

М. М. Попов

## ОБ ИНДЕКСЕ МОРСА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ, ВЛОЖЕННЫХ В $\mathbb{R}^3$

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Индекс Морса возник в теории вариационных задач в большом, см. [1]. Затем он проявился и в задачах математической физики, связанных с развитием и применением квазиклассических асимптотик [2, 3] и теории распространения коротких волн в неоднородных средах, например, в лучевом методе. Индекс Морса здесь – это число каустических/фокальных точек (с учетом их кратности), через которые прошел луч между источником и точкой наблюдения. В недавней работе [4] предложен и развит алгоритм вычисления индекса Морса в лучевом методе, где он позволяет продолжать лучевые формулы, описывающие волновое поле за каустиками, т.е. после того, как соответствующие лучи прошли через каустики. Напомним, что лучевой метод приводит к сингулярности поля на каустике, и поэтому он неприменим на каустике и в некоторой ее окрестности.

Данная работа посвящена вычислению индекса Морса для геодезических на достаточно гладкой поверхности, вложенной в трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ .

На рис. 1 представлены два примера геодезических и каустик на гладких поверхностях с целью иллюстрации индекса Морса. Меридианы на сфере являются геодезическими и они имеют две фокальные точки в полюсах, где они все пересекаясь образуют фокусы (по терминологии оптики). Фокусы не устойчивы по отношению к малым деформациям и индексы Морса в данном случае не являются гомотопическими инвариантами. Индекс Морса каждой из этих замкнутых геодезических равен двум. В случае тела вращения на его поверхности существуют геодезические, которые попеременно касаются двух

---

*Ключевые слова:* геодезические кривые, функционал Ферма, уравнения в вариациях, геометрическое расхождение, индекс Морса.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00529А.

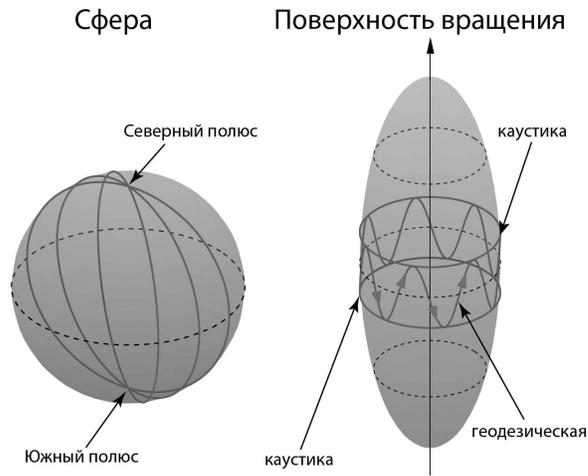


Рис. 1. Примеры индексов Морса геодезических на поверхностях в  $\mathbb{R}^3$ .

параллельных каустик (окружностей) и заключены между ними. Каустики образованы плоскими сечениями тела, ортогональными оси вращения. Индекс Морса здесь – это просто число точек касания каустик на рассматриваемом отрезке геодезической.

Интерес к этому вопросу вызван тем, что волновое поле поверхностных волн скользит вдоль границ по геодезическим, которые образуют, вообще говоря, многочисленные кауститки. Это же обстоятельство имеет место в задачах коротковолновой дифракции на трехмерных телах в затененной части поверхности рассеивателя, где возникают волны соскальзывания.

Предлагаемый и используемый нами подход основывается на тех же идеях, что и в работе [4].

Во-первых, рассматривается пучок геодезических близких к данной выделенной/центральной геодезической, и выводятся уравнения в вариациях, решением которых является геометрическое расхождение этого пучка близких геодезических.

Во-вторых, строится некоторое комплексно-значное решение этих уравнений, аргумент которого является монотонной функцией длины

дуги выделенной геодезической. Приращение аргумента этой функции позволяет вычислить индекс Морса для выделенной геодезической.

§2. ВАРИАЦИОННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ.

