

С. А. Назаров

**АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ВНУТРИ
ЛАКУН СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ
С МАЛЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка задачи. Пусть Π – d -мерный периодический волновод (рис. 1, а), т.е. Π – область (в частности, связное множество) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, замыкание которой представимо в виде

$$\bar{\Pi} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\varpi}_n, \quad \varpi_n = \{x = (y, z) : (y, z - nl) \in \varpi\},$$

где $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество целых чисел, ϖ – открытая ячейка периодичности, расположенная в круговом цилиндре $\{x : |y| < R, z \in (0, l)\}$, а R и l – положительные числа. Масштабированием сведем период l к единичному и сделаем тем самым декартовы координаты $x_1 = y_1, \dots, x_{d-1} = y_{d-1}, x_d = z$ и все геометрические параметры безразмерными. Введем малое сингулярное возмущение волновода – внутреннюю полость

$$\omega^\varepsilon = \{x : \xi := \varepsilon^{-1}(x - x^0) \in \omega\}; \quad (1.1)$$

здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, x^0 – точка внутри Π , а ω – ограниченное открытое множество в \mathbb{R}^d . Величину $\varepsilon_0 > 0$ подберем так, чтобы $\bar{\omega}^\varepsilon = \omega^\varepsilon \cup \partial\omega^\varepsilon \subset \Pi$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Далее при необходимости уменьшаем эту границу изменения параметра ε , сохраняя за ней прежнее обозначение. Лишь с целью упростить изложение предполагаем, что поверхности $\partial\Pi$ и $\partial\omega$ гладкие. Все последующие результаты сохраняются для границ любого качества и конечно же кусочно-гладких.

В сингулярно возмущенном квантовом волноводе (рис. 1, б)

$$\Pi^\varepsilon = \Pi \setminus \bar{\omega}^\varepsilon \quad (1.2)$$

Ключевые слова: периодический волновод, спектральные задачи для оператора Лапласа, сингулярное возмущение границы, лакуны, дискретный спектр, асимптотика собственных чисел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

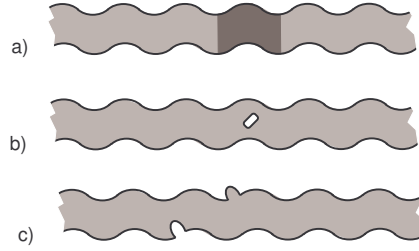


Рис. 1. Периодический волновод (а) с тонированной ячейкой и периодический волновод с малым отверстием (б). Иные способы сингулярных возмущений границы (с).

рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Pi^\varepsilon, \quad (1.3)$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi^\varepsilon = \partial\Pi \cup \partial\omega^\varepsilon, \quad (1.4)$$

где Δ – оператор Лапласа, а λ^ε – спектральный параметр. Вариационная формулировка задачи (1.3), (1.4) апеллирует к интегральному тождеству [1]

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Pi^\varepsilon}, \quad v^\varepsilon \in H_0^1(\Pi^\varepsilon). \quad (1.5)$$

При этом $\nabla = \text{grad}$, $(\cdot, \cdot)_{\Pi^\varepsilon}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi^\varepsilon)$, а $H_0^1(\Pi^\varepsilon)$ – подпространство функций из класса Соболева $H^1(\Pi^\varepsilon)$, удовлетворяющих краевому условию (1.4) (всюду в статье нижний индекс 0 у функциональных пространств используется для обозначения условий Дирихле). Поскольку полуторалинейная форма из левой части (1.5) симметрична, замкнута и положительно определена, вариационной задаче (1.5) ставится [2, гл. 10] в соответствие неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор A^ε в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi^\varepsilon)$.

Предельной ($\varepsilon = 0$) задаче

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Pi, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad (1.6)$$

также отвечает самосопряженный положительно определенный оператор A в $L^2(\Pi)$. Ввиду компактности возмущения области (1.2) существенные спектры $\sigma_{ess}(A)$ и $\sigma_{ess}(A^\varepsilon)$ совпадают, однако дискретный

спектр $\sigma_d(A^\varepsilon)$ может оказаться непустым, в то время как заведомо $\sigma_d(A) = \emptyset$. Асимптотическое (при $\varepsilon \rightarrow +0$) поведение собственных чисел из дискретного спектра оператора A^ε (краевой (1.3), (1.4) или вариационной (1.5) задач) и является предметом исследования в статье. Отметим, что при некоторых ограничениях на форму волновода Π установлена (см. работы [3–5] и др.) абсолютная непрерывность спектра $\sigma_{ess}(A)$, т.е. отсутствие собственных чисел бесконечной кратности, образующих точечный спектр $\sigma_{po}(A)$, однако в общей ситуации равенство $\sigma_{po}(A) = \emptyset$ неизвестно.

1.2. Лакуны. Преобразование Гельфанда [6] (дискретное преобразование Фурье) связывает с задачей (1.6), а в некотором смысле (см. [7] и [8, §3.4 и гл. 5]) и с задачей (1.3), (1.4), модельную задачу на ячейке периодичности ϖ (тонирована на рис. 1, а)

$$-\Delta_y U(\eta; y, z) - (\partial_z + i\eta)^2 U(\eta; y, z) = \Lambda(\eta) U(\eta; y, z), \quad (y, z) \in \varpi, \quad (1.7)$$

$$U(\eta; y, z) = 0, \quad (y, z) \in \gamma, \quad (1.8)$$

$$U(\eta; y, 1) = U(\eta; y, 0), \quad \partial_z U(\eta; y, 1) = \partial_z U(\eta; y, 0), \quad y \in \tau. \quad (1.9)$$

При этом Δ_y – оператор Лапласа в системе координат $y \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\partial_z = \partial/\partial z$, $\eta \in [-\pi, \pi)$ – параметр Флоке (двойственная переменная преобразования Гельфанда), условия периодичности (1.9) назначены на торцах $\tau \times \{0\}$ и $\tau \times \{1\}$ ячейки (при этом $\tau = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} : (y, 0) \in \Pi\}$), а условия Дирихле (1.8) – на ее боковой поверхности $\gamma = \partial\varpi \setminus (\overline{\tau} \times \{0, 1\})$. Задача (1.7)–(1.9) опять-таки допускает вариационную постановку

$$\begin{aligned} & (\nabla_y U(\eta; \cdot), \nabla_y V)_{\varpi} + ((\partial_z + i\eta)U(\eta; \cdot), (\partial_z + i\eta)V)_{\varpi} \\ & = \Lambda(\eta)(U(\eta; \cdot), V)_{\varpi}, \quad V \in H_{0per}^1(\varpi; \gamma). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь и далее символ *per* означает 1-периодичность по переменной z . Полуторалинейная форма из левой части (1.10), будучи симметричной, замкнутой и положительно определенной, порождает самосопряженный положительно определенный оператор $\mathbf{A}(\eta)$, который благодаря компактности вложения $H^1(\varpi) \subset L^2(\varpi)$ имеет целиком дискретный спектр, образующий монотонную неограниченную положительную последовательность собственных чисел

$$0 < \Lambda_1(\eta) \leq \Lambda_2(\eta) \leq \dots \leq \Lambda_n(\eta) \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (1.11)$$

составленную при учете их кратностей. Функции $\eta \mapsto \Lambda_n(\eta)$ оказываются непрерывными (см., например, [9, гл. 7]) и 2π -периодическими

(если $\{\Lambda, U\}$ – собственная пара задачи (1.7)–(1.9) при некотором $\eta \in \mathbb{R}$, то $\{\Lambda, e^{\pm 2\pi iz}U\}$ – собственная пара той же задачи с параметром Флоке $\eta \mp 2\pi$). Таким образом, множества

$$B_n = \{\Lambda_n(\eta) \mid \eta \in [-\pi, \pi)\} \quad (1.12)$$

становятся сегментами, конечными, связными и замкнутыми. Известно (см. монографии [8, 10, 11], обзоры [12–14] и др. публикации), что спектр $\sigma(A)$ оператора A задачи (1.6) и существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(A^\varepsilon)$ оператора A^ε задачи (1.3), (1.4) приобретают вид

$$\sigma(A) = \sigma_{\text{ess}}(A^\varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n. \quad (1.13)$$

Зонное строение спектра (1.13) подразумевает возможность образования *лакун*, т.е. интервалов на положительной вещественной полуоси \mathbb{R}_+ свободных от существенного спектра, но имеющих обе концевые точки в нем. Введем обозначение

$$G_n = (g_n^-, g_n^+) = \left(\max_{\eta \in [-\pi, \pi)} \Lambda_n(\eta), \min_{\eta \in [-\pi, \pi)} \Lambda_{n+1}(\eta) \right) \quad (1.14)$$

для лакуны между сегментами B_n и B_{n+1} , но не исключаем ситуацию $G_n = \emptyset$ – лакуна закрыта. Далее предполагаем, что открыта хотя бы одна лакуна G_n , и изучаем существование и асимптотику попадающих в нее собственных чисел, т.е. точек из множества $\zeta_n^\varepsilon = \sigma_d(A^\varepsilon) \cap G_n$. Наконец, число $\Lambda_n \in \sigma_{po}(A)$ становится бесконечнократным, если сегмент (1.12) “схлопывается” в точку, т.е. $\Lambda_n(0) = \Lambda_n(\eta)$ при всех η .

1.3. Асимптотический анализ дискретного спектра. Большое количество публикаций посвящено необходимым и/или достаточным условиям существования собственных чисел ниже точки отсечки непрерывного спектра цилиндрических квантовых волноводов с локальными возмущениями стенок и выводу их асимптотических разложений (см. публикации [15–19] и многие другие). Следующее утверждение показывает, что на интервале $(0, \lambda_\dagger)$ с точкой отсечки

$$\lambda_\dagger = \Lambda_1(0) = \min_{\eta \in [-\pi, \pi)} \Lambda_1(\eta) \quad (1.15)$$

у оператора A^ε собственных чисел нет, т.е. при возмущении волновода малой полостью с условиями Дирихле дискретный спектр $\sigma_d(A^\varepsilon)$ может возникнуть только внутри лакун.

Лемма 1.1. *Множество $\{\lambda \in \sigma_d(A^\varepsilon) : \lambda < \lambda_\dagger\}$ пусто.*

Доказательство. Применим минимальный принцип (см. [2, теорема 10.2.1]) для оператора A , который (принцип) ввиду равенств (1.13) и (1.15) дает формулу для нижней грани спектра

$$\underline{\sigma}(A) = \lambda_{\dagger} = \inf_{u \in H_0^1(\Pi) \setminus \{0\}} (\|u; L^2(\Pi)\|^{-2} \|\nabla u; L^2(\Pi)\|^2). \quad (1.16)$$

Осталось заметить, что, если оператор A^ε имеет собственное число $\lambda_0^\varepsilon \in (0, \lambda_{\dagger})$, то для соответствующей собственной функции u_0^ε , продолженной нулем на отверстие (1.1), дробь Рэлея удовлетворяет противоречащему (1.16) соотношению

$$\|u_0^\varepsilon; L^2(\Pi)\|^{-2} \|u_0^\varepsilon; L^2(\Pi)\|^2 = \|u_0^\varepsilon; L^2(\Pi^\varepsilon)\|^{-2} \|\nabla u_0^\varepsilon; L^2(\Pi^\varepsilon)\|^2 = \lambda_0^\varepsilon < \lambda_{\dagger}. \quad \square$$

Для периодических волноводов разработаны методы подсчета кратности дискретного спектра ниже непрерывного спектра и внутри лакун (см., например, статью [20], а также обзор [21] и приведенный в нем список литературы). Получены разнообразные асимптотические формулы для собственных чисел около краев лакун (см. публикации [22–31] и др.), однако спектр сингулярного возмущенного волновода исследуется по-видимому впервые.

1.4. Основная цель статьи. Центральным результатом – асимптотическое описание эффекта ”отцепления“ собственного числа от края спектрального сегмента. Мы действительно находим асимптотику собственного числа, устанавливая тем самым непустоту дискретного спектра внутри лакуны, впрочем предъявляя дополнительные требования к строению края сегмента. Сами асимптотические структуры оказываются по существу одинаковыми, и мы уделяем основное внимание особым случаям: кратное собственное число, вырождение главного асимптотического члена, зависимость от логарифма $\ln \varepsilon$ при $d = 2$ и т.п. Кроме того, мы занимаемся только формальным асимптотическим анализом, так как обоснование построенной асимптотики уже стало традиционным и рутинным занятием, мало зависит от специфики сингулярно-возмущенной задачи и подробно изложено для родственных задач (см. публикации [19, 31, 32] и др.).

Отличительная особенность квантового волновода (1.2) при возмущении полостью или каверной является возможность отцепления собственного числа только от верхнего края спектрального сегмента и проникновения его в лакуну снизу. В §5 обсуждаются иные способы возмущения границы (ср. рис. 1, с) или другие краевые условия

(акустические и упругие волноводы), при которых точки дискретного спектра образуются и вблизи верхних краев лакун.

В данной работе не затрагивается вопрос об образовании собственных чисел задачи (1.3), (1.4), вкрапленных в непрерывный спектр и обладающих природной неустойчивостью (ср. публикации [33–35] и др. по поводу цилиндрических волноводов). Также не изучалась возможность появления дискретного спектра около бесконечнократных собственных чисел предельной задачи (1.6), т.е. при непустоте точечного спектра $\sigma_{po}(A)$.

