняется  $(L_0 u, u) \geq \varkappa \|u\|^2$ . Обозначим через  $L$  самосопряженное расширение оператора  $L_0$  по Фридрихсу [5]. Для любого

$u \in \text{Dom } L$  выполнено  $(Lu, u) \geq \varkappa \|u\|^2$ , существует ограниченный обратный оператор  $L^{-1}$ .

**1.2. Система Грина.** Пусть  $A$  – оператор в  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{B}$  – гильбертово пространство,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – линейные операторы, действующие из  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{B}$ . Пусть выполнены следующие условия:

$$\overline{\text{Dom } A} = \mathcal{H}, \quad \text{Dom } A \subseteq \text{Dom } \Gamma_1 \cap \text{Dom } \Gamma_2, \quad \overline{\text{Ran } \Gamma_1 + \text{Ran } \Gamma_2} = \mathcal{B}.$$

Набор  $\mathfrak{G} = \{\mathcal{H}, \mathcal{B}; A, \Gamma_1, \Gamma_2\}$  называется *системой Грина*, если для любых  $u, v \in \text{Dom } A$  выполнено равенство

$$(Au, v)_{\mathcal{H}} - (u, Av)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\mathcal{B}} - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v)_{\mathcal{B}} \quad (1.1)$$

(формула Грина), [9, 16, 18]. Пространство  $\mathcal{H}$  называется *внутренним*,  $\mathcal{B}$  – *пространством граничных значений*,  $A$  – *основным оператором*,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – *граничными операторами*.

Классу операторов  $L_0$ , рассматриваемому нами, каноническим образом соответствует класс систем Грина. Обозначим

$$\mathcal{K} := \text{Ker } L_0^*,$$

$P_{\mathcal{K}}$  – ортогональный проектор на подпространство  $\mathcal{K}$  в  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbb{0}$  – нулевой оператор в  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbb{1}$  – единичный оператор. Пусть

$$\Gamma_1 := L^{-1}L_0^* - \mathbb{1}, \quad \Gamma_2 := P_{\mathcal{K}}L_0^*. \quad (1.2)$$

Тогда набор  $\mathfrak{G}_{L_0} := \{\mathcal{H}, \mathcal{K}; L_0^*, \Gamma_1, \Gamma_2\}$  образует систему Грина [2]. Такая система связана с *разложением Вишика*, для оператора  $L_0$ , имеющим вид

$$\text{Dom } L_0^* = \text{Dom } L_0 \dot{+} L^{-1}\mathcal{K} \dot{+} \mathcal{K} \quad (1.3)$$

( $\dot{+}$  обозначает прямую сумму линейалов). Граничные операторы записываются в терминах этого разложения следующим образом [6]: если  $u \in \text{Dom } L_0^*$  представлен в виде

$$u = u_0 + L^{-1}g_u + h_u, \quad (1.4)$$

где  $u_0 \in \text{Dom } L_0$ ,  $g_u, h_u \in \mathcal{K}$ , то

$$\Gamma_1 u = -h_u, \quad \Gamma_2 u = g_u. \quad (1.5)$$

**1.3. Система с граничным управлением.** Рассмотрим следующую задачу, соответствующую системе Грина  $\mathfrak{G}_{L_0}$ :

$$u_{tt} + L_0^* u = 0, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad (1.7)$$

$$\Gamma_1 u = h, \quad t \geq 0, \quad (1.8)$$

где  $h = h(t)$ ,  $\mathcal{K}$ -значная функция времени, называется *граничным управлением*, а ищется  $\mathcal{H}$ -значная функция  $u(t) = u^h(t)$ . В теории управления  $u^h(\cdot)$  называют *траекторией*,  $u^h(t)$  – *состоянием* в момент  $t$ ; мы будем называть  $u^h$  *волной*. Систему (1.6)–(1.8) обозначим  $\alpha_{L_0}$ .

Задача (1.6)–(1.8) имеет решение [2], если управление  $h$  лежит в классе

$$\mathcal{M} := \{h \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{K}) : \text{supp } h \subset (0, \infty)\}. \quad (1.9)$$

Такое решение записывается в виде

$$u^h(t) = -h(t) + \int_0^t L^{-\frac{1}{2}} \sin \left[ (t-s)L^{\frac{1}{2}} \right] h_{tt}(s) ds, \quad t \geq 0, \quad (1.10)$$

лежит в  $C^\infty([0, \infty); \mathcal{H})$  и аннулируется вблизи нуля. Будем называть такие  $u^h$  *классическими решениями* и *гладкими волнами*.

Множество состояний системы  $\alpha_{L_0}$

$$\mathcal{U}_{L_0}^t := \{u^h(t), h \in \mathcal{M}\} \subseteq \text{Dom } L_0^* \quad (1.11)$$

называется *достижимым множеством* за время  $t \geq 0$ . Легко видеть, что  $\mathcal{U}_{L_0}^t$  расширяется с ростом  $t$ . Множество

$$\mathcal{U}_{L_0} := \bigcup_{t>0} \mathcal{U}_{L_0}^t \quad (1.12)$$

называется *полным достижимым множеством* системы  $\alpha_{L_0}$ , а его ортогональное дополнение

$$\mathcal{D}_{L_0} := \mathcal{H} \ominus \overline{\mathcal{U}_{L_0}}$$

называется *дефектным подпространством* системы  $\alpha_{L_0}$ . Линеалы  $\mathcal{U}_{L_0}^t$  и  $\mathcal{U}_{L_0}$  инвариантны относительно  $L_0^*$ : пусть  $T \geq 0$  и  $u = u^h(T) \in \mathcal{U}_{L_0}^T$ , тогда

$$L_0^* u^h(T) \stackrel{(1.6)}{=} -u_{tt}^h(T) \stackrel{(1.10)}{=} -u^{h_{tt}}(T) \in \mathcal{U}_{L_0}^T,$$

$$u^h(T) \stackrel{(1.7)}{=} J^2[u_{tt}^h](T) \stackrel{(1.10)}{=} u_{tt}^{J^2 h}(T) \stackrel{(1.6)}{=} -L_0^* u^{J^2 h}(T) \in L_0^* \mathcal{U}_{L_0}^T,$$

где  $J : u \mapsto \int_0^t u(s) ds$ , откуда следует, что  $L_0^* \mathcal{U}_{L_0} = \mathcal{U}_{L_0}$ .

Система  $\alpha_{L_0}$  называется *управляемой*, если  $\overline{\mathcal{U}_{L_0}} = \mathcal{H}$ . Известен следующий факт [2].

**Предложение 1.** *Управляемость системы  $\alpha_{L_0}$  равносильна тому, что оператор  $L_0$  вполне несамосопряжен.*

Сужение оператора  $L_0^*$  на линейал гладких волн  $\mathcal{U}_{L_0} \subseteq \text{Dom } L_0^*$  не обязательно является замкнутым оператором. Его замыкание  $\overline{L_0^*|_{\mathcal{U}_{L_0}}} \subseteq L_0^*$  называется *волновой частью* оператора  $L_0^*$ . В случае, если оператор  $L_0$  вполне несамосопряжен, возникает вопрос о том, совпадает ли оператор  $L_0^*$  со своей волновой частью. В известных нам примерах происходит именно так, но доказательства общего факта нам не известно.

**1.4. Волновой спектр.** Функциональная модель оператора  $L_0$ , которую мы строим, основана на волновом спектре оператора. Для его определения мы используем понятия из теории решеток.

*Решеткой* называется частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента  $p, q$  имеют точную верхнюю грань  $\sup\{p, q\} = p \vee q$  (наименьший элемент множества всех верхних граней) и точную нижнюю грань  $\inf\{p, q\} = p \wedge q$  (наибольший элемент множества всех нижних граней). Решетка называется *полной*, если любое ее подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани. В полной решетке всегда есть наибольший и наименьший элементы.

Пусть  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  – частично упорядоченные множества,  $i$  – отображение из  $\mathcal{P}$  в  $\mathcal{Q}$ . Отображение  $i$  называется *изотонным*, если из  $p_1 \leq p_2$  в  $\mathcal{P}$  следует  $i(p_1) \leq i(p_2)$  в  $\mathcal{Q}$  [4]. Семейство отображений  $\{i^t\}_{t \geq 0}$  из  $\mathcal{P}$  в  $\mathcal{Q}$ , для которых из  $p_1 \leq p_2$  и  $t_1 \leq t_2$  следует  $i^{t_1}(p_1) \leq i^{t_2}(p_2)$ , мы называем *изотонией*.

Пусть  $\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \mathcal{L}$  – полная решетка и  $O_{\mathcal{L}}$  – ее наименьший элемент. Тогда изотонию  $I^t$  называют *изотонией решетки  $\mathcal{L}$* , если  $I^0$  – тождественное отображение в  $\mathcal{L}$  и для любого  $t \geq 0$  выполняется  $I^t(O_{\mathcal{L}}) = O_{\mathcal{L}}$ .

Пусть частично упорядоченное множество  $\mathcal{P}$  содержит наименьший элемент  $O_{\mathcal{P}}$ . Элемент  $p \neq O_{\mathcal{P}}$  называется *атомом*  $\mathcal{P}$ , если не существует такого элемента  $p' \in \mathcal{P}$ , что  $O_{\mathcal{P}} < p' < p$ .

Пусть  $\mathfrak{L}$  – полная решетка,  $O_{\mathfrak{L}}$  – ее наименьший элемент,  $E_{\mathfrak{L}}$  – наибольший. Если для любого  $p \in \mathfrak{L}$  найдется такой элемент  $p' \in \mathfrak{L}$ , что  $p \vee p' = E_{\mathfrak{L}}$ ,  $p \wedge p' = O_{\mathfrak{L}}$  (*дополнение*), то  $\mathfrak{L}$  называется *решеткой с дополнениями*.

1.4.1. *Решетка подпространств*. Мы будем работать с решетками и изотониями специального вида.

Множество  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  всех подпространств гильбертового пространства  $\mathcal{H}$  с частичным порядком  $\subseteq$  образует полную решетку с дополнениями: для  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , как легко проверить,  $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2 = \overline{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}$  и  $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ ,  $\{0\}$  является наименьшим элементом,  $\mathcal{H}$  – наибольшим,  $\mathcal{G}^{\perp}$  является дополнением элемента  $\mathcal{G} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ .

Будем называть  $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$  *подрешеткой  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  с дополнениями*, если  $\mathfrak{L}$  содержит  $\{0\}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$ ,  $\mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$  для всех  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathfrak{L}$  и  $\mathcal{G}^{\perp}$  для всех  $\mathcal{G} \in \mathfrak{L}$ . Для любого подмножества  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$  существует минимальная подрешетка с дополнениями  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}}$  в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , содержащая  $\mathfrak{M}$ . Если  $I^t$  – изотония решетки  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , то существует также минимальная подрешетка с дополнениями  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}}^I$  в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , содержащая  $\mathfrak{M}$  и инвариантная относительно  $I$ : для любого  $\mathcal{G} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{M}}^I$  и  $t \geq 0$  выполняется  $I^t(\mathcal{G}) \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{M}}^I$ , [3].

На решетке подпространств  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  естественным образом вводится топология. Последовательность  $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  из  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  сходится к  $\mathcal{G} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$  при  $n \rightarrow \infty$ , если соответствующие проекторы сходятся в сильном смысле:  $P_{\mathcal{G}_n} \xrightarrow{s} P_{\mathcal{G}}$ . Заметим, что сильная операторная топология, суженная на множество ортогональных проекторов, удовлетворяет первой аксиоме счетности и описывается в терминах сходящихся последовательностей, [17].