Обозначим через  $\vec{R} = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{e}_i$  радиус-вектор в декартовой системе координат  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ортами которой являются  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Положим, что уравнение поверхности  $\Sigma$ , вложенной в  $\mathbb{R}^3$ , задано в параметрическом виде

$$x^i = x^i(\xi_1, \xi_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  некоторые параметры, тогда ее уравнение записывается в виде

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 x^i(\xi_1, \xi_2) \vec{e}_i. \quad (2)$$

Равенство (2) индуцирует риманову метрику на этой поверхности  $\Sigma$ . Действительно, для квадрата элемента длины  $dS^2$  на  $\Sigma$  получаем из приведенных выше формул следующее равенство

$$dS^2 = (d\vec{R}, d\vec{R}) = g_{11}d\xi_1^2 + 2g_{12}d\xi_1d\xi_2 + g_{22}d\xi_2^2,$$

в котором элементы метрического тензора  $g_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2$ , выражаются через функции (1) очевидным образом. Функционал Ферма  $F = \int \sqrt{dS^2}$  принимает вид

$$F = \int dt \sqrt{\sum_{i,k=1}^2 g_{ik} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_k}, \quad (3)$$

где приняты дополнительные обозначения  $\dot{\xi}_i = d\xi_i/dt$ ,  $i = 1, 2$  и  $t$  есть некоторый параметр вдоль кривых.

Геодезические на  $\Sigma$  являются экстремальными функционала Ферма (3), т.е. решениями уравнений Эйлера относительно функций  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  этого функционала.

При этом каждая экстремаль может рассматриваться как достаточно гладкая кривая в  $\mathbb{R}^3$ , описываемая формулой

$$\vec{R}(t) = \sum_{i=1}^3 x^i(\xi_1(t), \xi_2(t)) \vec{e}_i.$$

В дальнейшем нам потребуется рассматривать пучки геодезических в малой окрестности одной выделенной, центральной геодезической этого пучка.

### §3. ОКРЕСТНОСТЬ ВЫДЕЛЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ

Будем считать, что выделенная или центральная геодезическая пучка задана в виде вектор-функции  $\vec{R} = \vec{r}_0(s)$  ее длины дуги  $s$ . В ее окрестности введем криволинейные координаты следующим образом. В качестве репера возьмем три единичных ортогональных вектора, связанных с геодезической  $\vec{r}_0(s)$ : касательный вектор  $\vec{t}_0(s) = \frac{d\vec{r}_0}{ds}$ , вектор главной нормали  $\vec{n}(s)$  и вектор бинормали  $\vec{e}(s) = [\vec{t}_0(s), \vec{n}(s)]$ , где через  $[\cdot, \cdot]$  обозначено векторное произведение. Преобразование векторов репера при перемещении вдоль этой геодезической (аффинная связность) описывается уравнениями Френе:

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = K(s)\vec{n}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -K(s)\vec{t}_0 + T(s)\vec{e}; \quad \frac{d\vec{e}}{ds} = -T(s)\vec{n}; \quad (4)$$

где  $K(s)$  есть кривизна, а  $T(s)$  — кручение геодезической  $\vec{r}_0(s)$ . Далее введем в окрестности нее локальные координаты  $s, q, n$  формулой

$$\vec{R} = \vec{r}_0(s) + q\vec{e}(s) + n\vec{n}(s), \quad (5)$$

так что уравнение выделенной геодезической есть  $q \equiv 0$  и  $n \equiv 0$  тождественно по  $s$ .

Эти координаты будем использовать для описания пучка геодезических в некоторой малой окрестности центральной  $\vec{r}_0(s)$ . Отметим, что при  $n \equiv 0$  равенство (5) описывает касательное расслоение поверхности  $\Sigma$  с базой  $\vec{r}_0(s)$ , так как главная нормаль к геодезической является и нормалью к  $\Sigma$ .