1.5. Структура статьи. В следующем параграфе модельной задаче на ячейке периодичности ставится в соответствие квадратичный пучок $\eta \mapsto \mathfrak{A}_\lambda(\eta)$ (см. формулы (2.1), (2.2) и, например, монографии [36, гл. 1], [8, гл. 1]), собственные числа которого, а также соответствующие жордановы цепочки, состоящие из собственных и присоединенных векторов, определяют волны Флоке, фигурирующие в асимптотических представлениях собственных функций сингулярно возмущенной задачи (1.3), (1.4). В терминах тех же жордановых цепочек высказываются требования (2.7), (2.8) и (2.13) к строению верхнего края спектральной сегмента, обеспечивающие отцепление собственного числа от верхнего его края и поднятия в лауну.

Наконец, в последнем разделе приведена сводка асимптотических результатов об η -спектре пучка $\mathfrak{A}_{\lambda+\delta}(\eta)$ с малым возмущением, заимствованных из книги [37, гл. 9].

В §3 и §4 проводится асимптотический анализ сингулярно возмущенной спектральной задачи (1.3), (1.4). Начинаем мы с наиболее интересного случая (2.8) и имеем дело с лакуной, нижний край которой образован двумя собственными числами $\pm\eta_n$ пучка. Асимптотика собственного числа определяется совместно с асимптотикой собственной функции, которая характеризуется многомасштабным разложением. Так, вблизи полости ω^ε используется метод *составных асимптотических разложений* и строится степенной пограничный слой (см. [38, гл. 2, 5]).

Кроме того, применяется метод *сращиваемых асимптотических разложений* [39, 40] в интерпретации [19, 34]: поправка в асимптотическом анзаце для собственного числа находится в результате сращивания разнотипных разложений – *внешних*, пригодных на значительном

удалении от возмущающей полости ω^ε , и *внутреннего*, приемлемого на конечном участке волновода, но вне окрестности множества $\overline{\omega^\varepsilon}$.

В §3 изучается спектр многомерного волновода, т.е. в размерности $d \geq 3$. Оказывается, что построение главных асимптотических поправок позволяет идентифицировать разве лишь одно собственное число, расположенное на расстоянии $O(\varepsilon^{2(d-2)})$ от нижнего края лакуны, и поэтому в оставшейся части параграфа помимо рассмотрения похожих случаев мы занимаемся младшими асимптотическими членами, дающими возможность обнаружить и второе собственное число на расстоянии $O(\varepsilon^{2d})$ от края лакуны.

В §4 мы изучаем ситуацию (2.7), в которой край лакуны образован простым собственным числом пучка, т.е. $\eta = 0$ или $\eta = \pm\pi$ (см. п. 3 §2). Асимптотический анализ, разумеется, упрощается, однако помимо многомерного ($d \geq 3$) рассматривается двумерный ($d = 2$) волновод, для которого процедура приобретает определенные особенности из-за логарифмического поведения фундаментального решения на плоскости.

В заключительном параграфе обсуждаются доступные обобщения, в частности, иные способы сингулярного возмущения границы (ср. рис. 1, с), а также скалярная задача Неймана и векторная задача теории упругости.

§2. ЖОРДАНОВЫ ЦЕПОЧКИ И ВОЛНЫ ФЛОКЕ.

2.1. Пучок и волны Флоке. Спектральная задача (1.7)–(1.9) допускает две интерпретации. Во-первых, можно зафиксировать *вещественный параметр* $\eta \in (-\pi, \pi]$ и считать спектральным параметр Λ (далее называем его основным), получив самосопряженный оператор $\mathbf{A}(\eta)$ в $L^2(\varpi)$ и его дискретный спектр (1.11). Такая схема наиболее часто используется для изучения спектральных свойств дифференциальных операторов в периодических средах (см., например, монографии [10, 11], обзоры [12, 13] и др. публикации). В другой схеме, употребляемой достаточно редко (см. [7], а также [8, §3.4], [14, 32]), фиксируется вещественное число Λ , а спектральным параметром объявляется комплексная двойственная переменная η преобразования Гельфанда. При этом с задачей (1.7)–(1.9) связывается *квадратичный пучок*

$$\mathbb{C} \ni \eta \mapsto (\mathfrak{A}(\Lambda; \eta) : H_{per}^2(\varpi) \cap H_0^1(\varpi; \gamma) \rightarrow L^2(\varpi)), \quad (2.1)$$

который задан дифференциальным выражением

$$\mathfrak{A}(\Lambda; \eta) = -\Delta_y - (\partial_z + i\eta)^2 - \Lambda \quad (2.2)$$

и определен на пространстве функций, удовлетворяющих обоим условиям (1.9). При негладкой границе пучок порожден интегральным тождеством (1.10) и обладает иной областью определения.

Если при некотором $\eta^0 \in [-\pi, \pi)$ задача (1.7)–(1.9) имеет собственное число Λ^0 и собственную функцию U^0 , то η^0 – собственное число пучка $\mathfrak{A}(\Lambda^0; \cdot)$, а U^0 – соответствующий собственный вектор. Тем не менее собственная пара $\{\eta^0, U^0\}$ не дает полной информации об η -спектре пучка, так как помимо собственного могут возникать присоединенные векторы $U^1, \dots, U^{\varkappa-1}$, которые являются решениями абстрактных уравнений

$$\mathfrak{A}(\Lambda^0; \eta^0)U^p = - \sum_{q=1}^{\min\{p,2\}} \frac{1}{q!} \frac{d^q \mathfrak{A}}{d\eta^q}(\Lambda^0; \eta^0) U^{p-q}. \quad (2.3)$$

Если собственному числу η^0 пучка $\mathfrak{A}(\Lambda^0; \cdot)$ отвечает один собственный вектор, то оно *простое геометрически*. Собственный и присоединенные векторы образуют *жорданову цепочку* $\{U^0, \dots, U^{\varkappa-1}\}$, причем ее длина \varkappa – *алгебраическая кратность* собственного числа η^0 при условии, что уравнение (2.3) с $p = \varkappa$ неразрешимо. При вещественных Λ и η оператор (2.1) формально самосопряженный, и альтернатива Фредгольма доставляет условие непродолжимости рассматриваемой жордановой цепочки

$$- \sum_{q=1}^{\varkappa} \frac{1}{q!} \left(\frac{d^q \mathfrak{A}}{d\eta^q}(\Lambda^0; \eta^0) U^{\varkappa-q}, U^0 \right)_{\varpi} \neq 0. \quad (2.4)$$

Каждое собственное число η^0 и отвечающая ему жорданова цепочка $\{U^0, \dots, U^{\varkappa-1}\}$ порождают набор *волн Флоке*

$$w^p(y, z) = e^{i\eta^0 z} \sum_{q=0}^p i^q \frac{z^q}{q!} U^{p-q}(y, z), \quad p = 0, \dots, \varkappa - 1,$$

которые, как нетрудно проверить (см., например, [7] и [8, §3.4]), суть решения задачи (1.6) в чисто периодическом волноводе П.

Далее оперируем простыми геометрически вещественными и комплексными собственными числами η пучка (2.1) и жордановыми цепочками с длинами $\varkappa = 1$ и $\varkappa = 2$.

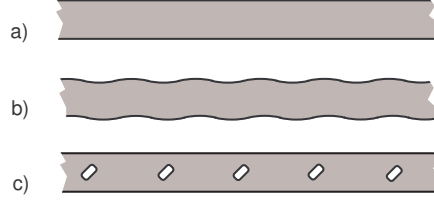


Рис. 2. Полоса (а) с регулярным (b) и сингулярным (с) периодическими возмущениями. Возмущение (1.2) перфорированного волновода (с) – образование еще одного отверстия.

В частности, если $\eta^0 \in [-\pi, \pi)$ – простое геометрически собственное число с алгебраической кратностью $\varkappa = 2$, то согласно определению (2.1) соотношение (2.4) принимает вид

$$\mathfrak{k}(\eta^0) := (U^0, U^0)_{\varpi} - 2i((\partial_z + i\eta^0)U^1, U^0)_{\varpi} \neq 0. \quad (2.5)$$

При этом условие существования присоединенного вектора U^1 , т.е. условие разрешимости уравнения (2.3) с $p = 1$, выглядит следующим образом:

$$-2i((\partial_z + i\eta^0)U^0, U^0)_{\varpi} = 0. \quad (2.6)$$

Примеры разнообразного строения спектра (1.13) указаны в работах [41–44] и др.

2.2. Предположения о строении верхней кромки спектрального сегмента. Пусть раскрыта лакуна (1.14), а ее нижний край g_n^- совпадает с собственным числом $\Lambda_n(\eta_n)$, отвечающим параметру $\eta_n \in [-\pi, \pi)$. Далее рассматриваем две следующие ситуации:

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\eta_n) & \text{ – простое собственное число оператора } A; \\ \Lambda_n(\eta) & < \Lambda_n(\eta_n) \text{ при } \eta \in [-\pi, \pi), \eta \neq \eta_n, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\eta_n) & \text{ – двукратное собственное число оператора } A, \\ \Lambda_n(\eta) & < \Lambda_n(\eta_n) = \Lambda_n(\eta'_n) \text{ при } \eta \in [-\pi, \pi), \eta \neq \eta_n, \eta'_n, \\ & \text{причем } \eta'_n \in [-\pi, \pi), \eta'_n \neq \eta_n. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Они, разумеется, не исчерпывает все мыслимые случаи, но встречаются на рис. 3.

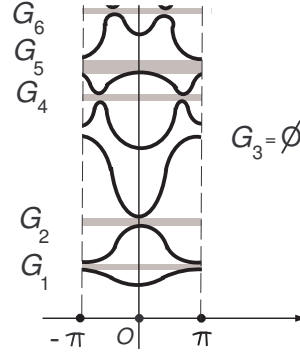


Рис. 3. Один из примеров дисперсионных кривых из работы [41, 44]. Спектральные лакуны – проекции на ось ординат тонированных прямоугольников. Лакуна G_3 перекрыта.

Заметим, что собственная пара $\{\eta, U\}$ пучка (2.1) с вещественным параметром Λ порождает собственную пару $\{-\eta, \bar{U}\}$ пучка с тем же основным спектральным параметром, т.е. функции $\eta \mapsto \Lambda_n(\eta)$ – четные. Таким образом, в ситуации (2.7) реализуется одна из двух возможностей

$$\eta_n = 0 \text{ или } \eta_n = \pm\pi \tag{2.9}$$

(последнее соотношение удобно писать именно так – при учете периодичности функции Λ_n). Первое равенство (2.9) имеет место для лакуны G_2 , а второе – для лакуны G_1 на рис. 3. Ситуация (2.8) опять-таки приводит к двум возможностям

$$\eta_n \in (0, \pi) \text{ и } \eta'_n = -\eta_n \tag{2.10}$$

или

$$\eta_n = 0 \text{ и } \eta'_n = \pm\pi. \tag{2.11}$$

Они свойственны соответственно лакунам G_4, G_6 и лакуне G_5 на рис. 3.

Периодическую собственную функцию $U_n(0; \cdot)$ задачи (1.7)–(1.9), приобретающей вещественные коэффициенты при $\eta = 0$ (ср. формулы

(2.9) и (2.11)), можно считать вещественной. Точно так же вещественной можно выбрать и функцию

$$\mathbf{U}_n(\pm\pi; y, z) = e^{\pm i\pi z} U_n(\pm\pi; y, z) \quad (2.12)$$

в задаче (1.7)–(1.9) при $\eta = \pm\pi$, причем (2.12) – *антипериодическая* функция, т.е.

$$\mathbf{U}_n(\pm\pi; y, 1) = -\mathbf{U}_n(\pm\pi; y, 0), \quad \partial_z \mathbf{U}_n(\pm\pi; y, 1) = -\partial_z \mathbf{U}_n(\pm\pi; y, 0).$$

В случае (2.10) собственные функции $U_n(\eta_n; y, z)$ и $U_n(-\eta_n; y, z) = \overline{U_n(\eta_n; y, z)}$ каких-то особых свойств не приобретают.

Добавим к (2.7) или (2.8) еще одно ограничение

$$\partial_\eta^2 \Lambda_n(\eta_n) < 0, \quad (2.13)$$

означающее невырожденность строгого максимума из определения (1.14). В следующем разделе будет показано, что требование (2.13) предписывает длину два жордановой цепочке, отвечающей собственному числу η_n пучка $\mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n); \cdot)$.

Замечание 2.1. 1) Асимптотические конструкции, предлагаемые в §3, удастся приспособить и к ситуации $\partial_\eta^p \Lambda_n(\eta_n) = 0$ при $p = 1, \dots, 2q-1$, но $\partial_\eta^{2q} \Lambda_n(\eta_n) < 0$ с некоторым натуральным q , однако для этого все-таки нужны модификации процедур.

2) Неравенство (2.13) соотносится с верхними кромками спектральных сегментов, а для нижних знак неравенства нужно заменить на противоположный. Асимптотические формулы, которые получены в статьях [41–44] для периодических волноводов, мало отличающихся от цилиндрических, показывают, что требования (2.13) выполнены.