Пусть  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$  обозначает множество всех функций из  $[0, \infty)$  в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  с заданным поточечно порядком:  $f_1 \leq f_2$ , если для любого  $t \geq 0$  выполняется  $f_1(t) \leq f_2(t)$  в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  (то есть  $f_1(t) \subseteq f_2(t)$ ). В таком случае решеточные операции будут также действовать поточечно:

$$\begin{aligned} (f_1 \vee f_2)(t) &= f_1(t) \vee f_2(t), \\ (f_1 \wedge f_2)(t) &= f_1(t) \wedge f_2(t), \\ (f^{\perp})(t) &= (f(t))^{\perp}. \end{aligned}$$

Топология сильной операторной сходимости порождает на  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$  топологию произведения (топологию поточечной сходимости), которая не удовлетворяет первой аксиоме счетности и описывается в терминах сходящихся направленностей, а не последовательностей. Оказывается, что объекты, с которыми мы работаем, не требуют введения топологии на  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$  и что можно обойтись лишь операцией секвенциального замыкания (такой операции соответствует не единственная топология). Существует вариант нашей конструкции волновой модели, основанный на топологии прямого произведения в  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ . В известных нам примерах оба варианта приводят в конечном итоге к одной и той же конструкции (так как совпадают волновые спектры).

Обозначим  $I\mathfrak{L}(\mathcal{H}) := \{I^t(\mathcal{G}), \mathcal{G} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})\}$  множество изотонных функций со значениями в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , получающихся действием изотонии  $I$  на элементы решетки  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ . Секвенциальное замыкание этого множества в  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$  обозначим  $[I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $I$  есть изотония решетки  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ . Элементы  $[I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}}$  являются изотонными функциями.

**Доказательство.** Пусть  $f \in [I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}}$ . Тогда существует такая последовательность  $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , что для любого  $t \geq 0$  верно

$$f(t) = \mathfrak{L}(\mathcal{H}) - \lim_{n \rightarrow \infty} I^t(\mathcal{G}_n).$$

Пусть  $t_1 \leq t_2$ . Тогда

$$P_{f(t_1)} = s - \lim_{n \rightarrow \infty} P_{I^{t_1}(\mathcal{G}_n)}, \quad P_{f(t_2)} = s - \lim_{n \rightarrow \infty} P_{I^{t_2}(\mathcal{G}_n)}.$$

Из включения  $I^{t_1}(\mathcal{G}_n) \subseteq I^{t_2}(\mathcal{G}_n)$  и равенства  $P_{I^{t_2}(\mathcal{G}_n)}P_{I^{t_1}(\mathcal{G}_n)} = P_{I^{t_1}(\mathcal{G}_n)}$  получаем при любом  $x$

$$\begin{aligned} P_{I^{t_2}(\mathcal{G}_n)}P_{I^{t_1}(\mathcal{G}_n)}x &= P_{I^{t_2}(\mathcal{G}_n)}(P_{I^{t_1}(\mathcal{G}_n)} - P_{f(t_1)})x \\ &\quad + (P_{I^{t_2}(\mathcal{G}_n)} - P_{f(t_2)})P_{f(t_1)}x + P_{f(t_2)}P_{f(t_1)}x. \end{aligned}$$

В силу сходимости и ограниченности норм,  $\|P_{I^{t_2}(\mathcal{G}_n)}\| = 1$ , получаем, что  $P_{I^{t_2}(\mathcal{G}_n)}P_{I^{t_1}(\mathcal{G}_n)} \xrightarrow{s} P_{f(t_2)}P_{f(t_1)}$  при  $n \rightarrow \infty$  и выполняется равенство  $P_{f(t_2)}P_{f(t_1)} = P_{f(t_1)}$ , что означает включение  $f(t_1) \subseteq f(t_2)$ .  $\square$

На множестве  $[I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}}$  определим «шары»

$$B_r(f) = \{g \in [I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}} : \exists t > 0 : g(t) \neq 0, g(t) \subset f(r)\}.$$

**Лемма 2.** Пусть  $I$  есть изотония решетки  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ . Тогда система подмножеств  $\{B_r(f), f \in [I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}}, r > 0\}$  является базой некоторой топологии на  $[I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}}$ .

**Доказательство.** Проверим условие того, что система является базой топологии: пусть  $f \in B_{r_1}(f_1) \cap B_{r_2}(f_2)$ . Докажем, что существует такой радиус  $r$ , что  $B_r(f) \subseteq B_{r_1}(f_1) \cap B_{r_2}(f_2)$ . Есть такие  $t_1$  и  $t_2$ , что  $f(t_1), f(t_2) \neq \{0\}$ ,  $f(t_1) \subseteq f_1(r_1)$ ,  $f(t_2) \subseteq f_2(r_2)$ . Так как  $f$  – изотонная функция по лемме 1, то для  $r := \min\{t_1, t_2\}$  имеем  $f(r) \subseteq f_1(r_1) \cap f_2(r_2)$ , при этом  $f(r) \neq \{0\}$ . Тогда для любого  $g \in B_r(f)$  найдется такое  $t_g > 0$ , что  $g(t_g) \neq \{0\}$  и  $g(t_g) \subseteq f(r) \subseteq f_1(r_1) \cap f_2(r_2)$ , то есть  $g(t_g) \subseteq f_1(r_1)$  и  $g(t_g) \subseteq f_2(r_2)$ . Это означает, что  $g \in B_{r_1}(f_1)$  и  $g \in B_{r_2}(f_2)$ , то есть  $g \in B_{r_1}(f_1) \cap B_{r_2}(f_2)$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Замечание 1.** Если вместо  $[I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}}$  рассматривать  $\overline{I\mathfrak{L}(\mathcal{H})}$ , замыкание множества функций  $I\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  в топологии поточечной сходимости в решетке  $\mathfrak{F}$ , то будут верны аналоги лемм 1 и 2. В доказательстве леммы 1 в таком случае нужно заменить последовательность  $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  направленностью  $\{\mathcal{G}_\alpha\}$ . Шаровая топология на  $[I\mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}} \subset \mathfrak{F}(\mathcal{H})$ , очевидно, отличается от топологии поточечной сходимости.

1.4.2. *Волновая изотония.* Для каждого положительно определенного самосопряженного оператора  $A$  можно определить изотонию решетки  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  следующим образом. Рассмотрим систему

$$v_{tt} + Av = g, \quad t > 0, \quad (1.13)$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0, \quad (1.14)$$

где  $g$  есть  $\mathcal{H}$ -значная функция времени. Если  $g \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{H})$ , то задача имеет единственное решение  $v = v^g(t)$ , дающееся формулой Дюамеля [5]:

$$v^g(t) = \int_0^t A^{-\frac{1}{2}} \sin \left[ (t-s)A^{\frac{1}{2}} \right] g(s) ds. \quad (1.15)$$

Пусть  $\mathcal{G} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ . Рассмотрим множества

$$\mathcal{V}_A^t(\mathcal{G}) := \{v^g(t), g \in C^\infty([0, t]; \mathcal{G})\} \quad (1.16)$$



и определим семейство отображений  $\{I_A^t\}_{t \geq 0}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} I_A^0 &:= \text{id}; \\ I_A^t(\mathcal{G}) &:= \overline{\mathcal{V}_A^t(\mathcal{G})}, t > 0. \end{aligned}$$

**Предложение 2** ([14]). Семейство  $\{I_A^t\}_{t \geq 0}$  является изотонией решетки  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ .

Такую изотонию  $I_A^t$  мы называем *волновой изотонией* решетки  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , порожденной оператором  $A$ .

1.4.3. *Волновой спектр.* Обратимся к исходной задаче. Семейство достижимых множеств системы  $\alpha_{L_0}$  задает семейство подпространств  $\mathfrak{M}_{L_0} = \{\mathcal{U}_{L_0}^t, t \geq 0\} \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , а оператор  $L$  определяет волновую изотонию  $I_L^t$ . Как отмечалось выше, существует минимальная подрешетка  $\mathfrak{L}_{L_0}$  в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , содержащая семейство  $\mathfrak{M}_{L_0}$  и инвариантная относительно изотонии  $I_L^t$ . Обозначим  $I_L \mathfrak{L}_{L_0} = \{I_L(\mathcal{G}), \mathcal{G} \in \mathfrak{L}_{L_0}\}$ , замыкание (секвенциальное) этого множества в  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$  обозначим  $[I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$ .

*Волновым спектром*  $\Omega_{L_0}$  оператора  $L_0$  называется множество атомов частично упорядоченного множества  $[I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$ ,

$$\Omega_{L_0} := \text{At}[I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}.$$

Построение функциональной модели, то есть унитарно эквивалентного оператора в модельном пространстве, требует от  $L_0$  выполнения дополнительных условий. Рассмотренные ранее примеры [14, 3] показывают, что конструкция волновой модели имеет смысл для целого класса дифференциальных операторов. По ходу построения модели мы формулируем дополнительные условия на оператор  $L_0$  в универсальных терминах, но опираясь на вводимые понятия.

**Условие 1.** Волновой спектр оператора  $L_0$  не пуст:  $\Omega_{L_0} \neq \emptyset$ .

Шаровая топология на  $[I_L \mathfrak{L}(\mathcal{H})]_{\text{seq}}$  определяет топологию на волновом спектре. При дополнительных предположениях на  $\Omega_{L_0}$  можно определить и метрику (в упоминавшихся примерах «шары»  $B_r(f)$  оказываются открытыми шарами в этой метрике). Каждый атом  $\omega \in \Omega_{L_0}$ , являясь функцией из  $[0, \infty)$  в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ , определяет расширяющееся семейство проекторов  $P_{\omega(t)}$ . Если  $P_{\omega(t)} \xrightarrow{s} I$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то можно определить (вообще говоря, неограниченный) самосопряженный оператор

$$\tau_\omega = \int_0^\infty t dP_{\omega(t)},$$

*эйконал.* Может случиться так, что даже для неограниченных  $\tau$  окажется выполненным следующее.

**Условие 2.** Для любого  $\omega \in \Omega_{L_0}$  выполняется  $P_{\omega(t)} \xrightarrow{s} I$  при  $t \rightarrow +\infty$ , при этом для любых  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{L_0}$  разность  $\tau_{\omega_1} - \tau_{\omega_2}$  является ограниченным оператором в  $\mathcal{H}$ .

В таком случае в качестве расстояния на  $\Omega_{L_0}$  можно взять функцию

$$\tau(\omega_1, \omega_2) = \|\tau_{\omega_1} - \tau_{\omega_2}\|$$

(свойства расстояния легко проверяются). Для волнового спектра также можно определить «границу»  $\partial\Omega_{L_0}$  как множество

$$\partial\Omega_{L_0} := \{\omega \in \Omega_{L_0} : \forall t > 0 \omega(t) \subseteq \overline{\mathcal{U}_{L_0}^t}\}.$$

В случае оператора Лапласа на компактном римановом многообразии «граница» волнового спектра соответствует границе многообразия [14].

**1.5. Волновая модель.** Наша цель – построить волновую модель так, чтобы конструкция была применима не только к самому оператору  $L_0$ , но и к его унитарным копиям. Для этого важно, чтобы модель была построена с использованием только тех объектов, которые доступны «внешнему наблюдателю».

1.5.1. *Волновое представление.* Если для оператора  $L_0$  выполнены условия 1 и 2, то его волновой спектр является метрическим пространством с расстоянием  $\tau$ . Модельное пространство для волновой модели должно состоять из функций на  $\Omega_{L_0}$ , принимающих значения в «естественных» вспомогательных пространствах.

Первый шаг в конструкции модельного пространства – пространства ростков над атомами. Для каждого  $\omega \in \Omega_{L_0}$ , введем отношение эквивалентности на  $\mathcal{H}$ :  $u_1 \underset{\omega}{\sim} u_2$ , если существует такое  $t > 0$ , что  $P_{\omega(t)}u_1 = P_{\omega(t)}u_2$ . Возникающие классы эквивалентности  $\tilde{u}(\omega)$  называются *ростками*. Ростки образуют линейное пространство, которое

обозначим  $\tilde{\mathcal{H}}_\omega$  и будем называть *стеблем* над  $\omega$ . Рассмотрим пространство функций на волновом спектре со значениями в стеблях

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{\tilde{u}(\cdot), u \in \mathcal{H}\}.$$

Нужно, чтобы оператор  $W$  перехода от  $\mathcal{H}$  к  $\tilde{\mathcal{H}}$ , действующий по правилу  $W : u \mapsto \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{H}}$ , был биективным, для этого накладывается следующее условие, которое мы называем *полнотой системы атомов* волнового спектра.