Формула (5) индуцирует в окрестности центральной геодезической метрику

$$dS^2 = g_{ss}ds^2 + dq^2 + dn^2 + 2g_{sq}dqds + 2g_{sn}dn ds, \quad (6)$$

в которой элементы тензора  $g$  имеют вид

$$\begin{aligned} g_{ss} &= (1 - Kn)^2 + (nT)^2 + (qT)^2 \\ g_{sq} &= nT; \quad g_{sn} = -qT. \end{aligned} \quad (7)$$

Функционал Ферма (3) во введенных координатах (5) принимает вид

$$F = \int \sqrt{g_{ss} + \dot{q}^2 + \dot{n}^2 + 2g_{sq}\dot{q} + 2g_{sn}\dot{n}} ds, \quad (8)$$

где  $\dot{q}$  и  $\dot{n}$  означают производные по  $s$ .

Таким образом функция Лагранжа  $L(q, n; \dot{q}, \dot{n}; s)$  упрощается

$$L = \sqrt{g_{ss} + \dot{q}^2 + \dot{n}^2 + 2g_{sq}\dot{q} + 2g_{sn}\dot{n}} \quad (9)$$

и функционал (8) оказывается удобным для описания пучка геодезических из малой окрестности центральной геодезической  $\vec{r}_0(s)$ . Однако теперь нам нужны экстремали этого функционала, лежащие на поверхности  $\Sigma$ , так что возникает задача на условный экстремум функционала Ферма, см. по этому поводу, например, [5].

Уравнение поверхности  $\Sigma$  в локальных координатах  $s, q, n$  в малой окрестности  $\vec{r}_0(s)$  можно представить в виде

$$n \equiv \sigma(s, q) = \frac{1}{2}\kappa(s)q^2 + O(q^3), \quad (10)$$

где символ  $O(q^3)$  зависит от  $s$ , а  $\kappa(s)$  есть кривизна  $\Sigma$  в ее нормальном сечении, ортогональном вектору касательной  $\vec{t}_0(s)$  при каждом  $s$ . При этом для вывода уравнений в вариациях нам достаточно главного члена в разложении (10) по степеням  $q$ .

Заменив координату  $n$  (и  $\dot{n} = dn/ds$ ) в функции Лагранжа (9) выражением (10), мы приходим уже к безусловной задаче на экстремум функционала (8) для одной искомой функции  $q(s)$ . Решив эту задачу, мы получаем уравнения пучка геодезических, зависящих от некоторого параметра  $\gamma$ , в следующем виде

$$\vec{R}(s, \gamma) = \vec{r}_0(s) + q(s, \gamma)\vec{e}(s) + \sigma(s, q(s, \gamma))\vec{n}(s). \quad (11)$$

Будем предполагать, что центральной геодезической  $\vec{r}_0(s)$  соответствует значение  $\gamma = \gamma_0$ , так что  $q(s, \gamma_0) \equiv 0$ .

В дальнейшем нам потребуется единичный вектор касательной к геодезическим, принадлежащим рассматриваемому пучку.

Дифференцируя равенство (11) по  $s$  и используя формулы Френе (4), получаем

$$\frac{d}{ds}\vec{R}(s, \gamma) = \vec{t}_0(s)[1 - \sigma K] + \vec{e}(s)[\dot{q} + \sigma T] + \vec{n}(s)\left[\frac{d\sigma}{ds} - qT\right], \quad (12)$$

где  $\frac{d\sigma}{ds}$  есть полная производная от функции (10), т.е.  $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\partial\sigma}{\partial s} + \frac{\partial\sigma}{\partial q}\dot{q}$ . При этом длина, норма вектора  $\left\|\frac{d}{ds}\vec{R}(s, \gamma)\right\|$ , равна значению лагранжиана  $L$  (9), вычисленному на геодезических  $q = q(s, \gamma)$  из рассматриваемого пучка, т.е.

$$\left\|\frac{d}{ds}\vec{R}(s, \gamma)\right\| = L(s, q(s, \gamma), \dot{q}(s, \gamma)). \quad (13)$$

Это проверяется прямыми вычислениями с учетом формул (9), (10), (12). В дальнейшем единичный вектор касательной к геодезическим из пучка будем обозначать  $\vec{t}(s, \gamma)$ .