2.3. Асимптотические формулы для собственных чисел пучка. Рассмотрим малое возмущение верхнего края $g_n^- = \Lambda_n(\eta_n)$ спектрального сегмента B_n , т.е.

$$\Lambda = \Lambda_n(\eta_n) - \delta. \quad (2.14)$$

Пусть сначала $\delta > 0$ и точка (2.14) попадает вовнутрь непрерывного спектра. Благодаря предположению (2.7) или (2.8) пучок $\mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n) - \delta; \cdot)$ при малом $\delta > 0$ имеет в окрестности точки $\eta_n \in \mathbb{C}$ два вещественных собственных числа. Допустим, что в той же малой окрестности нет комплексных собственных чисел, – это предположение будет оправдано в конце параграфа. Поскольку по теореме 1.5.1 [36] у спектра пучка нет конечных точек сгущения, можно зафиксировать положительные

величины δ_0 и ρ_1, ρ_2 так, чтобы при $\delta \in (0, \delta_0]$ в открытом прямоугольнике

$$Q_\rho(\eta_n) = \{\eta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \eta| < \rho_2, |\operatorname{Re} \eta - \eta_n| < \rho_1\} \quad (2.15)$$

располагался только вещественный η -спектр. Таким образом, предположение (2.7) или (2.8) и теорема 1.3.1 [36] об устойчивости полной алгебраической кратности спектра показывают, что прямоугольник (2.15) содержит только одно собственное число η_n пучка $\mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n); \cdot)$, простое геометрически и по необходимости с алгебраической кратностью $\varkappa = 2$. Иными словами, собственному числу η_n отвечает непродолжимая жорданова цепочка $\{U_n^0, U_n^1\}$. Собственная вектор-функция $U_n^0 \in H_{per}^2(\varpi) \cap H_0^1(\varpi; \gamma)$ является решением задачи (1.7)–(1.9) с параметрами $\eta = \eta_n$ и $\Lambda = \Lambda_n(\eta_n)$ и, как уже говорилось, в ситуациях (2.9) ее или произведение (2.12) можно выбрать вещественными. Присоединенный вектор $U_n^1 \in H_{per}^2(\varpi) \cap H_0^1(\varpi; \gamma)$ служит решением абстрактного уравнения (2.3) с номером $p = 1$, т.е. согласно определению пучка (2.1) – решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_y U_n^1(y, z) - (\partial_z + i\eta_n)^2 U_n^1(y, z) - \Lambda_n(\eta_n) U_n^1(y, z) \\ = 2i(\partial_z + i\eta_n) U_n^0(y, z), \quad (y, z) \in \varpi, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$U_n^1(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \gamma, \quad (2.17)$$

$$U_n^1((y, 1) = U_n^1(y, 0), \quad \partial_z U_n^1(y, 1) = \partial_z U_n^1(y, 0), \quad y \in \tau. \quad (2.18)$$

Простой анализ уравнения (2.16) показывает, что вещественными можно считать функции

$$iU_n^1(y, z) \text{ при } \eta_n = 0, \quad i\mathbf{U}_n^1(y, z) = ie^{\pm i\pi z} U_n^1(y, z) \text{ при } \eta_n = \pm\pi.$$

Кроме того, в случаях $\eta_n = 0$ и $\eta_n = \pm\pi$ условие

$$0 = 2i((\partial_z + i\eta_n)U_n^0, U_n^0)_\varpi = 2i(\partial_z \mathbf{U}_n^0, \mathbf{U}_n^0)_\varpi$$

разрешимости задачи (2.16)–(2.18) выполнено очевидным образом. Присоединенный вектор U_n^1 второго ранга должен был бы удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} -\Delta_y U_n^2(y, z) - (\partial_z + i\eta_n)^2 U_n^2(y, z) - \Lambda_n(\eta_n) U_n^2(y, z) \\ = 2i(\partial_z + i\eta_n) U_n^1(y, z) - U_n^0(y, z), \quad (y, z) \in \varpi, \end{aligned}$$

с краевым условием (2.17) и условиями периодичности (2.18). Отсутствие решения у такой задачи по альтернативе Фредгольма означает,

что $\mathfrak{k}(\eta_n) \neq 0$. Нетрудно усмотреть, что в ситуациях (2.9) упомянутая величина (2.5) вещественная.

Воспользуемся результатами¹ [37, гл. 9] для того, чтобы построить асимптотику при $\delta \rightarrow +0$ двух (плюс и минус) собственных чисел $\Lambda_n^\pm(\delta)$ пучка $\mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n) - \delta; \cdot)$. Считая параметр отклонения положительным, примем асимптотические анзацы

$$\eta_n^\pm(\delta) = \eta_n + \mu\delta^{1/2} + \dots, \quad (2.19)$$

$$U_n^\pm(y, z; \delta) = U_n^0(y, z) + \mu\delta^{1/2}U_n'(y, z) + \delta U_n''(\mu; y, z) + \dots, \quad (2.20)$$

где многоточием обозначены младшие члены, а число μ и периодическая функция U_n' подлежат определению. В правой части (2.20) и далее в формуле (2.21) для U_n' фигурируют элементы жордановой цепочки $\{U_n^0, U_n^1\}$. Подставим анзацы в задачу (1.7)–(1.9) с параметром (2.14) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях параметра $\delta^{1/2}$. Первые две задачи, позволяющие уничтожить коэффициенты при $\delta^0 = 1$ и $\delta^{1/2}$, перепишем как абстрактные уравнения

$$\mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n); \eta_n)U_n^0 = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n); \eta_n)U_n' + \frac{d\mathfrak{A}}{d\eta}(\Lambda_n(\eta_n); \eta_n)U_n^0 = 0$$

и заметим, что в случае

$$U_n'(y, z) = U_n^1(y, z) + C_n U_n^0(y, z), \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad (2.21)$$

уравнения выполнены благодаря определению собственного и присоединенного векторов (ср. уравнения (2.3) при $p = 0$ и $p = 1$). Третья задача, собранная из коэффициентов при δ , представляет собой дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & -\Delta_y U''(\mu; y, z) - (\partial_z + i\eta_n)^2 U''(\mu; y, z) - \Lambda_n(\eta_n) U''(\mu; y, z) \\ & = -U_n^0(y, z) + \mu^2 (2i(\partial_z + i\eta_n)U_n'(y, z) - U_n^0(y, z)), \quad d(y, z) \in \varpi, \end{aligned} \quad (2.22)$$

снабженное условиями (2.17) и (2.18). Условие разрешимости этой задачи

$$\mu^2 (2i(\partial_z + i\eta_n)U_n^1, U_n^0)_\varpi - \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2 + \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2 = 0$$

превращается при учете формул (2.5) и (2.21), (2.6) в квадратное уравнение

$$\mu^2 \mathfrak{k}(\eta_n) = \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2, \quad (2.23)$$

¹В этой книге рассматриваются несамосопряженные линейные пучки, но переход от квадратичного пучка (2.1) к линейному требует лишь простых переобозначений.

из которого находятся множители в представлениях (2.19) и (2.20). В итоге его корни

$$\mu_{\pm} = \pm \mathfrak{k}(\eta_n)^{-1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\|, \quad (2.24)$$

а значит, и собственные числа $\Lambda_n^{\pm}(\delta)$ оказываются вещественными только при условии

$$\mathfrak{k}(\eta_n) > 0 \quad (2.25)$$

Пусть по-прежнему δ – малое положительное число. Основной спектральный параметр

$$\Lambda = \Lambda_n(\eta_n) + \delta \quad (2.26)$$

попадает в лакуну G_n . Анзацы (2.19) и (2.20) сохраняются, но в аналогичном (2.22) уравнении

$$\begin{aligned} & -\Delta_y U_n'(\mu; y, z) - (\partial_z + i\eta_n)^2 U_n'(\mu; y, z) - \Lambda_n(\eta_n) U_n'(\mu; y, z) \\ & = U_n^0(y, z) + \mu^2 ((2i(\partial_z + i\eta_n) U_n^1(y, z) - U_n^0(y, z))), \quad (y, z) \in \varpi, \end{aligned} \quad (2.27)$$

знак при последнем слагаемом в правой части изменен на противоположный благодаря переходу от формулы (2.14) к формуле (2.26). Таким образом, квадратное уравнение $\mu^2 \mathfrak{k}(\eta_n) + \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2 = 0$, похожее на (2.23) и представляющее собой условие разрешимости задачи (2.27), (2.17), (2.18), приобретает чисто мнимые корни

$$\mu_{\pm} = \pm i \mathfrak{k}(\eta_n)^{-1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\|, \quad (2.28)$$

конкретизирующие первые пары членов в асимптотических анзацах (2.19) и (2.20).

Оценки асимптотических остатков вытекают, например, из общих результатов [37, гл. 9].

Предложение 2.1. *В указанных предположениях пучок $\eta \mapsto \mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n) \pm \delta; \eta)$ имеет в окрестности точки η_n два простых собственных числа $\eta_n^{\pm}(\delta)$, для которых*

$$|\eta_n^{\pm}(\delta) - (\eta_n + \mu_{\pm} \delta^{1/2})| \leq c\delta \quad (2.29)$$

и μ_{\pm} – чисто мнимые величины (2.28) в случае (2.26), но μ_{\pm} – вещественные величины (2.24) в случае (2.14). Собственный вектор $U_n^{\pm}(\cdot; \delta) \in H_{per}^2(\varpi) \cap H_0^1(\varpi; \gamma)$, отвечающий $\eta_n^{\pm}(\delta)$, можно выбрать так, чтобы выполнялась оценка

$$\|U_n^{\pm}(\cdot; \delta) - (U_n^0 + \mu_{\pm} \delta^{1/2} U_n^1); H^2(\varpi)\| \leq c\delta. \quad (2.30)$$

Далее будут востребованы волны Флоке

$$w_n^\pm(y, z; \delta) = e^{i\eta_n^\pm(\delta)z} U_n^\pm(y, z; \delta), \quad (2.31)$$

которые в случае (2.26) экспоненциально затухают при $z \rightarrow \pm\infty$. В силу асимптотических представлений (2.19) и (2.20) справедливы разложения

$$\begin{aligned} w_n^\pm(y, z; \delta) &= e^{i(\eta_n + \delta^{1/2}\mu_\pm + \dots)z} (U_n^0(y, z) + \mu_\pm \delta^{1/2} U_n^1(y, z) + \dots) \\ &= e^{i\eta_n z} (U_n^0(y, z) + \delta_\pm^{1/2} (U_n^1(y, z) + iz U_n^0(y, z)) + \dots) \quad (2.32) \\ &= w_n^0(y, z) + \delta^{1/2} \mu_\pm w_n^1(y, z) + \dots, \end{aligned}$$

где w_n^0 и w_n^1 – волны Флоке, построенные согласно общей формуле (2.5) по жордановой цепочке $\{U_n^0, U_n^1\}$, а мажоранты $C_k \delta z^2$ для остатков, обозначенных многоточием, получаются на основе неравенств (2.29), (2.30) и составляют $O(\delta)$ по норме $\|\cdot; L^2(\varpi)\|$, но сохраняются и для производных ввиду предположения о гладкости границы.

2.4. Формула для второй производной. Асимптотические представления собственных чисел пучка $\mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n) - \delta; \cdot)$, приведенные в предложении 2.1, показывают, что

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\eta_n) - \delta &= \Lambda_n(\eta_n^\pm(\delta)) = \Lambda_n(\eta_n + \mu_\pm \delta^{1/2} + O(\delta)) \\ &= \Lambda_n(\eta_n) + \frac{1}{2} \mu_\pm^2 \delta_\pm^2 \Lambda_n(\eta_n) + O(\delta^{3/2}) \Rightarrow \partial_\eta^2 \Lambda_n(\eta_n) \quad (2.33) \\ &= -2\mu_\pm^{-2} = -\mathfrak{k}(\eta_n)^{-1} \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2. \end{aligned}$$

Закончим проверку равенства $\varkappa = 2$. Требование (2.7) или (2.8) гарантирует, что при $\Lambda = \Lambda_n(\eta_n)$ пучок (2.1) оказывается изоморфизмом хотя бы в одной точке $\eta \in [-\pi, \pi)$ (на самом деле всюду на полуинтервале, за исключением одной или двух точек). Таким образом, по теореме 1.5.1 [36] жорданова цепочка пучка, отвечающая его собственному числу η_n , имеет конечную длину \varkappa . Общие результаты [37, гл. 9], предоставленные предложением 2.1 для случая $\varkappa = 2$, устанавливают, что в малой окрестности точки $\eta_n \in \mathbb{C}$ пучок имеет в точности \varkappa собственных чисел $\eta_n^{(p)}(\delta)$ с асимптотиками

$$\eta_n^{(p)}(\delta) = \eta_n + \delta^{1/\varkappa} \rho^{1/\varkappa} e^{ip\psi/\varkappa} + O(\delta^{2/\varkappa}), \quad p = 0, \dots, \varkappa - 1,$$

где $\rho > 0$ и $\psi \in [0, 2\pi)$. Множителями при $\delta^{1/\varkappa}$ служат корни аналогичного (2.23) уравнения

$$\mu^\varkappa = \mathfrak{k}(\eta_n)^{-1} \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2 =: \rho e^{i\psi}.$$

Разумеется, при четном $\varkappa > 2$ среди корней этого уравнения могут быть два вещественных, однако, повторив выкладку (2.33) с незначительными изменениями, видим, что в случае $\varkappa > 2$ нарушено условие (2.13).

§3. КРАТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ВНУТРИ ЛАКУНЫ.