**Условие 3.** Для любого ненулевого  $u \in \mathcal{H}$  найдется такой атом  $\omega \in \Omega_{L_0}$ , что для сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  верно  $P_{\omega(\varepsilon)}u \neq 0$ .

С таким пространством работать неудобно, так как стебли имеют бесконечную размерность. Кроме того, отсутствует гильбертова структура. Нам требуются дополнительные условия. Возможность дальнейшей факторизации в ростках связана с существованием калибровочных элементов в  $\mathcal{H}$ , для определения которых необходимо следующее условие *исчезновения атомов в нуле*.

**Условие 4.** Для любого  $\omega \in \Omega_{L_0}$  верно  $\omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow +0} \{0\}$  при  $t \rightarrow +0$ .

По лемме 1 это равносильно условию  $\bigcap_{t>0} \omega(t) = \{0\}$  для любого атома. Мы называем элемент  $e \in \mathcal{H}$  *калибровочным* оператором  $L_0$ , если существует такое множество атомов  $\Omega_{L_0}^e \subseteq \Omega_{L_0}$ , элементы которого образуют полную систему в смысле условия 3, что для любого  $u \in \mathcal{U}_{L_0}$  и  $\omega \in \Omega_{L_0}^e$  существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\|P_{\omega(t)}u\|_{\mathcal{H}}}{\|P_{\omega(t)}e\|_{\mathcal{H}}}.$$

Как видно, здесь особую роль начинает играть линеал гладких волн.

**Условие 5.** У оператора  $L_0$  существует калибровочный элемент.

Пусть  $\omega \in \Omega_{L_0}^e$ . Для любых  $u, v \in \mathcal{U}_{L_0}$  существует предел

$$\langle u, v \rangle_\omega := \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(P_{\omega(t)}u, v)_{\mathcal{H}}}{(P_{\omega(t)}e, e)_{\mathcal{H}}}.$$

Этот предел можно рассматривать как неотрицательную полуторалинейную форму на множестве  $\tilde{\mathcal{U}}_{L_0, \omega} := \{\tilde{u}(\omega), u \in \mathcal{U}_{L_0}\}$ , линеале в стебле над  $\omega$ . После факторизации  $\tilde{\mathcal{U}}_{L_0, \omega}$  по нейтральному подпространству этой формы  $\tilde{\mathcal{U}}_{L_0, \omega}^0$  мы получаем линейное пространство  $\tilde{\mathcal{U}}_{L_0, \omega} / \tilde{\mathcal{U}}_{L_0, \omega}^0$ ,

элементы которого будем обозначать  $[u](\omega)$ ,  $u \in \mathcal{U}_{L_0}$ , со скалярным произведением

$$\langle [u](\omega), [v](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} = \langle u, v \rangle_\omega.$$

После пополнения по соответствующей норме получим *пространство значений*  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$ .

**Условие 6.** На  $\Omega_{L_0}$  существует такая мера  $\mu$ , что  $\mu(\Omega_{L_0} \setminus \Omega_{L_0}^e) = 0$  и для любых  $u, v \in \mathcal{U}_{L_0}$  выполняется

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega_{L_0}} \langle [u](\omega), [v](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} d\mu(\omega). \quad (1.17)$$

Пространство

$$\mathcal{H}^w := \oplus \int_{\Omega_{L_0}} \mathcal{U}_{L_0, \omega}^w d\mu(\omega)$$

будем называть *волновым представлением* пространства  $\mathcal{H}$ . Для оператора  $W_0^w : \mathcal{U}_{L_0} \rightarrow \mathcal{H}^w$ , действующего по правилу  $u \mapsto [u](\cdot)$ , благодаря (1.17) оказывается  $\|W_0^w u\|_{\mathcal{H}} = \|[u]\|_{\mathcal{H}^w}$ , поэтому оператор перехода  $W^w = \overline{W_0^w}$  изометричен.

**Условие 7.** Оператор  $W^w$  перехода от  $\mathcal{H}$  к  $\mathcal{H}^w$  унитарен.

Пространство  $\mathcal{H}^w$  мы рассматриваем в качестве модельного пространства. Оператор  $W^w$  определяет унитарную копию  $W^w L_0^* W^{w*}$  оператора  $L_0^*$ , действующую в  $\mathcal{H}^w$ . Поскольку для  $u \in \mathcal{U}_{L_0}$  есть такое управление  $h \in \mathcal{M}$  и  $T \geq 0$ , что  $u = u^h(T)$ , мы можем записать

$$L_0^* u = L_0^* u^h(T) = -u_{tt}^h(T) = -u^{h_{tt}}(T).$$

График унитарного образа волновой части оператора  $L_0^*$  можно задать с помощью гладких волн:

$$\begin{aligned} \text{Graph}(W^w L_0^*|_{\mathcal{U}_{L_0}} W^{w*}) &= \{(W^w u, W^w L_0^* u), u \in \mathcal{U}_{L_0}\} \\ &= \{(W^w u^h(T), -W^w u^{h_{tt}}(T)), h \in \mathcal{M}, T \geq 0\}. \end{aligned}$$

Этот способ построения волновой модели доступен «внешнему наблюдателю», умеющему задавать различные управления и строить графики.

1.5.2. *Координатное представление.* Если индексы дефекта оператора  $L_0$  конечны, то при дополнительных предположениях можно ввести координаты в пространствах значений  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$  и перейти к волновой модели, в которой оператор будет представляться дифференциальным оператором, действующим в пространстве квадратично суммируемых функций.

**Условие 8.** Оператор  $L_0$  имеет индексы дефекта  $(n, n)$ ,  $n < \infty$ . Подпространство  $\text{Ker} L_0^*$  лежит в  $\mathcal{U}_{L_0}$ . Существуют такие базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  в  $\text{Ker} L_0^*$  и множество  $\Omega_{L_0}^0 \subseteq \Omega_{L_0}^e$ , атомы которого образуют полную систему и для которого верно  $\mu(\Omega_{L_0} \setminus \Omega_{L_0}^0) = 0$ , что при каждом  $\omega \in \Omega_{L_0}^0$  элементы  $[e_1](\omega), [e_2](\omega), \dots, [e_n](\omega)$  образуют базис в пространстве значений  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$ .

Элементы  $[u](\omega)$  для атомов  $\omega \in \Omega_{L_0}$  и гладких волн  $u \in \mathcal{U}_{L_0}$  раскладываются по базису  $[e_1](\omega), [e_2](\omega), \dots, [e_n](\omega)$ . Коэффициенты разложения можно найти, зная предел

$$\widehat{u}(\omega) := \begin{pmatrix} \langle u, e_1 \rangle_\omega \\ \langle u, e_2 \rangle_\omega \\ \vdots \\ \langle u, e_n \rangle_\omega \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(P_{\omega(t)} e, e)} \begin{pmatrix} (P_{\omega(t)} u, e_1) \\ (P_{\omega(t)} u, e_2) \\ \vdots \\ (P_{\omega(t)} u, e_n) \end{pmatrix}$$

и матрицу Грама

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle_\omega & \langle e_2, e_1 \rangle_\omega & \cdots & \langle e_n, e_1 \rangle_\omega \\ \langle e_1, e_2 \rangle_\omega & \langle e_2, e_2 \rangle_\omega & \cdots & \langle e_n, e_2 \rangle_\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_1, e_n \rangle_\omega & \langle e_2, e_n \rangle_\omega & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle_\omega \end{pmatrix} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(P_{\omega(t)} e, e)} \begin{pmatrix} (P_{\omega(t)} e_1, e_1) & (P_{\omega(t)} e_2, e_1) & \cdots & (P_{\omega(t)} e_n, e_1) \\ (P_{\omega(t)} e_1, e_2) & (P_{\omega(t)} e_2, e_2) & \cdots & (P_{\omega(t)} e_n, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (P_{\omega(t)} e_1, e_n) & (P_{\omega(t)} e_2, e_n) & \cdots & (P_{\omega(t)} e_n, e_n) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

эта информация доступна «внешнему наблюдателю». С точки зрения «внешнего наблюдателя» удобнее взять в качестве элементов слоя над  $\omega$  в координатном представлении не сами коэффициенты вектора  $[u](\omega)$  в разложении по базису, а коэффициенты  $\widehat{u}(\omega)$ . Так мы получаем модель волновой части оператора  $L_0^*$  в пространстве координатного

представления

$$\mathcal{H}^c := L_2(\Omega_{L_0}, \mu, \mathbb{C}^n),$$

которую тоже называем волновой моделью. В идеальной ситуации удастся ввести на  $\Omega_{L_0}$  структуру многообразия или даже глобальные координаты. Это имеет место для оператора Лапласа на компактном римановом многообразии [14], для положительно определенного оператора Шредингера на полуоси [3] и в нашем случае.

## §2. ОПЕРАТОР ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ

Проследим за реализацией абстрактной схемы на примере оператора Штурма–Лиувилля на отрезке.

**2.1. Оператор  $L_0$ .** Пусть  $0 < l < \infty$ ,  $\mathcal{H} = L_2(0, l)$ , оператор  $L_0$  задан на области определения

$$\text{Dom } L_0 = \{u \in H^2(0, l) : u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0\} \quad (2.1)$$

дифференциальным выражением

$$L_0 u := -u'' + qu, \quad (2.2)$$

где  $q \in C^\infty[0, l]$  – такая гладкая функция, что оператор  $L_0$  положительно определен. Такой оператор симметричен и имеет индексы дефекта  $(2, 2)$ . Его сопряженный оператор  $L_0^*$  задается тем же дифференциальным выражением на области определения

$$\text{Dom } L_0^* = H^2(0, l).$$

Расширение по Фридрихсу  $L$  оператора  $L_0$  задано на области определения

$$\text{Dom } L = \{u \in H^2(0, l) : u(0) = u(l) = 0\}.$$

**2.2. Система Грина.** Для описания подпространства  $\mathcal{K} = \text{Ker } L_0^*$  введем два решения уравнения  $-u'' + qu = 0$ . Обозначим  $\phi_0$  решение задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями  $\phi_0(0) = 0$ ,  $\phi_0'(0) = 1$ , а  $\phi_l$  – решение с условиями  $\phi_l(l) = 0$ ,  $\phi_l'(l) = 1$ . Так как оператор  $L$  положительно определен,  $0$  не является его собственным числом и эти функции не могут оказаться пропорциональными. Следовательно, они образуют базис в  $\mathcal{K}$ .