#### §4. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ

Воспользуемся далее Гамильтоновой формой вариационного принципа. Напомним, что для этого вводится обобщенный импульс  $p$ , соответствующий координате  $q$ ,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{L} \left\{ \dot{q} \left[ \left( \frac{\partial\sigma}{\partial q} \right)^2 + 1 \right] + \frac{\partial\sigma}{\partial s} \frac{\partial\sigma}{\partial q} + g_{sn} \frac{\partial\sigma}{\partial q} + g_{sq} \right\}, \quad (14)$$

где лагранжиан уже вычислен на  $\Sigma$  в окрестности центральной геодезической пучка, т.е. координата  $n$  в (9) заменяется по формуле (10). Равенство (14) рассматривается как уравнение, определяющее  $\dot{q}$  как функцию  $p$ ,  $q$  и  $s$  ( $\dot{q} = \dot{q}(p, q, s)$ ). Функция Гамильтона  $H = H(p, q, s)$  вычисляется по формуле

$$H = \{p\dot{q} - L(q, \dot{q}, s)\}_{\dot{q}=\dot{q}(p, q, s)}. \quad (15)$$

Система уравнений для геодезических теперь принимает вид

$$\frac{d}{ds}q = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{d}{ds}p = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (16)$$

Нас интересуют геодезические рассматриваемого пучка  $q(s, \gamma)$ ,  $p(s, \gamma)$  геодезических в малой окрестности  $\vec{r}_0(s)$ , т.е. при  $|q| \ll 1$  и  $|p| \ll 1$ , которые и описываются приближенно уравнениями в вариациях. Последние представляют собой линеаризацию канонической системы (16) по малым  $q(s)$  и  $p(s)$ .

Для вывода уравнений в вариациях достаточно сохранить лишь квадратичные члены в разложении функции Гамильтона в ряд Тейлора по степеням  $q$  и  $p$ . Отметим, что линейные члены в этом разложении обращаются в нуль в силу того, что  $q = 0$  и  $p = 0$  есть решение (16), соответствующее центральной геодезической пучка.

Обратимся далее к уравнению (14) для функции  $\dot{q}(q, p, s)$ , которую также надлежит строить в виде разложения по степеням  $q$  и  $p$ .

Для этого рассмотрим снова функцию Лагранжа  $L$  (9), в которой  $\dot{n}$  заменена на  $\frac{d}{ds}\sigma(s, q) = \frac{\partial\sigma}{\partial s} + \frac{\partial\sigma}{\partial q}\dot{q}$ , и выделим в ней старшие члены при малых  $q$  и  $\dot{n}$ . Для элементов метрического тензора в (9) получаем из равенств (7) следующие выражения:

$$\begin{aligned} g_{ss} &= 1 - \varkappa(s)K(s)q^2 + T^2(s)q^2 + O(q^3) \\ g_{sq} &= \frac{1}{2}\varkappa(s)T(s)q^2 + O(q^3); \quad g_{sn} = -T(s)q. \end{aligned} \quad (17)$$

Их использование в формуле для функции Лагранжа приводит к следующему результату

$$L(s, q, \dot{q}) = [1 - q^2(\varkappa(s)K(s) - T^2(s)) + \dot{q}^2 + O(q^3) + O(q^2\dot{q})]^{1/2}. \quad (18)$$

Подобные преобразования числителя в формуле (14) для импульса  $p$  дают следующее равенство

$$Lp = \dot{q} - \frac{1}{2}\varkappa(s)T(s)q^2 + O(q^2\dot{q}) + O(q^3). \quad (19)$$

Наконец, формулы (18) и (19) позволяют вычислить гамильтониан  $H$  с точностью до квадратичных членов по переменным  $q$  и  $p$ .

Действительно, из уравнения (14) следует, что  $\dot{q} = p$ , а из равенства (15) вытекает, что

$$H_2(s, p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\varkappa(s)K(s) - T^2(s))q^2. \quad (20)$$

Отметим, что свободный член  $H_0 = -1$ , а линейный  $H_1$ , как и должно быть, обратился в нуль.