3.1. Первичный асимптотический анзац в случае $d \geq 3$. В ситуации (2.8), (2.10), (2.13) примем следующие, согласованные с предыдущими результатами (см. [38, гл. 9 и 10], [19] и др.), асимптотические анзацы для собственных чисел и соответствующих собственных функций задачи (1.3), (1.4) в сингулярно возмущенном волноводе $\Pi^\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ при $d \geq 3$:

$$\lambda_\alpha^\varepsilon = \lambda^0 + \varepsilon^{2(d-2)} \lambda'_\alpha + \dots, \quad (3.1)$$

$$u_\alpha^\varepsilon(x) = u_\alpha^0(x) - \chi(x) u_\alpha^0(x^0) \mathfrak{F}(\varepsilon^{-1}(x - x^0)) + \varepsilon^{d-2} u'_\alpha(x) + \dots \quad (3.2)$$

При этом

$$\lambda^0 = \Lambda_n(\eta_n) \text{ и } \lambda'_\alpha > 0. \quad (3.3)$$

Поясним принятые обозначения. Во-первых, $\alpha = \pm$, т.е. одновременно ищутся два собственных числа λ_+^ε и λ_-^ε , а соотношения (3.3), (3.1) помещают их вовнутрь лакуны (1.14) при малом ε . Во-вторых, $\mathfrak{F}(\xi)$ – слагаемое типа пограничного слоя, записанное при помощи растянутых координат $\xi = \varepsilon^{-1}(x - x^0)$, определенное во внешней области $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}$ и затухающее при $|\xi| \rightarrow +\infty$, а χ – гладкая срезающая функция, равная единице в окрестности точки x^0 (в частности, на полости ω^ε) и нулю вблизи границы $\partial\Pi$ предельного волновода Π . В-третьих, поправка λ'_α и слагаемое u'_α регулярного типа подлежат определению. Наконец, главное слагаемое

$$u_\alpha^0(x) = a_+^\alpha w_{n+}^0(x) + a_-^\alpha w_{n-}^0(x) \quad (3.4)$$

включает неизвестный заранее нормированный столбец $a^\alpha = (a_+^\alpha, a_-^\alpha)^\top \in \mathbb{C}^2$, а также волны Флоке

$$w_{n\pm}^0(y, z) = e^{\pm i\eta_n z} U_{n\pm}^0(y, z) \text{ (причем } w_{n-}^0(y, z) = \overline{w_{n+}^0(y, z)}), \quad (3.5)$$

построенные по собственным числам (2.10) пучка $\mathfrak{A}(\Lambda_n(\eta_n); \cdot)$. Здесь \top – знак транспонирования; кроме того, использованы следующие связи между элементами жордановых цепочек $\{U_{n\pm}^0, U_{n\pm}^1\}$, отвечающих собственным числам пучка $\mathfrak{A}(\lambda^0; \cdot)$:

$$U_{n-}^0(x) = \overline{U_{n+}^0(x)} \text{ и } U_{n-}^1(x) = -\overline{U_{n+}^1(x)} \quad (3.6)$$

Эти формулы получаются комплексным сопряжением уравнений (2.3), в которых $\Lambda^0 = \lambda^0$, $\eta^0 = \pm\eta_n$ и $p = 0, 1$, при учете проистекающих из определения (2.2) соотношений

$$\mathfrak{A}(\lambda^0; -\eta_n) = \overline{\mathfrak{A}(\lambda^0; \eta_n)} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathfrak{A}}{d\eta}(\lambda^0; -\eta_n) = -\overline{\frac{d\mathfrak{A}}{d\eta}(\lambda^0; \eta_n)}. \quad (3.7)$$

По своей природе собственные функции u_α^ε экспоненциально затухают на бесконечности, однако волны (3.5), образующие главный член (3.4) анзаца (3.2), осциллируют и нужным свойством не обладают. Поэтому асимптотическое представление (3.2) нуждается в модификации на больших расстояниях от полости (1.1). Подчеркнем особо, что другие две волны Флоке

$$\begin{aligned} w_{n+}^1(y, z) &= e^{i\eta_n z} (izU_{n\pm}^0(y, z) + U_{n\pm}^2(y, z)) \\ \text{и} \quad w_{n-}^1(y, z) &= -w_{n+}^1(y, z) \end{aligned} \quad (3.8)$$

обладают линейным ростом и поэтому непригодны в качестве главных членов представления собственных функций, однако они будут присутствовать в младшем асимптотическом члене $u'_\alpha(y, z)$.

Применим обычную процедуру построения асимптотики собственных функций в области с малым отверстием (см. [45], а также [38, гл. 9, 10]). Регулярный член (3.4) оставляет невязку в краевых условиях Дирихле на границе отверстия, а именно,

$$u_\alpha^0(x) = u_\alpha^0(x^0) + O(\varepsilon), \quad x \in \partial\omega^\varepsilon. \quad (3.9)$$

Компенсация невязки осуществляется при помощи *емкостного потенциала* \mathfrak{P} – гармонической в $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\omega}$ функции, затухающей на бесконечности и равной единице на поверхности $\partial\omega$. Известно (см., например, [46, 47] и др.), что справедливо представление

$$\mathfrak{P}(\xi) = |\xi|^{2-d} \text{cap}(\omega) + O(|\xi|^{1-d}), \quad |\xi| \rightarrow +\infty, \quad (3.10)$$

где $\text{cap}(\omega) = C_d \int_{\mathbb{R}^d \setminus \omega} |\nabla_\xi \mathfrak{P}(\xi)|^2 d\xi > 0$ – *емкость* множества ω , причем $C_d = (d-2) \text{mes}_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})$, а последний множитель – площадь поверхности единичной сферы в \mathbb{R}^d . Далее удобно переписать формулу (3.10) в виде

$$\mathfrak{P}(\xi) = \mathfrak{c}(\omega)\Phi(\xi) + O(|\xi|^{1-d}), \quad |\xi| \rightarrow +\infty,$$

при использовании фундаментального решения Φ оператора Лапласа в \mathbb{R}^d ,

$$\Phi(\xi) = C_d^{-1} |\xi|^{2-d}, \quad \mathbf{c}(\omega) = C_d \text{cap}(\omega). \quad (3.11)$$

Заметим, что возврат $\xi \mapsto x = x^0 + \varepsilon \xi$ к исходной системе координат приводит к соотношению

$$\begin{aligned} -u_\alpha^0(x^0) \mathfrak{P}(\xi) &= -\varepsilon^{d-2} \mathbf{c}(\omega) u_\alpha^0(x^0) \Phi(x - x^0) \\ &+ O(\varepsilon^{d-1} |x - x^0|^{1-d}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поэтому, подставив анзацы (3.2), (3.1) в уравнение (1.3), соберем коэффициенты при ε^{d-2} , записанные в медленных переменных, и получим, что поправочное слагаемое u'_α следует искать из задачи

$$-\Delta u'_\alpha(x) - \lambda^0 u'_\alpha(x) = f'_\alpha(x), \quad x \in \Pi \setminus x^0, \quad u'_\alpha(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad (3.13)$$

с правой частью

$$f'_\alpha(x) = \mathbf{c}(\omega) u_\alpha^0(x^0) ([\Delta, \chi(x)] + \lambda^0 \chi(x)) \Phi(x - x^0). \quad (3.14)$$

Здесь $[\Delta, \chi] = 2\nabla\chi \cdot \nabla + \Delta\chi$ – коммутатор оператора Лапласа со срезкой χ , т.е. дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами, аннулирующимися вблизи точки x^0 и около границы $\partial\Pi$, т.е. там, где функция χ равна единице и нулю соответственно.

3.2. Разрешимость и асимптотика решений задачи (3.13). Пусть сначала $d = 3$, т.е. функция (3.14), имеющая компактный носитель, но обладающая особенностью $O(|x - x^0|^{-1})$ благодаря формуле (3.11) (напомним, что $[\Delta, \chi]\Phi$ – гладкая функция), попадает в пространство $L^2(\Pi)$. К сожалению, не годится простой способ решения задачи (3.13): преобразование Гельфанда, обращение оператора задачи (1.7)–(1.9) с параметром $\eta \in [-\pi, \pi]$ на ячейке периодичности и обратное преобразование Гельфанда (ср. [7] и [8, §3.4]), так как $\lambda^0 = \Lambda_n(\eta_n)$ – собственное число. Ситуацию удастся исправить при помощи общих результатов [7, 14] (см. также [8, гл. 5]), позволяющих отыскивать решение задачи в весовом классе Соболева $W_\beta^s(\Pi)$ с нормой

$$\|v; W_\beta^s(\Pi)\| = \left(\sum_{k=0}^s \|e^{\beta|z|} \nabla^k v; L^2(\Pi)\|^2 \right)^{1/2},$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$ и $\beta \in \mathbb{R}$ – показатели гладкости и веса, а $\nabla^k v$ – совокупность всех производных функции v порядка k . При $\beta = 0$ имеем $W_\beta^s(\Pi) = H^s(\Pi)$, однако включение $v \in W_\beta^s(\Pi)$ в случаях $\beta > 0$ или

$\beta < 0$ соответственно требует экспоненциальное затухание функции v при $z \rightarrow +\infty$ или допускает некоторый ее рост.

Предложение 3.1. *Существует такое $\beta_\infty > 0$, что при $f'_\alpha \in W_\beta^{l-1}(\Pi)$ и $l \in \mathbb{N}$. $\beta \in (0, \beta_\infty)$ задача (3.13) имеет решение $u'_\alpha \in W_{-\beta}^{l+1}(\Pi)$, которое определено с точностью до линейной комбинации волн Флоке (3.5), (3.8) и допускает представление*

$$u'_\alpha(x) = \sum_{\nu=\pm} \chi_\nu(z) \sum_{\kappa=\pm} \sum_{j=0,1} K_{\alpha\nu}^{\kappa j} w_{n\kappa}^j(y, z) + \tilde{u}'_\alpha(x), \quad (3.15)$$

где χ_\pm – гладкие срезающие функции, $\chi_\pm(z) = 0$ при $\pm z < 1$ и $\chi_\pm(z) = 1$ при $\pm z > 2$. Для экспоненциально затухающего остатка $\tilde{u}'_\alpha \in W_\beta^{l+1}(\Pi)$ и коэффициентов $K_{\alpha\nu}^{\kappa j}$ верна оценка

$$\|\tilde{u}'_\alpha; W_\beta^{l+1}(\Pi)\| + \sum_{\kappa=\pm} \sum_{j=0,1} |K_{\alpha+}^{\kappa j} - K_{\alpha-}^{\kappa j}| \leq c_\beta \|f'_\alpha; W_\beta^{l-1}(\Pi)\|$$

с постоянной c_β , не зависящей от f'_α и u'_α , но неограниченно возрастающей при $\beta \rightarrow +0$.

Замечание 3.1. 1) Согласно предложению 3.1 сумма $\mathbf{u}'_\alpha = u'_\alpha + \sum_{\kappa=\pm} \sum_{j=0,1} c_{\alpha}^{\kappa j} w_{n\kappa}^j$ остается решением задачи (3.13), т.е. положив $c_{\alpha}^{\kappa j} = -K_{\alpha+}^{\kappa j}$, добиваемся включения $e^{\beta z} \mathbf{u}'_\alpha \in H^{l+1}(\Pi)$. Один из результатов [7] (см. также [8, §3.4]) показывает, что такое решение, затухающее при $z \rightarrow +\infty$, но возможно растущее при $z \rightarrow -\infty$, единственно. Именно поэтому суммы коэффициентов $K_{\alpha+}^{\kappa j} + K_{\alpha-}^{\kappa j}$ в разложении (3.15) зависят от выбора решения, но разности

$$K_{\alpha+}^{\kappa j} - K_{\alpha-}^{\kappa j}, \quad j = 0, 1, \kappa = \pm, \quad (3.16)$$

вычисляются по правой части задачи (см. п. 3.3).

2) Согласно [7] информация о жордановых цепочках, представленная в §2, убеждает в том, что при $\beta \in (0, \beta_0)$ оператор задачи (3.13), рассматриваемый как отображение

$$W_\beta^{l+1}(\Pi) \cap W_{0,\beta}^1(\Pi) \rightarrow W_\beta^{l-1}(\Pi), \quad (3.17)$$

является фредгольмовым эпиморфизмом с четырехмерным (по числу отделенных в (3.15) волн Флоке) ядром. Этот факт служит отправной точкой для проверки предложения 3.1. Подробно схема рассуждения изложена, например, в публикациях [14, 34] и др..

В случае $d = 3$ применяем предложение 3.1 с показателем $l = 1$, так как $f'_\alpha \in W_\alpha^0(\Pi)$. Если $d \geq 4$, то включение $f'_\alpha \in L_{2,loc}(\overline{\Pi})$ нарушено, однако положение дел можно исправить переходом к пространствам $\mathcal{W}_{\beta,\gamma}^s(\Pi)$ с весовой нормой

$$\|v; \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^s(\Pi)\| = \left(\sum_{k=0}^s \|e^{\beta|z|} \rho^{\gamma-s+k} \nabla^k v; L^2(\Pi)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.18)$$

содержащей множители двух типов: экспоненциальный $e^{\beta|z|}$ и степенной $\rho(x) = \min\{1, |x-x^0|\}$, проявляющийся только в окрестности точки x^0 . Подчеркнем, что функция f'_α с особенностью $O(|x-x^0|^{2-d})$ попадает в $\mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l-1}(\Pi)$ при любых $l \in \mathbb{N}$ и

$$\gamma > l - 3 + d/2. \quad (3.19)$$

Важно то, что теория Кондратьева [48] (см. также книги [8, гл. 2, 5, 6] и [38, гл. 1, 3]) передает свойства отображения (3.17) оператору задачи (3.13),

$$\mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi) \cap \mathcal{W}_{0,\beta,\gamma-l}^1(\Pi) \rightarrow \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l-1}(\Pi),$$

с теми же l и β , а также показателем $\gamma \in \mathbb{R}$, подчиненным условию

$$\gamma \in (l + 1 - d/2, l - 1 + d/2). \quad (3.20)$$

Ограничения на γ возникают из естественных условий $\chi 1 \in \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi)$ и $\chi \Phi \notin \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi)$. В случае $d = 2$ интервал (3.20) пустой (ср. асимптотическую процедуру в п. 2 §4), но при $d \geq 3$ нужный показатель γ найдется всегда. Сформулируем используемое далее утверждение.