Запишем разложение Вишика для  $u \in \text{Dom } L_0$ . Пусть

$$\eta_0 := L^{-1}\phi_0, \quad \eta_l := L^{-1}\phi_l.$$

**Лемма 3.** В разложении  $u \in \text{Dom } L_0^*$

$$u = u_0 + L^{-1}g_u + h_u$$

элементы  $g_u, h_u \in \mathcal{K}$  даются формулами

$$\begin{aligned} g_u &= \frac{1}{\eta'_0(0)\eta'_l(l) - \eta'_l(0)\eta'_0(l)} \\ &\times \left\{ \left[ \eta'_l(l) \left( u'(0) - \frac{u(l)}{\phi_0(l)} - \frac{u(0)}{\phi_l(0)} \phi'_l(0) \right) - \eta'_l(0) \left( u'(l) - \frac{u(l)}{\phi_0(l)} \phi'_0(l) - \frac{u(0)}{\phi_l(0)} \right) \right] \eta_0 \right. \\ &\left. + \left[ \eta'_0(0) \left( u'(l) - \frac{u(l)}{\phi_0(l)} \phi'_0(l) - \frac{u(0)}{\phi_l(0)} \right) - \eta'_0(l) \left( u'(0) - \frac{u(l)}{\phi_0(l)} - \frac{u(0)}{\phi_l(0)} \phi'_l(0) \right) \right] \eta_l \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$h_u = \frac{u(l)}{\phi_0(l)} \phi_0 + \frac{u(0)}{\phi_l(0)} \phi_l. \quad (2.4)$$

**Доказательство.** Поскольку  $u_0(0) = u'_0(0) = u_0(l) = u'_0(l) = 0$  и  $(L^{-1}g_u)(0) = (L^{-1}g_u)(l) = 0$ , мы должны подобрать такие коэффициенты в разложениях

$$h_u = c_0 \phi_0 + c_l \phi_l, \quad g_u = d_0 \phi_0 + d_l \phi_l, \quad (2.5)$$

чтобы было

$$\begin{aligned} u(0) &= h_u(0), \\ u(l) &= h_u(l), \\ u'(0) &= (L^{-1}g_u)'(0) + h'_u(0), \\ u'(l) &= (L^{-1}g_u)'(l) + h'_u(l). \end{aligned}$$

Подставляя сюда (2.5) и  $L^{-1}g_u = d_0 \eta_0 + d_l \eta_l$  и учитывая начальные условия для решений  $\phi$ , находим коэффициенты  $c_0, c_l, d_0$  и  $d_l$  и приходим к формулам (2.3) и (2.4).  $\square$

Из леммы с учетом (1.5) получаем:

$$\Gamma_1 u = -\frac{u(l)}{\phi_0(l)} \phi_0 - \frac{u(0)}{\phi_l(0)} \phi_l, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 u &= \frac{1}{\eta'_0(0)\eta'_l(l) - \eta'_l(0)\eta'_0(l)} \\ &\times \left\{ \left[ u(0) \frac{\eta'_l(0) - \eta'_l(l)\phi'_l(0)}{\phi_l(0)} - u(l) \frac{\eta'_l(l) - \eta'_l(0)\phi'_0(l)}{\phi_0(l)} + u'(0)\eta'_l(l) - u'(l)\eta'_l(0) \right] \phi_0 \right. \\ &\left. - \left[ u(0) \frac{\eta'_0(0) + \eta'_0(l)\phi'_l(0)}{\phi_l(0)} - u(l) \frac{\eta'_0(l) - \eta'_0(0)\phi'_0(l)}{\phi_0(l)} + u'(0)\eta'_0(l) - u'(l)\eta'_0(0) \right] \phi_l \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Пространства  $\mathcal{H} = L_2(0, l)$ ,  $\mathcal{K} = \{c_0\phi_0 + c_l\phi_l, c_0, c_l \in \mathbb{C}\}$  и операторы  $L_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ , заданные формулами (2.1), (2.2), (2.6) и (2.7), образуют систему Грина  $\mathfrak{G}_{L_0}$ , каноническим образом соответствующую оператору  $L_0$ .

**2.3. Система с граничным управлением.** Рассмотрим систему (1.6)–(1.8) в нашем случае. Граничное управление  $h(t) \in \mathcal{K}$  можно записать в виде

$$h(t) = -\frac{f_l(t)}{\phi_0(l)}\phi_0 - \frac{f_0(t)}{\phi_l(0)}\phi_l,$$

где функции  $f_0(t)$  и  $f_l(t)$  берутся из класса

$$\dot{\mathcal{M}} = \{f \in C^\infty[0, \infty) : \text{supp } f \subset (0, \infty)\}. \quad (2.8)$$

Поэтому система (1.6)–(1.8) может быть записана в виде начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + qu &= 0, & x \in (0, l), t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0, & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} &= f_0(t), & t \geq 0, \\ u|_{x=l} &= f_l(t), & t \geq 0. \end{aligned}$$

Решение такой задачи при  $t \leq l$  записывается в виде

$$\begin{aligned} u^f(x, t) &= f_0(t-x) + f_l(t-l+x) \\ &+ \int_x^t w_0(x, s) f_0(t-s) ds + \int_{l-x}^t w_l(l-x, s) f_l(t-s) ds, \end{aligned} \quad (2.9)$$

при этом функции  $f_0$  и  $f_l$  считаются продолженными нулем на отрицательную половину оси, функции  $w_0(x, t)$  и  $w_l(x, t)$  определены при  $0 \leq x \leq t \leq l$  и гладкие.



2.3.1. *Управляемость системы  $\alpha_{L_0}$ .* Найдем достижимые множества системы  $\alpha_{L_0}$ .

**Лемма 4.**

$$\mathcal{U}_{L_0}^t = \begin{cases} \{u \in C^\infty[0, l] : \text{supp } u \subset [0, t) \cup (l-t, l]\}, & t \leq \frac{l}{2}, \\ C^\infty[0, l], & t > \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (2.10)$$

**Доказательство.** Пусть  $t \leq \frac{l}{2}$ . Из выражения (2.9) видно, что при  $f_0, f_l \in \dot{\mathcal{M}}$  решение  $u^h(\cdot, t)$  лежит в  $C^\infty[0, l]$ . Видно также, что его носитель содержится во множестве  $[0, t) \cup (l-t, l]$ . Поэтому

$$\mathcal{U}_{L_0}^t \subseteq \{u \in C^\infty[0, l] : \text{supp } u \subseteq [0, t) \cup (l-t, l]\}.$$

Для доказательства обратного включения возьмем  $u$  из правой части и покажем, что  $u(x) = u^f(x, t)$ . Представим  $u$  в виде

$$u = u_0 + u_l, \quad u_0, u_l \in C^\infty[0, l], \quad \text{supp } u_0 \subseteq [0, t), \quad \text{supp } u_l \subseteq (l-t, l].$$

Уравнение  $u(x) = u^f(x, t)$  согласно (2.9) разделим на две части следующим образом:

$$f_0(t-x) + \int_x^t w_0(x, s) f_0(t-s) ds = u_0(x),$$

$$f_l(t-l+x) + \int_{l-x}^t w_l(l-x, s) f_l(t-s) ds = u_l(x).$$

Это уравнения Вольтерра второго рода на отрезке  $[0, l]$ , они имеют решения из тех же классов, откуда взяты правые части (с учетом замены аргументов;  $\text{supp } f_0, \text{supp } f_l \subseteq (0, t]$ , их можно продолжить в  $\dot{\mathcal{M}}$ , что не отразится на равенстве  $u(x) = u^f(x, t)$ ). Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

Пусть  $\frac{l}{2} < t \leq l$  и  $u \in C^\infty[0, l]$ . Существует такая функция  $u_0 \in C^\infty[0, l]$ , что  $u_0|_{[0, \frac{l}{2}]} = u|_{[0, \frac{l}{2}]}$  и  $\text{supp } u_0 \subseteq [0, t)$ . Возьмем  $u_l = u - u_0$ . Тогда окажется, что  $u_l \in C^\infty[0, l]$  и  $\text{supp } u_l \subseteq [\frac{l}{2}, l] \subseteq (l-t, l]$ . Рассуждая так же, как и в первой части доказательства, мы получим управления  $f_0, f_l \in \dot{\mathcal{M}}$ , для которых  $u(x) = u^f(x, t)$ . Следовательно,  $C^\infty[0, l] \subseteq \mathcal{U}_{L_0}^t$ . Из (2.9) видно, что  $\mathcal{U}_{L_0}^t \subseteq C^\infty[0, l]$ .

При  $t > l$  включение  $\mathcal{U}_{L_0}^l = C^\infty[0, l] \subseteq \mathcal{U}_{L_0}^t$  верно по монотонности достижимых множеств, а обратное включение  $\mathcal{U}_{L_0}^t \subseteq C^\infty[0, l]$  верно всегда. Тем самым лемма доказана.  $\square$

Система  $\alpha_{L_0}$  управляема, так как  $\overline{\mathcal{U}}_{L_0} = L_2(0, l) = \mathcal{H}$ , что также следует из того факта, что оператор  $L_0$  вполне несамосопряжен. Замыкание  $C^\infty[0, l]$  по норме графика оператора  $L_0^*$  дает пространство Соболева  $\overline{H^2(0, l)} = \text{Dom } L_0^*$ , поэтому волновая часть оператора  $L_0^*$ , оператор  $\overline{L_0^*|_{\mathcal{U}_{L_0}}}$ , совпадает с самим  $L_0^*$ .

**2.4. Волновой спектр.** Мы переходим к построению волнового спектра оператора  $L_0$ . Для этого у нас уже найдено семейство достижимых подпространств  $\overline{\mathcal{U}}_{L_0}^t = L_2((0, t) \cup (l-t, l))$ . Теперь нужно выяснить, как действует волновая изотония  $I_L$ .

Для множества  $E \subset [0, l]$  обозначим через  $E^t$  его метрическую окрестность в  $[0, l]$ :

$$E^t = \{x \in [0, l] : \text{dist}(x, E) < t\}, \quad t > 0,$$

$$\text{dist}(x, E) := \inf_{y \in E} \text{dist}(x, y).$$

Для  $t = 0$  будем считать  $E^t = E$ .

**Лемма 5.** При  $0 \leq a < b \leq l$  и  $t \geq 0$  верно следующее:

$$I_L^t(L_2(a, b)) = L_2((a, b)^t). \quad (2.11)$$

**Замечание 2.** Мы отождествляем пространства  $L_2(a, b)$  с подпространствами  $L_2(0, l)$ , состоящими из функций, обнуляющихся почти везде вне  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Система (1.13)–(1.14) записывается в виде начально-краевой задачи

$$v_{tt} - v_{xx} + qv = g, \quad x \in (0, l), t > 0, \quad (2.12)$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l], \quad (2.13)$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

с правой частью  $g(x, t)$  из соответствующего класса.

Рассуждение, аналогичное доказательству леммы 2 из [3], основанное на конечности области влияния для гиперболического уравнения (2.12), приводит ко включению  $\mathcal{V}_L^t(L_2(a, b)) \subseteq L_2((a, b)^t)$ , а значит,  $I_L^t(L_2(a, b)) \subseteq L_2((a, b)^t)$ .

Рассмотрим сопряженную задачу

$$w_{tt} - w_{xx} + qw = 0, \quad x \in (0, l), t \in (0, T), \quad (2.15)$$

$$w|_{t=T} = 0, \quad w_t|_{t=T} = y, \quad x \in [0, l], \quad (2.16)$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.17)$$

Для  $g \in C_0^\infty((0, l) \times (0, \infty))$  и  $y \in L_2(0, l)$  выполняется соотношение двойственности

$$\int_0^l \int_0^T g(x, t) w^y(x, t) dx dt = - \int_0^l v^y(x, T) y(x) dx. \quad (2.18)$$

Решение  $w^y$  продолжается по нечетности до решения задачи

$$w_{tt} - w_{xx} + qw = 0, \quad x \in (0, l), t \in (0, 2T), \quad (2.19)$$

$$w|_{t=T} = 0, \quad w_t|_{t=T} = y, \quad x \in [0, l], \quad (2.20)$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, 2T]. \quad (2.21)$$

(при этом не возникает разрыва ни решения  $w^y$ , ни производной  $w_t^y$ ). Если найдется  $y \in L_2((a, b)^T) \ominus \mathcal{V}_L^T(L_2(a, b))$ , то рассуждение, аналогичное доказательству леммы 2 в [3], приводит к  $w^y = 0$ , откуда следует, что  $y$  может быть только нулем. Поэтому  $\mathcal{V}_L^t(L_2(a, b))$  плотно в  $L_2((a, b)^t)$ . Таким образом, мы доказали, что  $I_L^t(L_2(a, b)) = L_2((a, b)^t)$ .  $\square$

Назовем множество  $E \subseteq [0, l]$  *элементарным*, если

$$E = \bigcup_{k=1}^{n(E)} (a_k, b_k),$$

где  $0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_{n(E)} < b_{n(E)} \leq l$  и если множество  $E$  симметрично относительно середины отрезка  $[0, l]$ . Пусть  $\mathcal{E}[0, l]$  – семейство всех элементарных множеств. Очевидно, что если  $E \in \mathcal{E}[0, l]$ , то  $E^t \in \mathcal{E}[0, l]$  при всех  $t \geq 0$ . Подпространства вида  $L_2(E)$ ,  $E \in \mathcal{E}[0, l]$ , будем тоже называть *элементарными*. Семейство элементарных подпространств образует подрешетку  $\mathfrak{L}_{\mathcal{E}[0, l]} \subseteq \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ .

**Лемма 6.** Для любого  $E \in \mathcal{E}[0, l]$  верно  $I_L^t(L_2(E)) = L_2(E^t)$ .

**Доказательство.** По изотонности

$$L_2((a_k, b_k)^t) = I_L^t(L_2(a_k, b_k)) \subseteq I_L^t(L_2(E))$$

для всех  $k$ , поэтому и  $L_2(E^t) \subseteq I_L^t(L_2(E))$ . Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 5, мы приходим к тому, что

$$I_L^t(L_2(E)) = \overline{\mathcal{V}_L^t(L_2(E))} = L_2(E^t).$$

□

Решетка  $\mathfrak{L}_{\mathcal{E}[0,l]}$  инвариантна относительно волновой изотонии  $I_L$  и содержит все подпространства вида  $L_2((0, t) \cup (l - t, l))$ , то есть все достижимые подпространства. Поэтому  $\mathfrak{L}_{L_0} = \mathfrak{L}_{\mathcal{E}[0,l]}$ .

Пусть  $m$  обозначает меру Лебега,  $\mathcal{B}$  борелевскую сигма-алгебру на отрезке  $[0, l]$ ,  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}$  соответствующую решетку подпространств,

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{B}} := \{L_2(E), E \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathfrak{L}(\mathcal{H}),$$

$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$  – симметричная разность множеств.

**Лемма 7.** Пусть  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – последовательность множеств из  $\mathcal{B}$  и  $E \in \mathcal{B}$ . Тогда сходимость  $L_2(E_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L_2(E)$  в топологии  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  равносильна тому, что  $m(E_n \Delta E) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Доказательство леммы почти дословно повторяет доказательство леммы 4 из [3].

**Лемма 8.** Замыкание подрешетки  $\mathfrak{L}_{L_0}$  в топологии  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$  лежит в подрешетке  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}$ :

$$\overline{\mathfrak{L}_{L_0}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathcal{B}}.$$

**Доказательство.** Пусть последовательность  $L_2(E_n)$  подпространств из  $\mathfrak{L}_{L_0} = \mathfrak{L}_{\mathcal{E}[0,l]}$  фундаментальна в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ . Докажем, что существует такое  $E \in \mathcal{B}$ , что  $L_2(E_n) \xrightarrow{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} L_2(E)$ . По лемме 7 сходимость означает, что  $m(E_n \Delta E) \rightarrow 0$ . Симметричная разность является псевдометрикой в семействе множеств  $\mathcal{B}$ , а после факторизации по отношению эквивалентности  $E \sim F$ , если  $m(E \Delta F) = 0$ , получаем полное метрическое пространство  $\mathcal{B}/\sim$ , [8]. Поэтому найдется такое измеримое множество  $E \subseteq [0, l]$ , что  $m(E_n \Delta E) \rightarrow 0$ , а это по лемме 7 означает, что  $L_2(E_n) \xrightarrow{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} L_2(E)$ . □

**Замечание 3.** Множество  $E$  должно быть симметричным (с точностью до множества меры ноль) относительно середины интервала  $[0, l]$ , поэтому  $\overline{\mathfrak{L}_{L_0}} \neq \mathfrak{L}_{\mathcal{B}}$ .

**Следствие 1.** Семейство  $[I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$  состоит из изотонных функций со значениями в  $\mathfrak{L}_B$ .

Рассмотрим метрическое пространство  $\mathcal{B}/\sim$  классов эквивалентности измеримых множеств с расстоянием  $\rho(E_\sim, F_\sim) = m(E \Delta F)$  и для каждого  $t > 0$  в нем рассмотрим следующие множества:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{>t} &:= \{E^t, E \in \mathcal{E}[0, l]\} \\ &= \{E \in \mathcal{E}[0, l] : b_1 > t, \text{ если } a_1 = 0, b_1 - a_1 > 2t, \text{ если } a_1 \neq 0, \\ &\quad \text{и } b_k - a_k > 2t, \forall k = 2, \dots, n - 1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\geq t} &:= \{E \in \mathcal{E}[0, l] : b_1 \geq t, \text{ если } a_1 = 0, b_1 - a_1 \geq 2t, \text{ если } a_1 \neq 0, \\ &\quad \text{и } b_k - a_k \geq 2t, \forall k = 2, \dots, n - 1\}. \end{aligned}$$

Напомним, что элементарные множества симметричны относительно середины отрезка  $[0, l]$ .

**Лемма 9.** Замыкание  $(\mathcal{E}_{>t})_\sim$  по метрике  $\mathcal{B}/\sim$  лежит в  $(\mathcal{E}_{\geq t})_\sim$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – такая последовательность из  $\mathcal{E}_{>t}$ , что  $(E_n)_\sim \xrightarrow{\mathcal{B}/\sim} E_\sim \in \mathcal{B}/\sim$ . Каждое из множеств  $E_n$  содержит не больше  $\frac{l}{t}$  составляющих интервалов. Можно выбрать подпоследовательность  $\{E_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , у множеств которой число составляющих интервалов постоянно. Обозначим это число  $N$ .

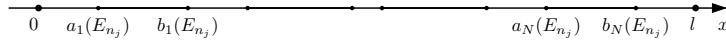


Рис. 1. Множество  $E_{n_j}$ .

Можно выбрать подпоследовательность  $\{E_{n_{j_i}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ , у которой все границы интервалов  $\{a(E_{n_{j_i}})\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b(E_{n_{j_i}})\}_{i \in \mathbb{N}}$  сходятся к некоторым числам  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_N \leq b_N \leq l$  (см. рис. 1 и 2). Так полу-

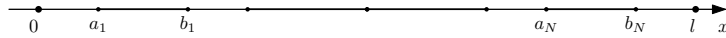


Рис. 2. Множество  $E_\infty$ .

чается множество

$$E_\infty := \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k).$$

Нетрудно увидеть, что имеет место оценка (см. рис. 3)

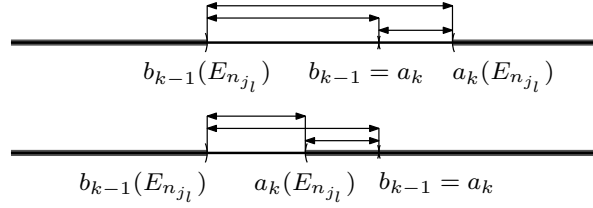


Рис. 3. Оценка меры симметричной разности.

$$m(E_{n_{j_l}} \Delta E_\infty) \leq \sum_{k=1}^N (|a_k(E_{n_{j_l}}) - a_k| + |b_k(E_{n_{j_l}}) - b_k|).$$

Следовательно,  $m(E_{n_{j_l}} \Delta E_\infty) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ . Это означает, что  $E_\sim = (E_\infty)_\sim$ . Поскольку  $E_\infty \in \mathcal{E}_{\geq t}$ , а последовательность  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  была произвольной сходящейся последовательностью из  $\mathcal{E}_{> t}$ , лемма доказана.  $\square$

**Лемма 10.** Пусть  $E, F \subseteq [0, l]$ ,  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – последовательности подмножеств отрезка  $[0, l]$ . Пусть  $m(E_n \Delta E) \rightarrow 0$  и  $m(F_n \Delta F) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если при всех  $n$   $E_n \subseteq F_n$ , то  $m(E \setminus F) = 0$ .

**Доказательство.** Имеем:

$$\begin{aligned} E \setminus F &\subseteq (E \cup E_n) \setminus F = (E_n \cup (E \setminus E_n)) \setminus F = (E_n \setminus F) \cup ((E \setminus E_n) \setminus F) \\ &\subseteq (F_n \setminus F) \cup (E_n \setminus E) \subseteq (F_n \Delta F) \cup (E_n \Delta E). \end{aligned}$$

Отсюда сразу же получаем утверждение леммы.  $\square$

Для  $x \in [0, \frac{l}{2}]$  обозначим

$$\omega_x(t) := L_2(\{\{x\} \cup \{l-x\}\}^t),$$

тогда  $\omega_x \in [I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$ . Действительно, при всех  $n$   $L_2(\{\{x\} \cup \{l-x\}\}^{\frac{1}{n}})^t \in I_L \mathfrak{L}_{L_0}$  и  $L_2(\{\{x\} \cup \{l-x\}\}^{\frac{1}{n}})^t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega_x$  в смысле  $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ .

**Лемма 11.** Для каждого ненулевого  $\omega \in [I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$  существует такой  $x \in [0, l]$ , что  $\omega_x \leq \omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $\omega \in [I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$ . Это означает, что существует такая последовательность  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  элементарных множеств, что для любого  $t \geq 0$   $I_L^t(L_2(E_n)) = L_2(E_n^t) \rightarrow \omega(t)$  в  $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ . По лемме 8 существуют такие измеримые множества  $E(t) \subseteq [0, l]$ , что  $\omega(t) = L_2(E(t))$ , и по лемме 9  $E(t) \in \mathcal{E}_{\geq t}$ .

Если при всех  $t > 0$   $E(t) = [0, l]$ , то утверждение леммы выполняется: любой элемент  $\omega_x$ ,  $x \in [0, \frac{l}{2}]$ , удовлетворяет  $\omega_x \leq \omega$ . Пусть существует такой  $t_0 > 0$ , что  $E(t_0) \neq [0, l]$ . Тогда для правого конца первого интервала верно неравенство  $b_1(E(t_0)) > t_0$  (возможны два случая, см. рис. 4 и 5). Множество  $E_n^{t_0}$  содержит конечное число

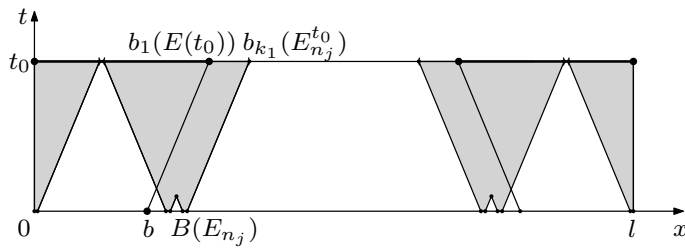


Рис. 4. Первый случай.

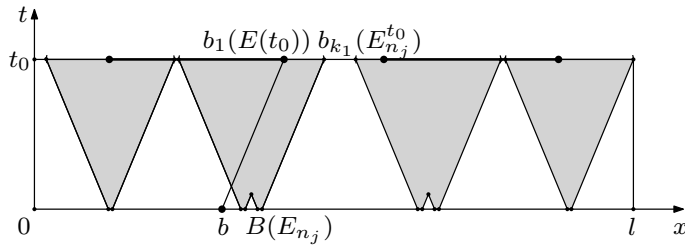


Рис. 5. Второй случай.

интервалов и существует подпоследовательность  $\{E_{n_j}^{t_0}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , множества которой состоят из постоянного числа интервалов, а концы этих интервалов имеют пределы. Эти пределы могут быть либо границами

составляющих интервалов множества  $E(t_0)$ , либо внутренними точками этого множества.

К точке  $b_1(E(t_0))$  сходится последовательность  $\{b_{k_1}(E_{n_j}^{t_0})\}_{j \in \mathbb{N}}$  правых концов составляющего интервала множества  $E_{n_j}^{t_0}$  с некоторым фиксированным номером  $k_1$ . Обозначим

$$b := b_1(E(t_0)) - t_0, \quad B(E_{n_j}) := b_{k_1}(E_{n_j}^{t_0}) - t_0$$

(см. рис. 4 и 5). Тогда  $B(E_{n_j}) \rightarrow b$  при  $j \rightarrow \infty$ . Множества  $E_{n_j}^t$  содержат  $\{B(E_{n_j})\}^t$  при всех  $t > 0$ . Так как  $E_{n_j}^t \rightarrow E(t)$ ,  $m(E_{n_j}^t \Delta E(t)) \rightarrow 0$  и  $m(\{B(E_{n_j})\}^t \Delta \{b\}^t) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ , по лемме 10 получаем, что для всех  $t > 0$  выполнено  $\{b\}^t \subseteq E(t)$  с точностью до множества меры ноль. А значит,  $\omega_b \leq \omega$ .  $\square$

Теперь мы можем описать волновой спектр оператора  $L_0$ .