Таким образом мы получаем систему уравнений в вариациях в виде линейной канонической системы

$$\frac{d}{ds}Q = P, \quad \frac{d}{ds}P = (T^2(s) - \varkappa(s)K(s))Q, \quad (21)$$

для функций  $Q(s)$  и  $P(s)$  вместо  $q(s)$  и  $p(s)$  соответственно. Они введены для сохранения обозначений, принятых в предыдущих работах автора на близкие темы, см. [6].

### §5. НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСХОЖДЕНИЯ ПУЧКА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Положим, что геодезические из пучка в окрестности  $\vec{r}_0(s)$  построены как решение канонической системы уравнений (16),  $q = q(s, \gamma)$ ,  $p = p(s, \gamma)$ , гладко зависящие от параметра  $\gamma$ . Пусть центральной геодезической соответствует значение  $\gamma = \gamma_0$ . При этом очевидно,  $q(s, \gamma_0) \equiv 0$  и  $p(s, \gamma_0) \equiv 0$  тождественно по  $s$ . Тогда оказывается, что функции  $Q(s)$ ,  $P(s)$ , определенные следующими равенствами

$$Q(s) = \left. \frac{\partial q(s, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0}, \quad P(s) = \left. \frac{\partial p(s, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} \quad (22)$$

являются решениями системы (21). Причем геометрическое расхождение  $J(s)$  пучка геодезических, вычисляемое на данной центральной геодезической, находится по формуле  $J(s) = |Q(s)|$  по решению уравнений в вариациях (21) при определенных начальных данных, см. подробнее [7].

Далее нам потребуются начальные данные для вычисления геометрического расхождения рассматриваемого пучка геодезических.

С этой целью приведем более удобное выражение для импульса  $p$  (14), содержащее единичный вектор касательной  $\vec{t}(s, \gamma)$  геодезических из рассматриваемого пучка. Из равенств (6), (13) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{t}(s, \gamma) &= \left\| \frac{d\vec{R}(s, \gamma)}{ds} \right\|^{-1} \frac{d\vec{R}(s, \gamma)}{ds} \\ &= L^{-1} \left( \vec{t}_0(s)[1 - \sigma K] + \vec{e}(s)[\dot{q} + \sigma T] + \vec{n}(s) \left[ \frac{d\sigma}{ds} - qT \right] \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} (\vec{t}(s, \gamma), \vec{e}(s)) &= L^{-1}(\dot{q} + \sigma T); \\ (\vec{t}(s, \gamma), \vec{n}(s)) &= L^{-1} \left( \frac{d\sigma}{ds} - qT \right) = L^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial s} + \frac{\partial \sigma}{\partial q} \dot{q} - qT \right). \end{aligned} \quad (23)$$

С другой стороны, подставляя выражения (7) для элементов  $g_{sn}$  и  $g_{sq}$  в равенство (14), определяющее импульс  $p$ , получаем

$$p(s, \gamma) = L^{-1} \left( \dot{q} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial q} \right)^2 \right] + \frac{\partial \sigma}{\partial q} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial s} - qT \right) + \sigma T \right) \quad (24)$$

Сравнивая формулы (23) и (24), приходим к искомому выражению для импульса  $p(s, \gamma)$  геодезических из рассматриваемого пучка

$$p(s, \gamma) = (\vec{t}(s, \gamma), \vec{e}(s)) + \frac{\partial \sigma}{\partial q} (\vec{t}(s, \gamma), \vec{n}(s)). \quad (25)$$

Далее нам потребуются начальные данные для геометрического расхождения в двух случаях:

- (1) пучок геодезических выходит из одной точки под разными углами (точечный источник). В этом случае в качестве параметра пучка удобно взять угол выхода геодезических из источника, который мы будем обозначать  $\alpha$ .
- (2) пучок геодезических выходит по нормали к некоторой гладкой кривой на поверхности  $\Sigma$ , т.е. образован начальным волновым фронтом, заданным на  $\Sigma$ . В этом случае в качестве параметра пучка удобно использовать длину дуги волнового фронта, за которой мы сохраним обозначение  $\gamma$ .