Предложение 3.2. *Предложение 3.1 сохраняет силу после замен $W_\beta^{l-1}(\Pi) \mapsto \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l-1}(\Pi)$ и $W_{\pm\beta}^{l+1}(\Pi) \mapsto \mathcal{W}_{\pm\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi)$ при условии, что показатель γ подчинен ограничению (3.20).*

Осталось, соблюдая оба требования (3.19) и (3.20), зафиксировав индексы $l \in \mathbb{N}$, $\beta \in (0, \beta_\infty)$ и

$$\gamma \in (\max\{0, d-4\} + l + 1 - d/2, l - 1 + d/2). \quad (3.21)$$

Предложение 3.2 доставляет решение (1.7) задачи (3.13), причем остаток \tilde{u}'_α попадает в пространство $\mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi) \cap \mathcal{W}_{0,\beta,\gamma-l}^1(\Pi)$ и экспоненциально затухает на бесконечности.

3.3. Вычисление коэффициентов. Неоднозначность в выборе решения u'_α задачи (3.13), упомянутая в замечании 3.1 (1), все-таки оставляет возможность определить разности (3.16). С этой целью воспользуемся методом [49]. Подставим в формулу Грина на усеченном волноводе $\Pi(R) = \{x \in \Pi : |z| < R\}$ функции u'_α и $w_{n\phi}^0$, где $\phi = \pm$. Получим равенство

$$\int_{\Pi(R)} f'_\alpha(x) \overline{w_{n\phi}^0(x)} dx = \sum_{\pm} \pm \int_{\tau(\pm R)} \left(\overline{w_{n\phi}^0(y, \pm R)} \partial_z u'_\alpha(y, \pm R) - u'_\alpha(y, \pm R) \overline{\partial_z w_{n\phi}^0(y, \pm R)} \right) dy, \quad (3.22)$$

в котором $\tau(\pm R) = \{x \in \Pi : z = \pm R\}$. Ввиду компактности носителя функции (3.14), левая часть (3.22) не зависит от большого параметра R и находится по формуле

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} f'_\alpha(x) \overline{w_{n\phi}^0(x)} dx &= \lim_{\varrho \rightarrow +0} \int_{\Pi \setminus \mathbb{B}_\varrho^d(x^0)} f'_\alpha(x) \overline{w_{n\phi}^0(x)} dx \\ &= \mathbf{c}(\omega) u_\alpha^0(x^0) \lim_{\varrho \rightarrow +0} \int_{\Pi \setminus \mathbb{B}_\varrho^d(x^0)} \overline{w_{n\phi}^0(x)} (\Delta + \lambda^0) (\chi(x) \Phi(x - x^0)) dx \\ &= \mathbf{c}(\omega) u_\alpha^0(x^0) \lim_{\varrho \rightarrow +0} \int_{\partial \mathbb{B}_\varrho^d(x^0)} \left(\Phi(x - x^0) \overline{\partial_r w_{n\phi}^0(x)} - w_{n\phi}^0(x) \partial_r \Phi(x - x^0) \right) ds_x. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь $r = |x - x^0|$ и ds_x – элемент площади поверхности. Кроме того, при учете выражения (3.14) была применена формула интегрирования по частям. По определению (3.11) фундаментального решения имеем $\partial_r \Phi(x - x^0) = (d - 2)C_d^{-1}r^{1-d}$ и $\text{mes}_{d-1}(\partial \mathbb{B}_\varrho^d(x^0)) = \varrho^{d-1} \text{mes}_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})$, а значит, благодаря гладкости функции $w_{n\phi}^0$ и соотношению $\partial_r w_{n\phi}^0(x) = O(1)$ при $x \rightarrow x^0$, выводим, что

$$\int_{\Pi} f'_\alpha(x) \overline{w_{n\phi}^0(x)} dx = \mathbf{c}(\omega) u_\alpha^0(x^0) \overline{w_{n\phi}^0(x^0)}. \quad (3.24)$$

Для интегралов $T(\pm R)$ из правой части (3.22) согласно (3.15) верны соотношения

$$T(\pm R) = T_0(\pm R) + o(1), \quad (3.25)$$

$$T_0(\pm R) = \sum_{\kappa=\pm} \sum_{j=0,1} K_{\alpha\pm}^{\kappa j} \times \int_{\tau(\pm R)} \left(\overline{w_{n\phi}^0(y, \pm R)} \partial_z w_{n\kappa}^j(y, \pm R) - w_{n\kappa}^j(y, \pm R) \overline{\partial_z w_{n\phi}^0(y, +R)} \right) dy.$$

При этом экспоненциально затухающий остаток $\tilde{u}'_\alpha(y, \pm R)$ превращен в бесконечно малую $o(1)$ при $R \rightarrow +\infty$. Выражения (3.25), включающие волны (3.5), (3.8) и потому не зависящие от параметра R , представимы как вычисленные в точке $z = \pm R$ линейные комбинации

$$\mathcal{T}_\pm^1(z), \quad z\mathcal{T}_\pm^2(z), \quad e^{-2i\phi\eta_n z}\mathcal{T}_\pm^3(z), \quad ze^{-2i\phi\eta_n z}\mathcal{T}_\pm^4(z), \quad (3.26)$$

причем сомножители $\mathcal{T}_\pm^q(z)$ являются 1-периодическими. Поскольку $\eta_n \neq 0, \pi$ по предположению (2.10), существование предела (3.24) левой части означает, что равны нулю коэффициенты при каждой из трех последних функций (3.26): аналогичная (3.22) формула Грина верна и для произведения $\chi_\pm u'_\alpha$, т.е. вывод делается независимо для $T_0(+R)$ и $T_0(-R)$. Следуя [49], произведем дополнительно интегрирование по $R \in (N, N+1)$, где N – большое натуральное число, т.е. переделаем интегралы по сечениям $\tau(+R)$ и $\tau(-R)$ в интегралы по ячейкам ϖ_N и ϖ_{-N-1} соответственно. Левая часть (3.22) не изменится, а в правой учтем сказанное о величинах (3.25) и (3.26). В результате согласно определениям (3.5) и (3.8) волн Флоке $w_{n\phi}^0$ и $w_{n\phi}^1$, а также 1-периодичности по z их ингредиентов $U_{n\phi}^0$ и $U_{n\phi}^1$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}(\omega)u_\alpha^0(x^0)\overline{w_{n\phi}^0(x^0)} &= \sum_{\pm} \pm \left(K_{\alpha\pm}^{\phi 0} \int_{\varpi} \left(\overline{U_{n\phi}^0(x)} (\partial_z + i\phi\eta_n) \right. \right. \\ &\quad \times U_{n\phi}^0(x) - U_{n\phi}^0(x) \overline{(\partial_z + i\phi i\eta_n)U_{n\phi}^0(x)} \Big) dx \\ &\quad + K_{\alpha\pm}^{\phi 1} \int_{\omega} \left(\overline{U_{n\phi}^0(x)} ((\partial_z + i\phi\eta_n)U_{n\phi}^1(x) + iU_{n\phi}^0(x)) \right. \\ &\quad \left. \left. - U_{n\phi}^1(x) \overline{(\partial_z + i\phi\eta_n)U_{n\phi}^0(x)} \right) dx \right) + o(1). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Подчеркнем еще раз, что подынтегральные выражения получены непосредственным дифференцированием волн Флоке и устранением слагаемых, у которых отсутствует периодичность по переменной z , после чего “удаленные” ячейки ϖ_N и ϖ_{-N-1} заменены “центральной” $\varpi_0 = \varpi$.

Интегрированием по частям придаем множителю при $K_{\alpha\pm}^{\phi_0}$ из (3.27) вид

$$2((\partial_z + i\phi\eta_n)U_{n\phi}^0, U_{n\phi}^0)_{\varpi} = -i(\partial_\eta \mathfrak{A}(\lambda^0; \phi\eta_n)U_{n\phi}^0, U_{n\phi}^0)_{\varpi} = 0.$$

Здесь использованы определение пучка (2.1) и условие разрешимости уравнения (2.3) при $\Lambda^0 = \lambda^0$, $\eta^0 = \phi\eta_n$ и $p = 1$, выполненное ввиду существования присоединенного вектора $U_{n\phi}^1$. Коэффициент при $K_{\alpha\pm}^{\phi_1}$ принимает вид

$$2((\partial_z + i\phi\eta_n)U_{n\phi}^1, U_{n\phi}^0)_{\varpi} + i\|U_{n\phi}^0; L^2(\varpi)\|^2 = -i\mathfrak{k}(\phi\eta_n) \neq 0. \quad (3.28)$$

При этом приняты во внимание формулы (2.5) и (2.25), а последняя из них – следствие непродолжимости жордановой цепочки. Кроме того, благодаря соотношениям (2.5), (2.25) и (3.6), (3.7) положительное число $\mathfrak{k}(\phi\eta_n)$ не зависит от знака $\phi = \pm$.

Подводя итог проделанным вычислениям, переходим к пределу при $N \rightarrow \infty$ и находим, что

$$K_{+}^{\phi_1} - K_{-}^{\phi_1} = i\mathfrak{k}(\eta_n)^{-1}\mathfrak{c}(\omega)u_{\alpha}^0(x^0)\overline{w_{n\phi}^0(x^0)}. \quad (3.29)$$

Точно такие же манипуляции с функциями u'_{α} и w_{ϕ}^1 позволяют вычислить разности (3.16) с $j = 0$, однако они далее востребованы не будут.

3.4. Процедура сращивания. Как уже упоминалось в п. 1 §3, асимптотический анзац (3.2) непригоден на больших расстояниях от полости (1.1). Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [39, 40], [38, гл. 2] и др.) в исполнении [19, 34], интерпретируя (3.2) как *внутреннее* разложения и вводя два – по числу выходов на бесконечность – *внешних* разложения

$$u_{\alpha}^{\varepsilon}(y, z) = \sum_{\phi=\pm} K_{\alpha\pm}^{\phi}(\varepsilon)w_{n\phi}^0(y, z; \delta) + \dots, \quad \pm z \gg 1. \quad (3.30)$$

Поясним обозначения. Под $K_{\alpha\pm}^{\phi}$ понимаем подлежащие определению функции малого параметра

$$K_{\alpha\pm}^{\phi}(\varepsilon) = K_{\alpha\pm}^{\phi}(0) + \varepsilon^{d-2}K_{\alpha\pm}^{\phi'} + \dots \quad (3.31)$$

Кроме того, в (3.30) фигурируют экспоненциально затухающие при $\pm z \rightarrow +\infty$ волны Флоке (2.31), построенные в п. 4 §2 и обозначенные теперь следующим образом:

$$w_{+}^0(y, z; \delta) = e^{i\eta_n^{+}(\delta)z}U_n^{+}(y, z; \delta) = \overline{w_{-}^0(y, z; \delta)}. \quad (3.32)$$

Показатели $\eta_n^\pm(\delta)$ и амплитудные части U_n^\pm указаны формулами (2.29) и (2.30) в предложении 2.1. Наконец, в качестве малого параметра δ , описывающего возмущение (2.26) собственного числа, возьмем согласованную с предположениями (3.1) и (3.3) разность

$$\delta = \lambda^\varepsilon - \lambda^0 = \varepsilon^{2(d-2)}\lambda' + \dots \quad (3.33)$$

При помощи соотношений (2.32) и (3.31), (3.33), получаем представление

$$\begin{aligned} u_\alpha^\varepsilon(y, z) = \sum_{\phi=\pm} \left(K_{\alpha\pm}^\phi(0)w_{n\phi}^0(y, z) \right. \\ \left. + \varepsilon^{d-2} \left(K_{\alpha\pm}^{\phi'}(0)w_{n\phi}^0(y, z) + \sqrt{\lambda'_\alpha}\mu_\pm w_{n\phi}^1(y, z) \right) \right) + \dots, \\ 1 \ll \pm z \ll +\infty; \quad (3.34) \end{aligned}$$

здесь μ_\pm — числа (2.28) и $U_n^0 := U_{n+}^0$.