**Теорема 1.**

$$\Omega_{L_0} = \left\{ \omega_x, x \in \left[0, \frac{l}{2}\right] \right\}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\omega \in \Omega_{L_0}$ . Так как  $\Omega_{L_0} \subseteq [I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$ , по лемме 11 существует такой  $x \in [0, \frac{l}{2}]$ , что  $\omega_x \leq \omega$ . Поскольку  $\omega$  – атом множества  $[I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$ , должно быть  $\omega_x = \omega$ . Значит,  $\Omega_{L_0} \subseteq \{\omega_x, x \in [0, \frac{l}{2}]\}$ .

Докажем обратное включение. Пусть  $x \in [0, \frac{l}{2}]$  и пусть существует такой ненулевой элемент  $\omega \in [I_L \mathfrak{L}_{L_0}]_{\text{seq}}$ , что  $\omega < \omega_x$ . По лемме 11 существует такой  $\tilde{x} \in [0, \frac{l}{2}]$ , что  $\omega_{\tilde{x}} \leq \omega$ . Это означает, что  $\omega_{\tilde{x}} < \omega_x$ . Но такого быть не может: при  $\tilde{x} = x$  имеем  $\omega_{\tilde{x}} = \omega_x$ , а при  $\tilde{x} \neq x$  и  $t < |\tilde{x} - x|$  имеем  $\omega_x(t) \cap \omega_{\tilde{x}}(t) = \{0\}$  (см. рис. 6), что противоречит неравенству  $\omega_{\tilde{x}} < \omega_x$ . Следовательно, таких  $\omega$  не существует и  $\omega_x$  – атом. Значит,  $\{\omega_x, x \in [0, \frac{l}{2}]\} \subseteq \Omega_{L_0}$  и теорема доказана.  $\square$

Обозначим  $\beta$  биекцию  $[0, \frac{l}{2}]$  и  $\Omega_{L_0}$ , установленную теоремой 1,  $\beta : x \mapsto \omega_x$ . Будем обозначать также  $x_\omega := \beta^{-1}(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_{L_0}$ ,  $E_x(t) := (\{x\} \cup \{l - x\})^t$  и  $f_\omega(x) := \text{dist}(x, (\{x_\omega\} \cup \{l - x_\omega\})^t)$ . Заметим, что

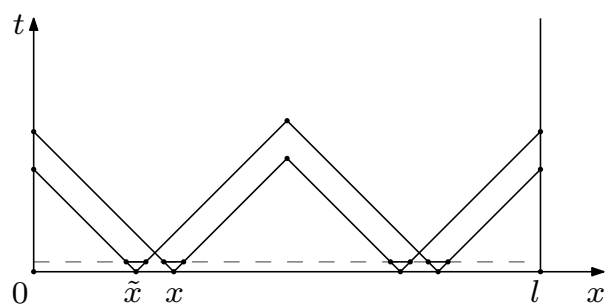
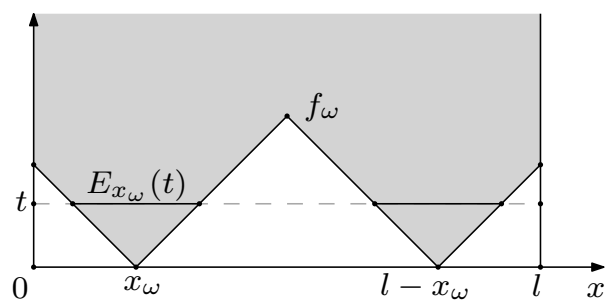
$$E_{x_\omega}(t) = \{y \in (0, l) : f_\omega(y) < t\} \quad (2.22)$$

(см. Рис. 7).

**Лемма 12.** Пусть  $\omega \in \Omega_{L_0}$ . Тогда семейство проекторов

$$E_\omega(t) = \begin{cases} P_\omega(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$



Рис. 6.  $\omega_{\tilde{x}}$  и  $\omega_x$ .Рис. 7. Множество  $E_{x_\omega}(t)$  и график функции  $f_\omega$ 

есть разложение единицы в пространстве  $\mathcal{H} = L_2(0, l)$  и соответствующий эйконал

$$\tau_\omega = \int_{\mathbb{R}} t dE_\omega(t)$$

есть оператор умножения на функцию  $f_\omega$  в  $L_2(0, l)$ .

**Доказательство.** Как видно из определения элементов  $\omega_x$ , при  $t > \frac{l}{2}$   $\omega_x(t) = \mathcal{H}$ , так что  $E(t) \xrightarrow{s} I$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Сильная непрерывность слева функций  $P_{\omega_x(t)} = [\chi_{E_x(t)}]$  тоже имеет место. Значит, семейство  $E(t)$  действительно является разложением единицы и определен интеграл

(Стилтьеса)  $\int_{\mathbb{R}} t dE_{\omega}(t)$ . Если  $M_f$  есть оператор умножения на функцию  $f$ ,  $M_f = [f]$ , в пространстве  $L_2(\mathbb{R}, \rho)$  с мерой  $\rho$ , то соответствующее разложение единицы – это  $E(\lambda) = [\chi_{f^{-1}(-\infty, \lambda)}]$ . В нашем случае  $\rho$  есть мера Лебега на отрезке  $[0, l]$  и для оператора  $M_{f_{\omega_x}} = [f_{\omega_x}]$  получаем  $E(\lambda) = [\chi_{f_{\omega_x}^{-1}(-\infty, \lambda)}] = [\chi_{E_x(t)}]$  в силу (2.22). Это означает, что  $E(\lambda) = P_{\omega_x}(\lambda)$  при  $\lambda \geq 0$  и  $E(\lambda) = 0$  при  $\lambda < 0$ . Раз совпадают спектральные меры, то должны совпадать и операторы, поэтому  $\tau_{\omega} = M_{f_{\omega}}$ .  $\square$

Как нетрудно видеть, для любых  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{L_0}$  корректно определено расстояние

$$\tau(\omega_1, \omega_2) = \|\tau_{\omega_1} - \tau_{\omega_2}\| = \|[f_{\omega_1} - f_{\omega_2}]\| = |x_{\omega_1} - x_{\omega_2}|$$

и волновой спектр становится полным метрическим пространством. Поэтому отображение  $\beta$  является изометрическим изоморфизмом между отрезком  $[0, \frac{l}{2}]$  и волновым спектром  $\Omega_{L_0}$ . «Шары»

$$B_r(\omega) = \{\tilde{\omega} \in \Omega_{L_0} : \exists t > 0 : \tilde{\omega}(t) \neq 0, \tilde{\omega}(t) \subseteq \omega(r)\},$$

очевидно, совпадают с

$$\left\{ \omega_{\tilde{x}}, \tilde{x} \in \left[0, \frac{l}{2}\right] : |\tilde{x} - x_{\omega}| < r \right\} = \{\tilde{\omega} \in \Omega_{L_0} : \tau(\tilde{\omega}, \omega) < r\}$$

(см. Рис. 8), то есть с шарами по метрике  $\tau$ , так что «шаровая» топология на волновом спектре совпадает с топологией заданной этой метрикой. Из вида достижимых подпространств (2.10) и определения

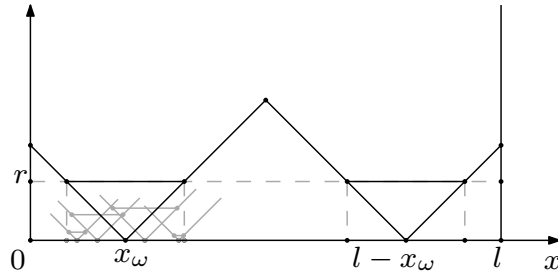


Рис. 8.  $B_r(\omega)$ .

границы волнового спектра  $\partial\Omega_{L_0}$  следует, что в нашем случае

$$\partial\Omega_{L_0} = \{\omega_0\}.$$

Атом  $\omega_{\frac{l}{2}}$  не является точкой границы. Далее, расстояние до границы определяет координату

$$\tau(\omega) := \tau(\omega, \partial\Omega_{L_0}) = x_\omega,$$

которая параметризует волновой спектр для «внешнего наблюдателя» (в отличие от изоморфизма  $\beta$ , доступного только «внутреннему наблюдателю»).

**2.5. Волновая модель.** Начнем построение волновой модели оператора  $\omega_x(t)$  сразу с пространства значений. Первые три условия из абстрактной части выполняются, что очевидно с учетом известного нам явного вида подпространств  $\omega_x(t)$ . Ясно также, что атомы исчезают в нуле. Для доказательства существования калибровочного элемента нам понадобится следующее стандартное утверждение.

**Лемма 13.** *Функция  $u \in \text{Ker } L_0^*$  не может иметь больше одного нуля на отрезке  $[0, l]$ .*

**Доказательство.** Пусть  $u \in \text{Ker } L_0^*$ . Оператор  $L$  положительно определен и, значит, имеет тривиальное ядро. Поэтому функция  $u$  не может обращаться в ноль в точках 0 и  $l$  одновременно. Предположим, что  $u$  имеет два нуля,  $a$  и  $b$ , на отрезке  $[0, l]$ , причем по крайней мере один из них – внутренняя точка отрезка. Тогда  $u$  лежит в ядре оператора Штурма–Лиувилля  $L_{ab}$ , заданного на отрезке  $[a, b]$  дифференциальным выражением  $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$  с условиями Дирихле в точках  $a$  и  $b$ . Такой оператор самосопряжен и полуограничен снизу. Пусть  $l$  и  $l_{ab}$  обозначают полуторалинейные формы, соответствующие операторам  $L$  и  $L_{ab}$ . Их области определения – это  $d[l] = \dot{H}^1(0, l)$  и  $d[l_{ab}] = \dot{H}^1(a, b)$ . Согласно минимаксимальному принципу [5],

$$\lambda_1(L_{ab}) = \min_{u \in \dot{H}^1(a, b)} \frac{(l_{ab}u, u)_{L_2(a, b)}}{\|u\|_{L_2(a, b)}^2}.$$

Если функцию  $u \in \dot{H}^1(a, b)$  продолжить нулем на весь отрезок  $[0, l]$ , то получится функция  $\tilde{u} \in \dot{H}^1(0, l)$ , причем  $\|\tilde{u}\|_{L_2(0, l)} = \|u\|_{L_2(a, b)}$ . Кроме

того,

$$\begin{aligned} (l_{ab}u, u)_{L_2(a,b)} &= \|u'\|_{L_2(a,b)}^2 + (qu, u)_{L_2(a,b)} \\ &= \|\tilde{u}'\|_{L_2(0,l)}^2 + (q\tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(0,l)} = (l\tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(0,l)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \min_{u \in \dot{H}^1(a,b)} \frac{(l_{ab}u, u)_{L_2(a,b)}}{\|u\|_{L_2(a,b)}^2} &= \min_{u \in \dot{H}^1(a,b)} \frac{(l\tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(0,l)}}{\|\tilde{u}\|_{L_2(0,l)}^2} \\ &\geq \min_{u \in \dot{H}^1(0,l)} \frac{(lu, u)_{L_2(0,l)}}{\|u\|_{L_2(0,l)}^2} = \lambda_1(L). \end{aligned}$$

Мы получили  $\lambda_1(L_{ab}) \geq \lambda_1(L) > 0$ , то есть 0 не может быть собственным числом оператора  $L_{ab}$ ,  $u \notin \text{Ker } L_{ab}$ , противоречие. Значит, функция  $u$  не может иметь двух нулей на отрезке  $[0, l]$  и лемма доказана.  $\square$

В качестве калибровочного возьмем элемент  $e \in \text{Ker } L_{ab}$ . Ядро оператора  $L_0^*$  состоит из решений уравнения  $-u'' + qu = 0$ , за  $e$  выберем решение, не обращающееся в ноль в точке  $\frac{l}{2}$ . Доказанная лемма гарантирует, что для любого  $\omega \in \Omega_{L_0}$  верно  $|e(x_\omega)|^2 + |e(l - x_\omega)|^2 \neq 0$ . Множеством  $\Omega_{L_0}^e$  будет весь волновой спектр. Действительно, пусть  $u \in \mathcal{U}_{L_0}$  и  $\omega \in \Omega_{L_0}$ . Тогда

$$\frac{\|P_{\omega(t)}u\|^2}{\|P_{\omega(t)}e\|^2} = \frac{\int_{E_{x_\omega}(t)} |u(x)|^2 dx}{\int_{E_{x_\omega}(t)} |e(x)|^2 dx} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \frac{|u(x_\omega)|^2 + |u(l - x_\omega)|^2}{|e(x_\omega)|^2 + |e(l - x_\omega)|^2}.$$