Обратимся сперва к случаю 1), когда пучок геодезических образован точечным источником, помещенным в точку  $\vec{r}(0)$ , (длина дуги  $s$  отсчитывается от него). Таким образом, касательные векторы  $\vec{t}(s, \alpha)$  выходят из одной точки под разными углами  $\alpha$  ( $\alpha$  – полярный угол, который представляется естественным параметром пучка). При этом очевидно, что  $q(0, \alpha) = 0$  при всех  $\alpha$  и  $(\vec{t}(0, \alpha_0), \vec{n}(0)) = 0$ , т.к.  $\vec{t}(0, \alpha_0) = \vec{t}_0(0)$ . Вычисляя производные в правых частях (22) при  $s = 0$  и  $\alpha = \alpha_0$ , получаем следующие начальные данные для  $Q^{ps}(0)$  и  $P^{ps}(0)$

$$Q^{ps}(0) = 0, \quad P^{ps}(0) = \left( \frac{\partial \vec{t}(0, \alpha)}{\partial \alpha}, \vec{e}(0) \right) \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (26)$$

Здесь индекс  $ps$  (point source) добавлен для обозначения, что пучок геодезических порожден точечным источником.

Рассмотрим теперь случай 2), когда поле геодезических на поверхности  $\Sigma$  порождается волновым фронтом. Это означает, что каждая

геодезическая стартует из точки волнового фронта в направлении проекции главной нормали к фронту на касательную плоскость к  $\Sigma$  в точке выхода геодезической. В этом случае в качестве параметра  $\gamma$  выбирается длина дуги волнового фронта. Для вычисления начальных данных (22) достаточно рассмотреть соотношения между локальными координатами  $s, q$  и длиной дуги  $\gamma$  фронта в малой окрестности точки выхода центральной геодезической соответствующего пучка геодезических.

Итак, пусть точка  $\vec{r}(0, \gamma_0)$  лежит на фронте и является точкой выхода центральной геодезической. Вектор  $\vec{e}(0)$  совпадает с касательной к фронту, а  $\vec{t}(0, \gamma_0)$  совпадает с нормалью к нему в касательной к  $\Sigma$  плоскости в точке  $\vec{r}(0, \gamma_0)$ .

При условии согласования направления вектора  $\vec{e}(0)$  и направления отсчета длины дуги  $\gamma$  на волновом фронте получаем

$$q(0, \gamma) = \gamma - \gamma_0 + O((\gamma - \gamma_0)^2); s = O((\gamma - \gamma_0)^2). \quad (27)$$

Эти равенства позволяют вычислить для  $Q^{(wf)}(0)$  и  $P^{(wf)}(0)$  (индекс  $wf$  – wave front означает, что семейство геодезических порождается волновым фронтом) начальные данные

$$Q^{(wf)}(0) = 1; \quad P^{(wf)}(0) = \left( \frac{\partial \vec{t}(0, \gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_0}, \vec{e}(0) \right). \quad (28)$$

Отметим, что второе слагаемое в (25) при вычислении производной обращается в нуль либо за счет  $\frac{\partial \sigma}{\partial q} \Big|_{q=0}$ , либо за счет ортогональности векторов в скалярном произведении при  $\gamma = \gamma_0$ . Скалярное произведение в (28) дает геодезическую кривизну волнового фронта на  $\Sigma$  в точке  $\vec{r}(0, \gamma_0)$ . Радиус геодезической кривизны волнового фронта равен произведению радиуса кривизны соответствующего нормального сечения  $\Sigma$  на косинус угла между главной нормалью фронта и нормалью к  $\Sigma$ , см. теорему Минье в [8]. Рассматриваемая в этом пункте ситуация реализуется в задачах коротковолновой дифракции на трехмерных телах с гладкой выпуклой поверхностью в окрестности границы свет-тень. В этом случае лучи падающей волны касаются поверхности рассеивателя, порождая волновой фронт – граница свет-тень – и семейство геодезических, вдоль которых распространяются волны соскальзывания на затененной поверхности тела.