Представления (3.34) написаны в “промежуточных” зонах, т.е. при больших $\pm z$, но таких, что величина $\varepsilon^{d-2}|z|$ все-таки остается малой, и можно пользоваться соотношением (2.32). Процедура сращивания (см. [39, 40], [38, гл. 2] и др.) требует, чтобы внутреннее и внешние разложения в главном совпадали в указанных зонах. Сравнивая коэффициенты порядка $1 = \varepsilon^0$ при волнах $w_{n\phi}^0$ в соотношениях (3.34) и (3.2), заключаем при учете (3.4), что

$$K_{\alpha+}^\phi(0) = K_{\alpha-}^\phi(0) = a_\phi^\alpha, \quad \phi = \pm. \quad (3.35)$$

Теперь выделим во внешних разложениях (3.34) коэффициенты порядка ε^{d-2} при волнах $w_{n\phi}^0(y, z)$ и $w_{n\phi}^1(y, z)$. Во внутреннем разложении (3.2) такие же волны появляются в представлении (3.15) слагаемого $e^{d-2}u'_\alpha(x)$. Таким образом, выполнив сращивание, приходим в силу (2.28) к равенствам

$$\begin{aligned} K_{\alpha\pm}^{\phi'}(0) = K_{\alpha\pm}^{\phi 0} \\ \text{и } \pm i\sqrt{\lambda'_\alpha} \mathfrak{k}(\eta_m)^{-1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\| K_{\alpha\pm}^\phi(0) = K_{\alpha\pm}^{\phi 1}. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Благодаря связям (3.35) и (3.36) находим левую часть (3.29) и выводим соотношения

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{\lambda'_\alpha} \mathfrak{k}(\eta_n)^{1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\| a_\phi^\alpha \\ &= \mathfrak{c}(\omega) (a_+^\alpha w_{n+}^0(x^0) + a_-^\alpha w_{n-}^0(x^0)) \overline{w_\phi^0(x^0)}, \\ & \phi = \pm, \end{aligned} \quad (3.37)$$

которые следует интерпретировать как систему двух линейных уравнений для определения столбца $a^\alpha = (a_+^\alpha, a_-^\alpha)^\top$ коэффициентов линейной комбинации (2.32). В краткой записи

$$\mathfrak{M}a^\alpha = \mathfrak{m}a^\alpha \quad (3.38)$$

фигурируют эрмитова (2×2) -матрица \mathfrak{M} с элементами

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{++} = \mathfrak{M}_{--} &= \mathfrak{c}(\omega) |U_n^0(x^0)|^2, \quad \mathfrak{M}_{+-} = \overline{\mathfrak{M}_{-+}} = \mathfrak{c}(\omega) e^{2i\eta_n z^0} U_n^0(x^0)^2 \\ & \text{(последнее величина } U_n^0(x^0) \text{ без знака модуля), а также скаляр} \\ \mathfrak{m} &= 2\sqrt{\lambda'_\alpha} \mathfrak{k}(\eta_n)^{1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Матрица \mathfrak{M} положительная, но вырожденная. В интересующем нас случае

$$U_n^0(x^0) = |U_n^0(x^0)| e^{i\psi} \neq 0, \quad \psi \in [-\pi, \pi), \quad (3.40)$$

ее ранг равен единице, а собственные числа и векторы принимают вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_+ &= 2\mathfrak{c}(\omega) |U_n^0(x^0)|^2, \quad a^+ = 2^{-1/2} (e^{i(\eta+\psi)}, e^{-i(\eta+\psi)})^\top, \\ \mathfrak{m}_- &= 0, \quad a^- = 2^{-1/2} (e^{i(\eta+\psi)}, -e^{-i(\eta+\psi)})^\top. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Найденные собственные векторы (3.41) позволяют конкретизировать главный член (3.4) внутреннего разложения (3.2), а также и главный член пограничного слоя, однако из двух формул

$$\lambda'_+ = \frac{\mathfrak{c}(\omega)^2}{\mathfrak{k}(\eta_n)} \frac{|U_n^0(x^0)|^4}{\|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2} \quad \text{и} \quad \lambda'_- = 0, \quad (3.42)$$

обеспеченных соотношениями (3.41) и (2.4), к употреблению готова только первая, так как вторая не гарантирует, что собственное число (3.1) попадет в лауну (1.14) – ср. второе требование (3.3). Более того, в случае $U_n^0(x^0) = 0$ обе величины (3.42) становятся нулевыми, и сделать вывод о наличии собственного числа в лакуне G_n на данном этапе асимптотического анализа не удастся – нужно строить младшие члены асимптотики. Наметим соответствующую процедуру в следующем разделе.

3.5. Вырожденный случай. Предположим, что требование (3.40) нарушено и

$$U_n^0(x^0) = 0, \quad \text{но} \quad \nabla U_n^0(x^0) \neq 0 \in \mathbb{C}^d. \quad (3.43)$$

Опишем кратко изменения, которые нужно внести в изложенную выше схему, вводя дополнительные ограничения для простоты. В полном объеме асимптотический анализ собственных чисел задачи Дирихле в области с малой полостью представлен в статье [45] (см. также [38, гл. 9]).

В ситуации (3.43) анзацы (3.1) и (3.2) заменяются такими:

$$\lambda_\alpha^\varepsilon = \lambda^0 + \varepsilon^{2d} \lambda'_\alpha + \dots, \quad (3.44)$$

$$u_\alpha^\varepsilon(x) = u_\alpha^0(x) - \chi(x) \varepsilon W(\varepsilon^{-1}(x - x^0)) \nabla u_\alpha^0(x^0) + \varepsilon^d u'_\alpha(x) + \dots \quad (3.45)$$

Формулы (3.3) и (3.4) остаются без изменений, но главный член типа пограничного слоя формируется из градиента $\nabla u_\alpha^0(x^0)$, интерпретируемого как столбец в комплексном пространстве \mathbb{C}^d , и строки $W = (W_1, \dots, W_d)$ решений внешней задачи Дирихле

$$-\Delta_\xi W_j(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}, \quad W_j(\xi) = \xi_j, \quad \xi \in \partial\omega. \quad (3.46)$$

Как показано, например, в книге [46, приложение G], начало декартовых координат $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ можно зафиксировать так, чтобы в асимптотике на бесконечности этих решений

$$W_j(\xi) = - \sum_{k=1}^d P_{jk}(\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}(\xi) + O(|\xi|^{-d}), \quad |\xi| \rightarrow +\infty \quad (3.47)$$

отсутствовали слагаемые $C_j \Phi(\xi)$. Кроме того, коэффициенты $P_{jk}(\omega)$ образуют $(d \times d)$ -матрицу $P(\omega)$ (тензор поляризации множества $\bar{\omega}$), которая является симметричной и положительно определенной (см. [46, приложение G]). При фиксированном параметре ε нужное положение множества ω относительно точки $\xi = 0$ можно обеспечить выбором “центра” x^0 полости ω_ε и поэтому для облегчения выкладок будем считать, что верны именно упрощенные представления (3.47) (в [45] и [38, гл. 9] пояснено, почему финальной формулы (3.54) сохраняются и без этого допущения).

Благодаря краевому условию в задаче (3.46) и формуле Тейлора

$$\begin{aligned} u_\alpha^0(x) &= u_\alpha^0(x^0) + (x - x^0) \cdot \nabla u_\alpha^0(x^0) + O(|x - x^0|^2) \\ &= \varepsilon \xi \cdot \nabla u_\alpha^0(x^0) + O(\varepsilon^2 |\xi|^2), \end{aligned} \quad (3.48)$$

написанной при учете (3.43), сумма первых двух слагаемых в анзаце (3.45) удовлетворяет условию Дирихле (1.4) на поверхности $\partial\omega_\varepsilon$ с точностью $O(\varepsilon^2)$. Из-за срезки χ второе слагаемое оставляет невязку в уравнении (1.3), главная часть которой в силу соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon W(\varepsilon^{-1}(x - x^0)) \nabla u_\alpha^0(x^0) \\ = -\varepsilon^d \nabla u_\alpha^0(x^0)^\top P(\omega) \nabla \Phi(x - x^0) + O(\varepsilon^{d+1} |x - x^0|^{-d}) \end{aligned}$$

образует правую часть

$$f'_\alpha(x) = -\nabla u_\alpha^0(x^0)^\top P(\omega) ([\Delta, \chi(x)] + \lambda^0 \chi(x)) \nabla \Phi(x - x^0) \quad (3.49)$$

задачи (3.13) для определения поправки u'_α гладкого типа. Отметим, что аналогами формул (3.48)–(3.49) служат формулы (3.9), (3.12), (3.14).

Нетрудно убедиться в том, что функция (3.49), обладающая особенностью $O(|x - x^0|^{1-d})$, попадает в пространство $\mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l-1}(\Pi)$ с нормой (3.18) при любых показателях $l \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и индексе γ из (3.20). Таким образом, предложение 3.2 дает решение $u'_\alpha \in \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l+1}(\Pi) \cap \mathcal{W}_{0,\beta,\gamma-l}^1(\Pi)$ задачи (3.13), (3.49), допускающее представление (3.15) и определенное с точностью до линейной комбинации волн $w_{n\pm}^0$ и $w_{n\pm}^1$. Вычисление разностей (3.16) по-прежнему производится при помощи метода [49] – единственное отличие возникает в выкладке (3.23), которая теперь выглядит так:

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} f'_\alpha(x) \overline{w_{n\phi}^0(x)} dx &= - \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_j}(x^0) P_{jk}(\omega) \lim_{\varrho \rightarrow +0} \\ &\times \int_{\partial \mathbb{B}_\varrho^d(x^0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x - x^0) \overline{\frac{\partial w_{n\phi}^0}{\partial r}(x^0)} \right. \\ &\left. - \overline{w_{n\phi}^0(x^0)} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x - x^0) \right) ds_x. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Поскольку $\int_{\partial\mathbb{B}_\varrho^d(x^0)} \frac{\partial\Phi}{\partial r}(x-x^0) \frac{\partial}{\partial x_k}(x-x^0) ds_x = 0$ и

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathbb{B}_\varrho^d(x^0)} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}(x-x^0) \frac{\partial}{\partial r}(x_p-x_p^0) - (x-x_p^0) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}(x-x^0) \right) ds_x \\ &= \frac{2-d}{C_d} \int_{\partial\mathbb{B}_\varrho^d(x^0)} \left(\frac{x_k-x_k^0}{|x-x^0|^{d+1}}(x_p-x_p^0) + (d-1)(x_p-x_p^0) \frac{x_k-x_k^0}{|x-x^0|^{d+1}} \right) ds_x \\ &= -\frac{d}{\text{mes}_{d-1}\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\partial\mathbb{B}_\varrho^d(x^0)} (x_k-x_k^0)(x_p-x_p^0) \frac{ds_x}{|x-x^0|^{d+1}} = -\delta_{k,p} \end{aligned} \quad (3.51)$$

($\delta_{k,p}$ – символ Кронекера), получаем окончательно, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} f'_\alpha(x) \overline{w_\phi^0(x)} dx &= \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_j}(x^0) P_{jk}(x^0) \overline{\frac{\partial w_{n\phi}^0}{\partial x_k}(x^0)} \\ &= \overline{\nabla w_{n\phi}^0(x^0)}^\top P(\omega) \nabla u_\alpha^0(x^0). \end{aligned}$$

Повторив выкладки (3.27)–(3.28), находим следующий заменитель равенства (3.29):

$$K_{\alpha+}^{\phi 1} - K_{\alpha-}^{\phi 1} = i\mathfrak{k}(\eta_n)^{-1} \overline{\nabla w_{n\phi}^0(x^0)}^\top P(\omega) \nabla u_\alpha^0(x^0). \quad (3.52)$$

Теперь процедура сращивания из п.4§3 доставляет соотношения (3.35)–(3.36) для коэффициентов представления (3.15) и ингредиентов формул

$$\begin{aligned} K_{\alpha\pm}^\phi(\varepsilon) &= K_{\alpha\pm}^\phi(0) + \varepsilon^{d-2} K_{\alpha\pm}^{\phi l}(0) + \dots, \\ \delta &= \lambda^\varepsilon - \lambda^0 = \varepsilon^{2d} \lambda'_\alpha + \dots, \end{aligned} \quad (3.53)$$

подменяющих (3.31) и (3.33). Соотношения (3.36) и (3.52) приводят к системе уравнений для определения столбца a^α коэффициентов линейной комбинации (2.32)

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{\lambda'_\alpha} \mathfrak{k}(\eta_n)^{1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\| a_\phi^\alpha \\ &= (a_+^\alpha \nabla w_{n+}^0(x^0) + a_-^\alpha \nabla w_{n-}^0(x^0))^\top P(\omega) \overline{\nabla w_{n\phi}^0(x^0)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

краткая запись (3.38) которой привлекает скаляр (3.39) и матрицу \mathfrak{M} с элементами

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{++} &= \mathfrak{M}_{--} = \overline{\nabla U_n^0(x^0)}^\top P(\omega) \nabla U_n^0(x^0), \\ \mathfrak{M}_{+-} &= \overline{\mathfrak{M}_{-+}} = e^{2i\eta_n z^0} \nabla U_n^0(x^0)^\top P(\omega) \nabla U_n^0(x^0).\end{aligned}\quad (3.55)$$

При вычислении элементов (3.55) принято во внимание предположение (3.43):

$$\begin{aligned}\nabla_y w_{n\pm}^0(x^0) &= e^{\pm i\eta_n z^0} \nabla_y U_{n\pm}^0(x^0), \quad \partial_z w_{n\pm}^0(x^0) = \partial_z (e^{\pm i\eta_n z} U_{n\pm}^0(x))|_{x=x^0} \\ &= e^{\pm i\eta_n z^0} \partial_z U_{n\pm}^0(x^0) \pm i\eta_n e^{\pm i\eta_n z^0} U_{n\pm}^0(x^0) = e^{\pm i\eta_n z^0} \partial_z U_{n\pm}^0(x^0).\end{aligned}$$

В силу упомянутых свойств матрицы поляризации $P(\omega)$ матрица \mathfrak{M} эрмитова и положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}\text{столбцы } b^r &= \operatorname{Re} \nabla U_n^0(x^0), \\ b^i &= \operatorname{Im} \nabla U_n^0(x^0) \in \mathbb{R}^d \quad \text{линейно независимы.}\end{aligned}\quad (3.56)$$

В этом случае

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{++} &= (b^r)^\top P(\omega) b^r + (b^i)^\top P(\omega) b^i =: \mathfrak{b}_1, \\ \mathfrak{M}_{+-} &= e^{2i\eta_n z^0} ((b^r)^\top P(\omega) b^r - (b^i)^\top P(\omega) b^i + 2i(b^r)^\top P(\omega) b^i) \\ &=: e^{2i\eta_n z^0} \mathfrak{b}_2,\end{aligned}$$

а значит, собственные числа матрицы \mathfrak{M} приобретают вид

$$\mathfrak{m}_\pm = \mathfrak{b}_1 \pm \sqrt{\mathfrak{b}_1^2 - (\mathfrak{b}_1^2 - |\mathfrak{b}_2|^2)} = \mathfrak{b}_1 \pm |\mathfrak{b}_2|. \quad (3.57)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}|\mathfrak{b}_2|^2 &= ((b^r)^\top P(\omega) b^r - b^i \cdot P(\omega) b^i)^2 + 4|(b^r)^\top P(\omega) b^i|^2 \\ &\leq ((b^r)^\top P(\omega) b^r - (b^i)^\top P(\omega) b^i)^2 \\ &\quad + 4((b^r)^\top P(\omega) b^r) ((b^i)^\top P(\omega) b^i) \\ &= ((b^r)^\top P(\omega) b^r + (b^i)^\top P(\omega) b^i)^2 = \mathfrak{b}_1^2,\end{aligned}\quad (3.58)$$

причем знак равенства в цепочке (3.58) реализуется только в случае линейной зависимости столбцов $b^r, b^i \in \mathbb{R}^d$. Итак, $|\mathfrak{b}_2| < \mathfrak{b}_1$ при условии (3.56), и оба собственных числа (3.57) матрицы \mathfrak{M} положительны. Соответствующие нормированные собственные столбцы $a^\pm \in \mathbb{C}^2$ и величины

$$\lambda'_\pm = \mathfrak{k}(\eta_n)^{-1} \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2 (\mathfrak{b}_1 \pm |\mathfrak{b}_2|)^2$$

конкретизируют главные члены анзацев (3.44), (3.45), (3.30) и (3.53). По поводу младших членов можно повторить последний абзац п. 4 §3.