Тем самым выполнено условие 5. Это позволяет определить полуторалинейную форму на гладких волнах

$$\langle u, v \rangle_\omega := \frac{u(x_\omega)\overline{v(x_\omega)} + u(l - x_\omega)\overline{v(l - x_\omega)}}{|e(x_\omega)|^2 + |e(l - x_\omega)|^2}, \quad u, v \in \mathcal{U}_{L_0}.$$

Факторизуя по отношению эквивалентности

$$u \sim v \Leftrightarrow \langle u - v, u - v \rangle_\omega = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x_\omega) = v(x_\omega), \\ u(l - x_\omega) = v(l - x_\omega), \end{cases}$$

минуя стебли, приходим к двумерным пространствам значений  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w = \{[u](\omega), u \in \mathcal{U}_{L_0}\}$  со скалярным произведением

$$\langle [u](\omega), [v](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} = \frac{u(x_\omega)\overline{v(x_\omega)} + u(l - x_\omega)\overline{v(l - x_\omega)}}{|e(x_\omega)|^2 + |e(l - x_\omega)|^2}.$$

Такое определение не зависит от выбора представителей классов эквивалентности  $u$  и  $v$ . При этом можно записать, обозначив

$$\rho(x) := (|e(x)|^2 + |e(l-x)|^2),$$

$$\begin{aligned} (u, v)_{\mathcal{H}} &= \int_0^l u(x)\overline{v(x)}dx = \int_0^{\frac{l}{2}} (u(x)\overline{v(x)} + u(l-x)\overline{v(l-x)})dx \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \langle [u](\omega_x), [v](\omega_x) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega_x}^w} \rho(x)dx = \int_{\Omega_{L_0}} \langle [u](\omega), [v](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} d\mu(\omega), \end{aligned}$$

где  $\mu$  – мера на  $\Omega_{L_0}$ , являющаяся образом меры  $\rho(x)dx$  на отрезке  $[0, \frac{l}{2}]$  под действием отображения  $\beta$ . Таким образом, выполнено условие 6. Мы получаем пространство волнового представления

$$\mathcal{H}_{L_0}^w = \oplus \int_{\Omega_{L_0}} \mathcal{U}_{L_0, \omega}^w d\mu(\omega).$$

Оператор перехода  $W^w$  получается как замыкание оператора  $W_0^w : u \mapsto [u](\omega)$ , заданного на области определения  $\text{Dom } W_0^w = \mathcal{U}_{L_0}$ . Он, очевидно, изометричен, но условие 7 требует его унитарности.

**Лемма 14.** *Оператор  $W^w$  унитарен.*

**Доказательство.** Пусть  $y^w \in \mathcal{H}^w$  и  $u \in \mathcal{U}_{L_0}$ . При каждом  $\omega \in \Omega_{L_0}$  значение  $y^w(\omega)$  лежит в  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$ , классе эквивалентности функций из  $\mathcal{U}_{L_0}$ , имеющих определенные значения в точках  $x_\omega$  и  $l-x_\omega$ . Обозначим эти значения  $y(x_\omega)$  и  $y(l-x_\omega)$ . Тогда элементу  $y^w$  соответствует функция  $y : [0, l] \rightarrow \mathbb{C}$ , причем

$$\begin{aligned} \langle [u](\omega), y^w(\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} &= \langle [u](\omega), [v_y](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} \\ &= \frac{u(x_\omega)\overline{v_y(x_\omega)} + u(l-x_\omega)\overline{v_y(l-x_\omega)}}{\rho(x)} = \frac{u(x_\omega)\overline{y(x_\omega)} + |1u(l-x_\omega)\overline{y(l-x_\omega)}}{\rho(x)}, \end{aligned}$$

где  $v_y$  – такой элемент  $\mathcal{U}_{L_0}$ , что  $[v_y](\omega) = y^w(\omega)$ . Получается, что для любого  $u \in \mathcal{U}_{L_0}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{L_0}} \langle [u](\omega), y^w(\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} d\mu(\omega) \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{u(x_\omega) \overline{y(x_\omega)} + u(l-x_\omega) \overline{y(l-x_\omega)}}{\rho(x)} \rho(x) dx = \int_0^l u(x_\omega) \overline{y(x_\omega)} dx, \end{aligned}$$

то есть интеграл в правой части сходится. Это означает, что  $y \in L_2(0, l) = \mathcal{H}$  и  $y = W_0^{w*} y^w$ . Если  $y = 0$ , то и  $y^w = 0$ , поэтому  $\text{Ker } W_0^{w*} = \{0\}$  и  $\text{Ran } W_0^w = \text{Ran } W^w = \mathcal{H}$ . С учетом изометричности это означает, что  $W^w$  – унитарный оператор, что и требовалось доказать.  $\square$

**2.6. Координатное представление.** Пусть  $e_1, e_2$  – базис в  $\text{Ker } L_0^*$ . Решения уравнения  $-u'' + qu = 0$  являются гладкими функциями, поэтому  $e_1, e_2 \in \mathcal{U}_{L_0}$ .

**Лемма 15.** Для всех  $\omega \in \Omega_{L_0} \setminus \{\omega_{\frac{l}{2}}\}$  векторы  $[e_1](\omega)$  и  $[e_2](\omega)$  образуют базис в  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$ .

**Доказательство.** Линейная зависимость между  $[e_1](\omega)$  и  $[e_2](\omega)$  означала бы пропорциональность векторов  $\begin{pmatrix} e_1(x_\omega) \\ e_1(l-x_\omega) \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} e_2(x_\omega) \\ e_2(l-x_\omega) \end{pmatrix}$  в  $\mathbb{C}^2$ , что означало бы существование решения уравнения  $-u'' + qu = 0$  с нулями в точках  $x_\omega$  и  $l-x_\omega$ . По лемме 13 такое невозможно.  $\square$

Из доказанной леммы следует выполнение условия 8 с  $\Omega_{L_0}^0 = \Omega_{L_0} \setminus \{\omega_{\frac{l}{2}}\}$ . Введем коэффициенты в пространствах  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$  с помощью элементов  $e_1, e_2$ :

$$\widehat{u}(x_\omega) = \begin{pmatrix} \langle u, e_1 \rangle_\omega \\ \langle u, e_2 \rangle_\omega \end{pmatrix}.$$

Это не координаты в разложении элемента  $[u](\omega)$  по базису  $[e_1](\omega), [e_2](\omega)$ , координатами будут компоненты вектора  $G^{-1}(\omega) \widehat{u}(x_\omega)$ , где

$$G(\omega) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle_\omega & \langle e_2, e_1 \rangle_\omega \\ \langle e_1, e_2 \rangle_\omega & \langle e_2, e_2 \rangle_\omega \end{pmatrix},$$

матрица Грама. Коэффициенты  $\widehat{u}(x) \in \mathbb{C}^2$  доступны «внешнему наблюдателю», линейное отображение  $[u](\omega) \mapsto \widehat{u}(x_\omega)$  биективно из  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$  в  $\mathbb{C}^2$ . В пространстве  $\mathbb{C}^2$  нужно задать скалярное произведение, соответствующее  $\langle [u](\omega), [v](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w}$  в  $\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$ .

**Лемма 16.** Для любых  $u, v \in \mathcal{U}_{L_0, \omega}^w$  и  $\omega \in \Omega_{L_0}$

$$\langle [u](\omega), [v](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} = (G^{-1}(\omega)\widehat{u}(x_\omega), \widehat{v}(x_\omega))_{\mathbb{C}^2}.$$

**Доказательство.** По лемме 15 матрица Грама  $G(\omega_x)$  при  $x \in [0, \frac{l}{2})$  невырождена. Вычисления дают:

$$\langle [u](\omega), [v](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w} = \frac{u(x_\omega)\overline{v(x_\omega)} + u(l-x_\omega)\overline{v(l-x_\omega)}}{\rho(x_\omega)},$$

$$\widehat{u}(x_\omega) = \frac{1}{\rho(x_\omega)} \begin{pmatrix} u(x_\omega)\overline{e_1(x_\omega)} + u(l-x_\omega)\overline{e_1(l-x_\omega)} \\ u(x_\omega)\overline{e_2(x_\omega)} + u(l-x_\omega)\overline{e_2(l-x_\omega)} \end{pmatrix} = T(x_\omega) \begin{pmatrix} u(x_\omega) \\ u(l-x_\omega) \end{pmatrix},$$

где

$$T(x) := \frac{1}{\rho(x)} \begin{pmatrix} \overline{e_1(x)} & \overline{e_1(l-x)} \\ \overline{e_2(x)} & \overline{e_2(l-x)} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Далее,

$$\begin{aligned} & (G^{-1}(\omega_x)\widehat{u}(x), \widehat{v}(x))_{\mathbb{C}^2} \\ &= \left( G^{-1}(\omega_x)T(x) \begin{pmatrix} u(x_\omega) \\ u(l-x_\omega) \end{pmatrix}, T(x) \begin{pmatrix} v(x_\omega) \\ v(l-x_\omega) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} \\ &= \left( T^*(x)G^{-1}(\omega_x)T(x) \begin{pmatrix} u(x_\omega) \\ u(l-x_\omega) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v(x_\omega) \\ v(l-x_\omega) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $G(\omega_x) = \rho(x)T(x)T^*(x)$ , так что  $T^*(x)G^{-1}(\omega_x)T(x) = \frac{I}{\rho(x)}$  и

$$\begin{aligned} & (G^{-1}(\omega)\widehat{u}(x_\omega), \widehat{v}(x_\omega))_{\mathbb{C}^2} \\ &= \frac{1}{\rho(x_\omega)} \left( \begin{pmatrix} u(x_\omega) \\ u(l-x_\omega) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v(x_\omega) \\ v(l-x_\omega) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} = \langle [u](\omega), [v](\omega) \rangle_{\mathcal{U}_{L_0, \omega}^w}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Рассмотрим пространство координатного представления

$$\mathcal{H}^c := L_2 \left( \left( 0, \frac{l}{2} \right), G^{-1}(\omega)\rho(x_\omega)dx_\omega, \mathbb{C}^2 \right).$$

Оператор  $W_0^c : u \mapsto \widehat{u}$ , из  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{H}^c$ , заданный на  $\text{Dom } W_0^c = \mathcal{U}_{L_0}$ , при замыкании дает изометрический оператор  $W^c = \overline{W_0^c}$ , определенный на всем  $\mathcal{H}$ .