§6. КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ЗАДАЧИ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ  
РАСХОЖДЕНИИ

В этом разделе статьи используется, по существу, та же математическая техника, что и в предыдущей работе автора [4].

Обозначим через  $Q_1(s)$ ,  $P_1(s)$  и  $Q_2(s)$ ,  $P_2(s)$  два вещественных решения уравнений в вариациях (21). В силу свойств этой линейной канонической системы уравнений с вещественными коэффициентами справедливо следующее тождество по  $s$

$$Q_1(s)P_2(s) - P_1(s)Q_2(s) \equiv Q_1(0)P_2(0) - P_1(0)Q_2(0), \quad (29)$$

что проверяется дифференцированием по  $s$  и использованием уравнений (21). Оно влечет, очевидно, линейную независимость этих решений, если правая часть (29) при  $s = 0$  не обращается в нуль. При этом является существенным, что ни одна из пар функций  $Q_j(s)$ ,  $P_j(s)$ ,  $j = 1, 2$ ;  $Q_1(s)$ ,  $Q_2(s)$  и  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  не обращается в нуль одновременно ни при каком значении  $s$ .

С целью компактности дальнейших формул представим решение уравнений в вариациях в виде столбца

$$X(s) = \begin{pmatrix} Q(s) \\ P(s) \end{pmatrix} \quad (30)$$

и пусть  $W(s)$  есть фундаментальная матрица этой системы уравнений. Тогда по начальным данным (26) и (28) мы получаем два вещественных, линейно независимых решения  $X^{ps}(s)$  и  $X^{wf}(s)$

$$X^{ps}(s) = W(s)X^{ps}(0), \quad X^{wf}(s) = W(s)X^{wf}(0). \quad (31)$$

Они позволяют вычислять геометрическое расхождение пучков геодезических на данной центральной геодезической в двух рассмотренных выше случаях — точечного источника и начального волнового фронта.

Комплексыфикация задачи о геометрическом расхождении состоит в том, что из двух вещественных решений (31) строится одно комплекснозначное решение  $X(s)$  по формуле

$$X(s) = X^{wf}(s) + iX^{ps}(s). \quad (32)$$

При этом обе комплексно значные функции  $Q(s) = Q^{wf}(s) + iQ^{ps}(s)$  и  $P(s) = P^{wf}(s) + iP^{ps}(s)$  не обращаются в нуль при всех возможных значениях  $s$  в силу тождества (29).

Далее рассмотрим функцию  $Q(s)$ . Полагая  $\Gamma(s) = P(s)Q^{-1}(s)$ , из первого уравнения в (21) получаем  $\frac{d}{ds}Q(s) = P(s) = \Gamma(s)Q(s)$  и следовательно

$$Q(s) = \exp \int_0^s \Gamma(s) ds; \quad \arg Q(s) = \int_0^s \operatorname{Im} \Gamma(s) ds,$$

так как  $Q(0) = Q^{wf}(0) + iQ^{ps}(0) = 1$ , см. (26), (27). Остается вычислить  $\operatorname{Im} \Gamma(s)$ , применяя тождество (29),

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Gamma(s) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{P(s)}{Q(s)} - \frac{\bar{P}(s)}{\bar{Q}(s)} \right) = \frac{1}{2i} \frac{P(s)\bar{Q}(s) - Q(s)\bar{P}(s)}{|Q(s)|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{P(0)\bar{Q}(0) - Q(0)\bar{P}(0)}{|Q(s)|^2} = \frac{P^{ps}(0)}{|Q(s)|^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула для  $\arg Q(s)$  принимает вид

$$\arg Q(s) = P^{ps}(0) \int_0^s \frac{ds}{|Q(s)|^2} \quad (33)$$

и  $\arg Q(s)$  оказывается монотонной функцией длины дуги  $s$  центральной геодезической пучка.