§4. ПРОСТОЕ СОБСТВЕННОЕ ЧИСЛО ВНУТРИ ЛАКУНЫ.

4.1. Асимптотические анзацы в случае $d \geq 3$. В ситуации (2.7), подразумевающей одну из возможностей (2.9) и допускающей появление в лакуне только одного собственного числа, асимптотическая процедура упрощается. Анзацы (3.1) и (3.2), (3.3) сохраняются, однако в них не нужно писать индекс α , так как в качестве $u_\alpha^0 = u^0$ берется вещественная (см. п. 3 §2) волна Флоке

$$w_n^0(y, z) = U_n^0(x) \quad \text{или} \quad w_n^0(y, z) = e^{i\pi z} U_n^0(x), \quad (4.1)$$

построенная по (единственной) собственной функции w_n^0 пучка $\mathfrak{A}(\lambda^0; \cdot)$, отвечающей собственному числу η_n и нормированной в $L^2(\varpi)$. Далее ссылаемся на формулы из §3, считая, что в них сделаны упомянутые или другие понятные изменения. Кроме того, в формуле (4.1) и подобным ей первое или второе выражение относится к разделенным в (2.9) случаям.

Поправочный член $u'(x)$ гладкого типа находится из задачи (3.13) с правой частью (3.14). При ограничении (3.21) решение $u' \in \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1}(\Pi) \cap W_{0, \beta, \gamma-i}^1(\Pi)$ существует и определено с точностью до линейной комбинации волн Флоке (4.1) и

$$\begin{aligned} w_n^1(y, z) &= izU_n^0(y, z) + U_n^1(y, z) \\ \text{или} \quad w_n^1(y, z) &= e^{i\pi z} (izU_n^0(y, z) + U_n^1(y, z)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Предложение 3.1 остается в силе, однако в представлении (3.15) уменьшается количество отделенных членов:

$$u'(x) = \sum_{\pm} \chi_{\pm}(z) \sum_{j=0,1} K_{\pm}^j w_n^j(y, z) + \tilde{u}'(x). \quad (4.3)$$

Выкладки из п. 3 §3 дают аналогичное (3.29) выражение для разности коэффициентов из (4.3)

$$K_+^1 - K_-^1 = i\mathfrak{k}(\eta_n)^{-1} \mathfrak{c}(\omega) |w_n^0(x^0)|^2, \quad (4.4)$$

причем величины $\mathfrak{k}(\eta_n)$ при $\eta_n = 0$ или $\eta_n = \pm\pi$ (см. случаи (4.1)) и коэффициент $\mathfrak{c}(\omega)$, пропорциональный емкости множества ω , взяты из (2.5) и (3.11), а равенство $|w_n^0(x^0)| = |U_n^0(x^0)|$ выполнено в силу (4.1).

В предположениях (3.31) и (3.33) аналогичные (3.30), но упрощенные внешние разложения

$$u^\varepsilon(y, z) = K_\pm(\varepsilon)w_n^\pm(y, z; \delta) + \dots \quad (4.5)$$

в промежуточных зонах $1 \ll \pm z \ll +\infty$ принимают вид

$$u^\varepsilon(y, z) = K_\pm(0)w_n^0(y, z) + \varepsilon^{d-2} \times \left(K'_\pm(0)w_n^0(y, z) + \sqrt{\lambda'}\mu_\pm w_n^1(y, z) \right) + \dots \quad (4.6)$$

При этом вывод формулы (4.6) и принятые в ней обозначения вполне аналогичны использованным в п. 4 §3. Так, вместо волн Флоке (3.32) в правой части (4.5) фигурируют волны Флоке (2.31), в которых задействованы следующие показатели и амплитудные части:

$$\eta_n^\pm(\delta) = \eta_n + \mu_\pm \delta^{1/2} + \dots \\ \text{и } U_n^\pm(y, z; \delta) = U_n^0(y, z) + \mu_\pm \delta^{1/2} U_n^1(y, z) + \dots \quad (4.7)$$

(см. предложение 2.1), а множители μ_\pm определены равенством (2.28).

Процедура сращивания внутреннего и внешних разложений при учете соотношений (4.3) и (4.6) приводит к формулам $K_\pm(0) = 1$, $K'_\pm(0) = K_\pm^0$ и $\sqrt{\lambda'}\mu_\pm = K_\pm^1$, из которых согласно (4.4) и (2.28) выводится скалярное уравнение

$$2\sqrt{\lambda'} i \mathfrak{k}(\eta_n)^{-1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\| = i \mathfrak{k}(\eta_n)^{-1} \mathfrak{c}(\omega) |U_n^0(x^0)|^2, \quad (4.8)$$

а не система (3.37), как в п. 4 §3. В результате имеем

$$\sqrt{\lambda'} = \frac{\mathfrak{c}(\omega)}{2\mathfrak{k}(\eta_n)^{1/2}} \frac{|U_n^0(x^0)|^2}{\|U_n^0; L^2(\varpi)\|} \Rightarrow \lambda' = \frac{\mathfrak{c}(\omega)^2}{4\mathfrak{k}(\eta_n)} \frac{|U_n^0(x^0)|^4}{\|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2}.$$

Соблюсти второе соотношение (3.3) нетрудно, поскольку в силу неравенства (2.25) достаточно выбрать центр x^0 полости (1.1) так, чтобы $U_n^0(x^0) \neq 0$.

Замечание 4.1. Если все-таки случилось, что $U_n^0(x^0) = 0$, то можно с некоторыми упрощениями повторить вычисления из п. 5 §3 и в предположении $|\nabla U_n^0(x^0)| \neq 0$ получить следующую формулу для поправки $\varepsilon^{2d}\lambda'$ в асимптотическом анзаце (3.44):

$$\lambda' = \mathfrak{k}(\eta_n)^{-1} \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^{-2} \left| \overline{\nabla U_n^0(x^0)}^\top P(\omega) \nabla U_n^0(x^0) \right|^2 > 0.$$

4.2. Асимптотические анзацы в случае $d = 2$. Плоская задача (1.3), (1.4) стоит особняком, так как фундаментальное решение оператора Лапласа принимает вид $\Phi(\xi) = -(2\pi)^{-1} \ln |\xi|$ и не затухает на бесконечности. Поэтому вместо емкостного потенциала (3.10) приходится иметь дело с решением E_{log} однородной внешней задачи Дирихле на $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}$, допускающим представление

$$E_{log}(\xi) = -(2\pi)^{-1}(\ln |\xi| + \mathbf{c}_{log}(\omega)) + O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad (4.9)$$

в котором $\mathbf{c}_{log}(\omega)$ – *логарифмическая емкость* множества ω (см., например, книгу [47]).

В статье [49] (см. также монографию [38, гл. 9]) построена асимптотика собственных чисел задачи Дирихле в плоской области с малым отверстием. Второй член разложения

$$\lambda^\varepsilon = \lambda^0 + \Lambda(\mathfrak{z}) + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad |\tilde{\lambda}^\varepsilon| \leq c_\delta \varepsilon^\delta, \quad \delta \in (0, 1), \quad (4.10)$$

является аналитической функцией еще одного малого параметра

$$\mathfrak{z} = (2\pi)(|\ln \varepsilon| - \mathbf{c}_{log}(\omega))^{-1}, \quad (4.11)$$

причем $\Lambda(0) = 0$, т.е. $|\Lambda(\mathfrak{z})| = O(|\ln \varepsilon|^{-1})$. Для проверки появления собственного числа в лакуне (1.14) подобная, весьма точная – с остатком “степенной” малости – формула (4.10) не нужна, и мы ограничимся построением “логарифмической” асимптотики

$$\lambda^\varepsilon = \lambda^0 + \mathfrak{z}^2 \lambda' + \dots \quad (4.12)$$

Для простоты в этом разделе считаем, что начало координат $\xi = 0$ расположено внутри области ω . Как обычно, сначала предположим, что $U_n^0(x^0) \neq 0$. В качестве главного члена сопутствующего внутреннего разложения

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \chi(\varepsilon)W(\varepsilon^{-1}(x - x^0)) + \mathfrak{z}u'(x) + \dots \quad (4.13)$$

собственной функции, разумеется, возьмем волну Флоке (4.1).

Займемся поправками W и u' типа пограничного слоя и гладкого типа соответственно. В качестве второй из них возьмем решение задачи

$$-\Delta u'(x) - \lambda^0 u'(x) = 0, \quad x \in \Pi \setminus x^0, \quad u'(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad (4.14)$$

с логарифмической особенностью, включающей неизвестный множитель A ,

$$u'(x) = -A(2\pi)^{-1} \ln r + O(r), \quad r = |x - x^0| \rightarrow 0. \quad (4.15)$$

Главная часть невязки суммы $u^0 + \mathfrak{z}u'$ в краевом условии на границе малого отверстия компенсируется гармонической в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}$ функцией W , удовлетворяющей краевому условию

$$W(\xi) = -u^0(x^0) + A\mathfrak{z}(2\pi)^{-1} \ln(\varepsilon^{-1}|\xi|), \quad \xi \in \partial\omega. \quad (4.16)$$

Решение этой внешней задачи Дирихле ищем в виде

$$W(\xi) = C + A\mathfrak{z}^{-1}\widehat{E}_{log}(\xi), \quad (4.17)$$

где C – некоторая постоянная, а $\widehat{E}_{log}(\xi) = E_{log}(\xi) + (2\pi)^{-1} \ln |\xi|$ – ограниченная гармоническая функция. Подставив сумму (4.17) в соотношение (4.16), при учете формулы (4.9) находим, что

$$C + A\mathfrak{z}(2\pi)^{-1} \ln |\xi| = -u^0(x^0) + A\mathfrak{z}(2\pi)^{-1} \ln(\varepsilon^{-1}|\xi|),$$

а значит, $C = -u^0(x^0) + A\mathfrak{z}^{-1}(2\pi)^{-1} |\ln \varepsilon|$. Кроме того,

$$\begin{aligned} W(\xi) &= C - A\mathfrak{z}(2\pi)^{-1} \mathfrak{c}_{log}(\omega) + O(|\xi|^{-1}) \\ &= -u^0(x^0) + A\mathfrak{z}(2\pi)^{-1} (|\ln \varepsilon| - \mathfrak{c}_{log}(\omega)) + O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

т.е. согласно определению (4.11) пограничный слой (4.17) приобретает необходимое свойство затухания при коэффициенте $A = u^0(x^0)$ в разложении (4.15).

Подчеркнем, что, как и в п. 2 §3, существование решения задачи (4.14), (4.15) устанавливается просто. Дело в том, что задача (3.13) для гладкой составляющей \widehat{u}' представления

$$u'(x) = -\chi(x)(2\pi)^{-1} \ln r + \widehat{u}'(x)$$

приобретает правую часть $\widehat{f}'(x) = -(2\pi)^{-1} ([\Delta, \chi(x)] + \lambda^0 \chi(x)) \ln r$, имеющую компактный носитель и попадающую в $L^2(\Pi)$ благодаря слабой логарифмической сингулярности. Это решение определено с точностью до линейной комбинации волн Флоке (4.1), (4.2) и допускает представление (4.3), причем разность коэффициентов при линейных волнах находится по формуле

$$K_+^1 - K_-^1 = i\mathfrak{k}(\eta_m)^{-1} |u^0(x^0)|^2$$

которая выводится по прежней схеме из п. 3 §3. Отметим, что предположение $x^0 \in \omega^\varepsilon$ выводит сингулярность (4.15) из области $\Pi^\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\omega^\varepsilon}$ и, поэтому проблем с интерпретацией анзаца (4.13) не возникает. Если $x^0 \notin \omega^\varepsilon$, т.е. точка $\xi = 0$ лежит вне ω , то согласно [38, гл. 2] приходится вводить дополнительные срезки, хотя в целом асимптотическая процедура остается неизменной.