**Лемма 17.** *Оператор  $W^c$  унитарен, для  $u \in \mathcal{H}$  верно*

$$(W^c u)(x_\omega) = T(x_\omega) \begin{pmatrix} u(x_\omega) \\ u(l - x_\omega) \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

**Доказательство.** Для любых  $u \in \mathcal{U}_{L_0}$  и  $\hat{y} \in \mathcal{H}^c$  в силу равенства

$$T^*(x_\omega)G^{-1}(\omega)T(x_\omega) = \frac{I}{\rho(x_\omega)}$$

получаем:

$$\begin{aligned} (W_0^c u, \hat{y})_{\mathcal{H}^c} &= \int_0^{\frac{l}{2}} (G^{-1}(\omega_x)\hat{u}(x), \hat{y}(x))_{\mathbb{C}^2} \rho(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \left( G^{-1}(\omega_x)T(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix}, \hat{y}(x) \right)_{\mathbb{C}^2} \rho(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{T^{-*}(x)}{\rho(x)} \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix}, \hat{y}(x) \right)_{\mathbb{C}^2} \rho(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix}, T^{-1}(x)\hat{y}(x) \right)_{\mathbb{C}^2} dx = \int_0^l u(x)\overline{y(x)} dx, \end{aligned}$$

где

$$y(x) = \begin{cases} (T^{-1}(x)\hat{y}(x))_1, & x \in (0, \frac{l}{2}), \\ (T^{-1}(l-x)\hat{y}(l-x))_2, & x \in (\frac{l}{2}, l). \end{cases}$$

Заметим, что  $\hat{y} \in L_2((0, \frac{l}{2}), G^{-1}(\omega)\rho(x_\omega)dx_\omega, \mathbb{C}^2)$  означает, что

$$\int_0^{\frac{l}{2}} (G^{-1}(\omega)\hat{y}(x_\omega), \hat{y}(x_\omega))\rho(x_\omega)dx_\omega = \int_0^{\frac{l}{2}} \|T^{-1}(x_\omega)\hat{y}(x_\omega)\|^2 dx_\omega = \|y\|_{L_2(0,l)}^2.$$

Следовательно,  $y = W_0^{c*}\hat{y}$ . Если  $y = 0$ , то  $T^{-1}\hat{y} = 0$ , а значит,  $\hat{y} = 0$ , поэтому  $\text{Ker } W_0^{c*} = \{0\}$ . Это означает, что  $\text{Ran } W_0^c = \mathcal{H}^c$  и что оператор  $\overline{W_0^c}$  унитарен. Далее, оператор из  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{H}^c$ , действующий по правилу

$$u(x) \mapsto T(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix},$$



во-первых, изометричен, и, во-вторых, совпадает на  $\mathcal{U}_{L_0}$  с  $W_0^c$ . Это означает, что он равен  $\overline{W_0^c}$ . Значит, 2.24 верно. Тем самым лемма доказана.  $\square$

Определим в пространстве  $\mathcal{H}^c$  оператор

$$L_0^c = W^c L_0 W^{c*}.$$

В силу унитарности  $W^c$ ,

$$\begin{aligned} \text{Graph } L_0^{c*} &= \overline{\text{Graph } (W^c L_0^* |_{\mathcal{U}_{L_0}} W^{c*})} \\ &= \overline{\{(W^c u^h(T), -W^c u^{h\ddagger}(T)), h \in \mathcal{M}, T \geq 0\}} \\ &= \overline{\{(\widehat{u^h(T)}, -\widehat{u^{h\ddagger}(T)}), h \in \mathcal{M}, T \geq 0\}}. \end{aligned}$$

В таком виде «внешний наблюдатель» сможет построить график оператора  $L_0^{c*}$  с помощью граничного управления. Этот оператор окажется дифференциальным оператором второго порядка, по нему можно будет восстановить оригинал  $L_0^*$ .

**Теорема 2.** *Оператор  $L_0^{c*}$  действует на области определения*

$$\text{Dom } L_0^{c*} = \left\{ \widehat{u}(x) = T(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix}, u \in H^2(0, l) \right\},$$

где  $T(x)$  дается формулой 2.23, по правилу

$$(L_0^{c*} \widehat{u})(x) = -\widehat{u}''(x) + \widehat{P}(x) \widehat{u}'(x) + \widehat{Q}(x) \widehat{u}(x),$$

где

$$\widehat{P}(x) = -2T(x)T^{-1}'(x), \quad (2.25)$$

$$\widehat{Q}(x) = T(x)Q(x)T^{-1}(x) - T(x)T^{-1}''(x), \quad (2.26)$$

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(l-x) \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\text{Dom } L_0^c = \{\widehat{u} \in \text{Dom } L_0^{c*} : \widehat{u}(0) = \widehat{u}'(0) = 0\},$$

$$\text{Dom } (W^c L W^{c*}) = \{\widehat{u} \in \text{Dom } L_0^{c*} : \widehat{u}(0) = 0\}.$$

**Доказательство.** Для  $u \in \text{Dom } L_0^*$  имеем:

$$\widehat{u}(x) = (W^c u)(x) = T(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(L_0^{c*}\widehat{u})(x) &= \widehat{L_0^*u}(x) = T(x) \begin{pmatrix} -u''(x) + q(x)u(x) \\ -u''(l-x) + q(l-x)u(l-x) \end{pmatrix} \\
&= T(x) \left( - \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix}'' + Q(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix} \right) \\
&= T(x) \left( -(T^{-1}(x)\widehat{u}(x))'' + Q(x)T^{-1}(x)\widehat{u}(x) \right) \\
&= -\widehat{u}''(x) + \widehat{P}(x)\widehat{u}'(x) + \widehat{Q}(x)\widehat{u}(x).
\end{aligned}$$

Области определения операторов  $L_0^{c*}$ ,  $L_0^c$  и  $W^cLW^{c*}$  пересчитываются из областей определения операторов  $L_0^*$ ,  $L_0$  и  $L$ , соответственно, элементарным образом.  $\square$

**Замечание 4.** Область определения оператора  $L_0^{c*}$  содержится в линеале

$$\left\{ \widehat{u} \in H^2 \left( \left[ 0, \frac{l}{2} \right], \mathbb{C}^2 \right) : \widehat{u} \left( \frac{l}{2} \right) = \widehat{u}_0 \begin{pmatrix} e_1(\frac{l}{2}) \\ e_2(\frac{l}{2}) \end{pmatrix}, \widehat{u}_0 \in \mathbb{C}, \widehat{u}' \left( \frac{l}{2} \right) = 0 \right\}.$$

**Доказательство.** Поскольку  $T \in C^\infty[0, \frac{l}{2}]$ , справедливо

$$T(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix} \in H^2 \left( \left[ 0, \frac{l}{2} \right], \mathbb{C}^2 \right)$$

при  $u \in H^2(0, l)$ . Векторнозначная функция  $v(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(l-x) \end{pmatrix}$ , помимо принадлежности к  $H^2([0, \frac{l}{2}], \mathbb{C}^2)$  удовлетворяет еще двум условиям:  $v(\frac{l}{2}) = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $v'(\frac{l}{2}) = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  с некоторыми  $v_0, v_1 \in \mathbb{C}$ . Эти условия при умножении на матрицу  $T(x)$  переходят в условия  $\widehat{u}(\frac{l}{2}) = \widehat{u}_0 \begin{pmatrix} e_1(\frac{l}{2}) \\ e_2(\frac{l}{2}) \end{pmatrix}$ ,  $\widehat{u}_0 \in \mathbb{C}$  и  $\widehat{u}'(\frac{l}{2}) = 0$ . Первое следует непосредственно из подстановки, второе использует четность функции  $\rho(x)$  относительно точки  $\frac{l}{2}$ .

Матрица  $T(x)$  вырождается в точке  $\frac{l}{2}$ , поэтому  $T^{-1}(x) \notin C^\infty[0, \frac{l}{2}]$  и имеет место лишь включение, а не равенство линеалов.  $\square$

**2.7. Обратная задача.** «Внешний наблюдатель», построив волновую модель по данным обратной задачи, может восстановить потенциал  $q$ . Однако восстановление возможно с точностью до замены  $q(x)$  на

$q(l-x)$ , что естественно: для таких потенциалов данные будут одинаковыми. Волновая модель строится в виде дифференциального оператора второго порядка на отрезке  $[0, \frac{l}{2}]$ , действующего на векторнозначные функции с двумя компонентами. Соответственно, известны коэффициенты  $\hat{P}(x)$  и  $\hat{Q}(x)$ . Заметим, что матрица Грама  $G(\omega_x)$  и плотность меры  $\rho(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(P_{\omega_x(t)}^{c,e})}{2t}$  определяются в «волновых» терминах и потому тоже доступны «внешнему наблюдателю».

Для нахождения потенциала достаточно знать  $\hat{P}$  и  $\hat{Q}$ . Уравнение  $-2TT^{-1} = \hat{P}$  равносильно уравнению  $T^{-1'} = -\frac{1}{2}T^{-1}\hat{P}$  на функцию  $T^{-1}$ . Пусть  $M(x)$  обозначает его фундаментальное (матричное) решение:

$$\begin{cases} M'(x) = -\frac{1}{2}M(x)\hat{P}(x), \\ M(0) = I. \end{cases}$$

Тогда  $T^{-1}(x) = T_0^{-1}M(x)$  с некоторой постоянной обратимой матрицей  $T_0$  и  $T(x) = M^{-1}(x)T_0$ . Уравнение (2.26) запишется в виде

$$\hat{Q} = M^{-1}T_0QT_0^{-1}M - M^{-1}T_0(T_0M)'',$$

что равносильно

$$M\hat{Q}M^{-1} = T_0QT_0^{-1} - M''M^{-1},$$

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(l-x) \end{pmatrix} = T_0^{-1}(M(x)\hat{Q}(x)M^{-1}(x) + M''(x)M^{-1}(x))T_0.$$

Мы видим, что значения потенциала  $q$  в симметричных относительно  $\frac{l}{2}$  точках находятся как собственные значения матрицы

$$M(x)\hat{Q}(x)M^{-1}(x) + M''(x)M^{-1}(x),$$

которую можно вычислить, зная коэффициенты  $\hat{P}$  и  $\hat{Q}$ . Таким образом, потенциал восстанавливается с точностью до отражения от середины отрезка.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. И. Белишев, *К задаче Каца о восстановлении формы области по спектру задачи Дирихле*. — Зап. научн. семин ЛОМИ **173** (1988), 30–41.
2. М. И. Белишев, М. Н. Демченко, *Динамическая система с граничным управлением, ассоциированная с симметрическим полуограниченным оператором*. — Зап. научн. семин ПОМИ **409** (2012), 17–39.
3. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель оператора Штурма–Лиувилля на полуси*. — Алгебра и анализ **29**, No. 2 (2017), 3–33.
4. Г. Биркгоф, *Теория решеток*. Москва, Наука, 1984.

5. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. ЛГУ, 1980.
6. М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений*. — Тр. Московского матем. общ. **1** (1952), 187–246.
7. Д. Келли, *Общая топология*. Москва, Наука, 1981.
8. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, Наука, 1989.
9. А. Н. Кочубей, *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений*. — Матем. заметки **17** (1975), 41–48.
10. М. А. Наймарк. *Линейные дифференциальные операторы*. Москва, Наука, 1969.
11. А. В. Штраус, *Функциональные модели и обобщенные спектральные функции симметрических операторов*. — Алгебра и анализ **10**, No. 5 (1998) 1–76.
12. М. И. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*. — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), 1–45.
13. М. И. Belishev, *Recent progress in the boundary control method*. — Inverse Problems **23**, No. 5 (2007), 1–67.
14. М. И. Belishev, *A unitary invariant of a semi-bounded operator in reconstruction of manifolds*. — J. Operator Theory **69**, No. 2 (2013), 299–326.
15. М. И. Belishev, М. N. Demchenko, *Elements of noncommutative geometry in inverse problems on manifolds*. — J. Geom. Phys. **78** (2014), 29–47.
16. V. A. Derkach, M. M. Malamud, *The extension theory of Hermitian operators and the moment problem*. — J. Math. Sci. **73**, No. 2 (1995), 141–242.
17. J. M. Kim, *Compactness in  $\mathcal{B}(X)$* . — J. Math. Anal. Appl. **320** (2006), 619–631.
18. V. Ryzhov, *A general boundary value problem and its Weyl function*. — Opuscula Math. **27**, No. 2 (2007), 305–331.
19. S. A. Simonov, *Wave model of the regular Sturm–Liouville operator*. — In: Proceedings of 2017 Days on Diffraction, 2007, pp. 300–303; arXiv: 1801.02011.

Simonov S. A. Wave model of the Sturm–Liouville operator on an interval.

In the paper we construct the wave functional model of a symmetric restriction of the regular Sturm–Liouville operator on an interval. The model is based upon the notion of the wave spectrum and is constructed according to an abstract scheme which was proposed earlier. The result of the construction is a differential operator of the second order on an interval, which differs from the original operator only by a simple transformation.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН;

С.-Петербургский государственный университет,  
Университетская наб. 7/9,  
С.-Петербург 199034, Россия

Поступило 28 сентября 2018 г.