Следствием равенств (31) и (33) является главный результат работы – формулы

$$Q^{wf}(s) = |Q(s)| \cos \arg Q(s); \quad Q^{ps}(s) = |Q(s)| \sin \arg Q(s). \quad (34)$$

Из этих формул вытекают следующие результаты относительно индекса Морса для геодезических на гладких поверхностях, вложенных в  $\mathbb{R}^3$ .

- (1) Каустические точки на геодезических имеются там и только там, где  $\arg Q(s) = \pi/2 + \pi m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , если они порождены волновым фронтом на  $\Sigma$ , и где  $\arg Q(s) = \pi m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , если они порождены точечным источником.
- (2) Все каустические точки являются простыми на любых каустиках, т.е. являются ли каустики вырожденными (как, например, фокус) или общего положения.
- (3) Для вычисления индекса Морса между двумя точками на геодезической достаточно вычислять приращение  $\arg Q(s)$  по модулю  $2\pi$ . На каждом интервале длиной  $2\pi$  имеется в точности две фокальные точки.

## §7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Геодезические на поверхности  $\Sigma$  полностью определяются индуцированной/заданной римановой метрикой  $g_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2$ . В изложенном подходе мы используем репер в  $\mathbb{R}^3$ , выходя из римановой метрики, что может показаться не естественным. Однако, наше преимущество мы видим в следующем. Аффинная связность, описываемая формулами Френе, содержит естественные и привычные в дифференциальной геометрии кривых параметры – кривизну и кручение. Хотя при этом мы приходим к задаче на условный экстремум возникшего функционала Ферма, это не приносит усложнений. Действительно, нам требуется уравнение поверхности  $\Sigma$  лишь в малой окрестности центральной геодезической пучка, что приводит к простой формуле (10). В результате мы получаем уравнения в вариациях и начальные данные для геометрического расхождения в естественных терминах теории поверхностей и кривых в  $\mathbb{R}^3$ .

Автор глубоко благодарен Н. М. Семченку за подготовку электронной версии статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дж. Милнор, *Теория Морса*. Мир, Москва, 1965.
2. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*. Наука, Москва, 1976.
3. В. И. Арнольд, *О характеристическом классе, входящем в условия квантования*. — Функ. анализ и его прилож. **1**, No. 1 (1967), 1–14.
4. М. М. Попов, *О вычислении индекса Морса и продолжении лучевых формул за каустики*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **438** (2015), 225–235.
5. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, том IV. Физматгиз, Москва, 1958.
6. М. М. Попов, *Ray theory and Gaussian beam method for geophysicists*. EDUFBA, Salvador-Bahia, 2002.
7. М. М. Попов, *Об одном методе вычисления геометрического расхождения в неоднородной среде, содержащей границы раздела*. — Докл. АН СССР **237**, No. 5 (1977), 1059–1062.
8. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, том II. Наука, Москва 1967.

Popov M. M. On Morse index for geodesic lines on smooth surfaces imbedded in  $\mathbb{R}^3$ .

The paper is devoted to calculation of Morse index on geodesic lines upon smooth surfaces embedded into 3D Euclidean space. The interest to this theme is called by the fact, that the wave field composed of the

surface waves slides along the boundaries guided by the geodesic lines, which, generally speaking, give birth to numerous caustics. The same circumstance takes place in problems of the short-wave diffraction by 3D bodies in the shadowed part of the surface of the body, where the creeping waves arise.

We consider two types of geodesic flows upon the surface when they are generated by a point source and by an initial wave front, for instance, by the light-shadow boundary in the short-wave diffraction by a smooth convex body. We establish position of the points where geodesic lines meet caustics, i.e. focal points, and prove that all focal points are simple (not multiple) independently upon geometrical structure of the caustics arisen. Mathematical technique in use is based on complexification of geometrical spreading problem for the geodesics/rays tube.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки, д. 27,  
191023 С.-Петербург, Россия  
*E-mail*: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 7 сентября 2018 г.