Итак, осталось произвести сращивание суммы $u^0 + \mathfrak{z}u'$, т.е. внутреннего, пригодного в конечной части волновода, но на некотором удалении от отверстия ω^ε , с внешним разложением (4.5), которое в силу (4.12) принимает вид

$$u^\varepsilon(y, z) = K_\pm(0)w_n^0(y, z) + \mathfrak{z}(K'_\pm(0)w_n^0(y, z) + \sqrt{\lambda'}\mu_\pm w_n^1(y, z)) + \dots$$

(ср. формулу (4.6) при замене $\varepsilon^{d-2} \mapsto \mathfrak{z}$ малого параметра и соотношение (4.7) с $\delta = \mathfrak{z}^2$). В итоге после аналогичных (4.7) и (4.8) преобразований приходим к соотношению

$$\lambda' = (4\mathfrak{k}(\eta_n))^{-1} \|U_n^0; L^2(\varpi)\|^{-2} |U_n^0(x^0)|^4 \quad (4.18)$$

для поправочного члена в анзаце (4.12). Зависимость от формы отверстия ω в асимптотике собственного числа λ^ε проявляется не в коэффициенте (4.18), а в выражении (4.11) для параметра \mathfrak{z} .

Еще раз обратим внимание на разные порядки $\varepsilon^{2(d-2)}$ и $|\ln \varepsilon|^{-2}$ поправок в представлениях (3.1) и (4.12) для размерностей $d \geq 3$ и $d = 2$ соответственно. При этом асимптотические остатки представляют собой величины $O(\varepsilon^{2d-3})$ и $O(|\ln \varepsilon|^{-3})$.

Замечание 4.2. В ситуации (2.10) разве лишь одно из собственных чисел, способных появиться внутри лакуны (1.14), приобретает логарифмическую асимптотику (4.12), а у второго асимптотика степенная (см. замечание 4.1), так как связь $a_+^- w_{n+}^0(x^0) + a_-^- w_{n-}^0(x^0) = 0$ коэффициентов линейной комбинации (3.4) приводит к равенству $u_-^0(x^0) = 0$.

§5. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ.

5.1. Другие формы сингулярных возмущений границы. При образовании малых каверн и наростов (рис. 1, с) процедура построения асимптотики собственных чисел задачи Дирихле (1.3), (1.4) сохраняется, однако явление пограничного слоя описывается при помощи гармонических функций в областях, изображенных на рис. 4, а и б.

Приведем постановки задач. Зафиксируем точку x^0 на (гладкой по предположению) границе $\partial\Pi$ и область $\omega \subset \mathbb{R}^d$, имеющую гладкую компактную $(d-1)$ -мерную границу и содержащую начало декартовой системы координат $\xi = (\xi_1, \xi')$. Замену координат $x \mapsto \mathbf{x} = \Theta(x - x^0)$ с ортогональной матрицей Θ зафиксируем так, чтобы ось \mathbf{x}_1 была направлена вдоль внешней нормали к поверхности $\partial\Pi$ в точке x^0 . Положим

$$\omega^\varepsilon = \{x : \xi \in \omega\}, \quad \xi = \varepsilon^{-1}\mathbf{x} \quad (5.1)$$

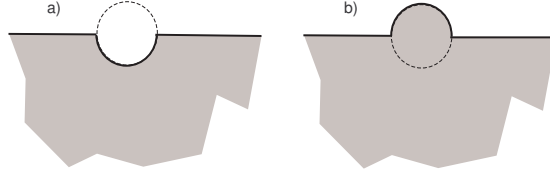


Рис. 4. Области, служащие для описания пограничных слоев в случае каверны (а) и нароста (b).

(ср. (1.1)) и введем области

$$\Pi^\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\omega^\varepsilon} \quad \text{или} \quad \Pi^\varepsilon = \Pi \cup \omega^\varepsilon. \quad (5.2)$$

Растяжение координат $x \mapsto \xi = \varepsilon^{-1}x$ и переход к $\varepsilon = 0$, включающий спрямление границы $\partial\Pi$ около точки x^0 , переделывает множества (5.2) в множества, изображенные на рис. 4, а и b,

$$\Xi = \mathbb{R}_-^d \setminus \overline{\omega} \quad \text{или} \quad \Xi = \mathbb{R}_-^d \cup \omega. \quad (5.3)$$

Здесь $\mathbb{R}_-^d = \{\xi = (\xi_1, \xi') : \xi_1 < 0\}$ – нижнее полупространство. Первые области в (5.2) и (5.3) отвечают случаю каверны, а вторые – наросту.

В качестве пограничного слоя выступает произведение $\partial_\nu u^0(x^0)W(\xi)$ нормальной производной главного члена u_α^0 анзаца (3.2) и решения W задачи

$$-\Delta_\xi W(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi, \quad W(\xi) = \xi_1, \quad \xi \in \partial\Xi, \quad (5.4)$$

затухающего на бесконечности в силу разложения

$$W(\xi) = -P'(\Xi) \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}(\xi) + O(|\xi|^{-d}), \quad |\xi| \rightarrow +\infty. \quad (5.5)$$

Подчеркнем, что правая часть краевого условия (5.4) имеет компактный носитель.

В случае каверны скаляр $P'(\Xi)$ из правой части (5.5) положителен, так как функция W совпадает с сужением на Ξ нечетного по переменной ξ_1 решения (3.47) задачи (3.46) с $j = 1$ на множестве $\mathbb{R}^d \setminus \omega_\ominus$, где $\omega_\ominus = \{\xi : (-|\xi_1|, \xi') \in \overline{\omega_-}\}$ и $\omega_\pm = \{\xi \in \omega : \pm\xi_1 > 0\}$. Проверим, что $P'(\Xi) < 0$ случае нароста. Введем непрерывную функцию

$$W_\bullet(\xi) = \begin{cases} W(\xi_1, \xi') - \xi_1, & \xi \in \omega_+, \\ W(\xi_1, \xi'), & \xi \in \mathbb{R}_-^d, \end{cases}$$

которая аннулируется на поверхности $\partial\Xi$, остается гармонической на множествах ω_+ и \mathbb{R}_-^d , но приобретает скачок производной на сечении $v = \{\xi' : (0, \xi') \in \omega\}$

$$[W_\bullet](\xi') = 0, \quad \left[\frac{\partial W_\bullet}{\partial \xi_1} \right](\xi') = -1, \quad \xi' \in v.$$

Здесь $[F](\xi') = F(+0, \xi') - F(-0, \xi')$. Имеем

$$\begin{aligned} J &:= \int_v W(0, \xi') \left[\frac{\partial W_\bullet}{\partial \xi_1} \right](\xi') d\xi' \\ &= \int_v W_\bullet(+0, \xi') \frac{\partial W_\bullet}{\partial \xi_1} (+0, \xi') d\xi' - \int_v W_\bullet(-0, \xi') \frac{\partial W_\bullet}{\partial \xi_1} (-0, \xi') d\xi' \\ &= - \int_{\omega_+} |\nabla_\xi W_\bullet(\xi)|^2 d\xi - \int_{\mathbb{R}_-^d} |\nabla_\xi W_\bullet(\xi)|^2 d\xi < 0. \end{aligned}$$

Повторив с понятными изменениями выкладку (3.51), получаем нужное неравенство

$$\begin{aligned} 0 > J &= \int_v \left((W(\xi) - \xi_1) \left[\frac{\partial W_\bullet}{\partial \xi_1} \right](\xi') - [W_\bullet](\xi') \frac{\partial}{\partial \xi_1} (W(\xi) - \xi_1) \right) \Big|_{\xi_1=0} d\xi' \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}_{R^+}^{d-1}} \left((W(\xi) - \xi_1) \frac{\partial W}{\partial |\xi|}(\xi) - W(\xi) \frac{\partial}{\partial |\xi|} (W(\xi) - \xi_1) \right) ds_\xi \\ &= P'(\Xi) \int_{\mathbb{S}_-^{d-1}} \left(\xi_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial |\xi| \partial \xi_1}(\xi) - \frac{\partial \xi_1}{\partial |\xi|} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}(\xi) \right) ds_\xi = \frac{1}{2} P'(\Xi). \end{aligned}$$

Поскольку $u_\alpha^0(x^0) = 0$, но в формировании асимптотики собственных чисел участвует скаляр $\partial_n u_\alpha^0(x^0)$, а не вектор $\nabla u_\alpha^0(x^0)$, как в п. 5, §3, в ситуации (2.8), (2.10), (2.13) берутся асимптотические анзацы (3.44), (3.45), однако аналогичная (3.54) система уравнений

$$\begin{aligned} &4\sqrt{\lambda'_\alpha} \mathfrak{k}(\eta_n)^{1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\| a_\phi^\alpha \\ &= (a_+^\alpha \partial_\nu w_{n+}^0(x^0) + a_-^\alpha \partial_\nu w_{n-}^0(x^0)) P'(\Xi) \overline{\partial_\nu w_{n\phi}^0(x^0)}, \quad \phi = \pm, \end{aligned}$$

имеет неотрицательные собственные числа $\sqrt{\lambda'_\alpha}$ лишь в случае $P'(\Xi) > 0$, т.е. для каверны (рис. 4, а). При этом, как и в п. 4 §3, содержательной

оказывается только первая формула

$$\lambda'_+ = \frac{P'(\Xi)^2}{2\mathfrak{k}(\eta_n)} \frac{|\partial_\nu U_n^0(x^0)|^4}{\|U_n^0; L^2(\varpi)\|^2} \quad \text{и} \quad \lambda'_- = 0. \quad (5.6)$$

Для того чтобы выяснить, имеется ли второе собственное число в лакуне, нужно строить младшие асимптотические члены. В ситуации (2.7), (2.9), (2.13) (ср. п. 1, §4 и замечание 4.1) сохраняются формулы (3.44) и (5.6) со знаком $\alpha = +$.

Известно (см., например, [19, 32]), что в случае нароста (рис. 4, b), т.е. при $P'(\Xi) < 0$, задача (1.3), (1.4) имеет собственное число ниже точки отсечки (1.15). Поэтому логично попытаться найти собственные числа вблизи верхнего края лакуны (1.14). При этом представленные выше рассуждения и вычисления остаются без изменений, однако в требовании (2.13) вместо “ < 0 ” нужно писать “ > 0 ”, а поправке в анзаце (3.44) придать вид $-\varepsilon^{2d}\lambda'_\alpha$. Окончательные формулы сохраняются полностью, так как они включают квадраты величины $P'(\Xi)$.

Подчеркнем, что все выкладки и выводы в этом разделе верны при $d \geq 2$, т.е. двумерная задача не обладает особенностями, отмеченными в п. 2, §4.

5.2. Задача Неймана и задача теории упругости. Если вместо условия Дирихле (1.4) назначить смешанные краевые условия

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad \partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\omega^\varepsilon, \quad (5.7)$$

в котором ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, то во всех размерностях $d \geq 2$ годится анзац (3.44) для собственного числа. При этом вместо тензора поляризации $P(\omega)$, образованного коэффициентами представления (3.47), формула для асимптотической поправки в представлении собственного числа привлекает тензор $M(\omega)$ присоединенных масс (см. [46, приложение G]), составленный из коэффициентов разложения

$$W_j(\xi) = \sum_{k=1}^d M_{jk}(\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}(\xi) + O(|\xi|^{-d}), \quad |\xi| \rightarrow +\infty, \quad (5.8)$$

решений внешней задачи Неймана

$$-\Delta_\xi W_j(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}, \quad \partial_{n(\xi)} W_j(\xi) = \partial_{n(\xi)} \xi_j, \quad \xi \in \partial\omega.$$

Матрица $M(\omega)$ размером $d \times d$ по-прежнему симметрична и положительно определена (ср. знаки при суммах в правых частях (3.47)

и (5.8)). Вместе с тем, как показано в [45] (см. также [38, гл. 9]), для похожих, но несколько других задач с краевыми условиями Неймана, асимптотическая процедура претерпевает некоторые изменения. Опишем их, ограничившись для краткости случаем (2.7), (2.13) при $\eta_n = 0$ в размерности $d \geq 3$ (ср. п. 1 §4).

Прежде всего асимптотический анзац (3.45) для собственных функций нуждается в уточнении вторым членом пограничного слоя:

$$u_\alpha^\varepsilon(x) = u_\alpha^0(x) - \chi(x)\varepsilon W(\varepsilon^{-1}(x - x^0))\nabla u^0(x^0) - \chi(x)\varepsilon^2 \mathcal{W}(\varepsilon^{-1}(x - x^0)) + \varepsilon^d u'(x) + \dots \quad (5.9)$$

При этом \mathcal{W} – гармоническая в $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\omega}$ функция, которая компенсирует невязку квадратичного члена в формуле Тейлора для собственной функции

$$u^0(x) = u^0(x^0) + (x - x^0)^\top \nabla u^0(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d (x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_j \partial x_k}(x^0) + O(|x - x^0|^3)$$

и в силу уравнения $-\Delta u^0 = \lambda^0 u^0$ допускает представление (подробности см. в [45] и [38, гл. 9])

$$\mathcal{W}(\xi) = -\lambda^0 \text{mes}_d(\omega) u^0(x^0) \Phi(\xi) + O(|\xi|^{-d+1}), \quad |\xi| \rightarrow +\infty. \quad (5.10)$$

Отделенные в (5.8) и (5.10) члены порядков $|\xi|^{1-d}$ и $|\xi|^{2-d}$ вносят вклад в правую часть задачи (3.13) для поправки u' в анзаце (5.9):

$$f'(x) = ([\Delta, \chi(x)] + \lambda^0 \chi(x)) \times \left(\sum_{j,k=1}^d M_{jk}(\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x - x^0) \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(x^0) + \lambda^0 \text{mes}_d(\omega) u^0(x^0) \right). \quad (5.11)$$

В результате повторения выкладок (3.23) и (3.50), (3.51) приходим к соотношению

$$2\sqrt{\lambda'} \mathfrak{k}(\eta_n)^{1/2} \|U_n^0; L^2(\varpi)\| a_\Phi^\alpha = -\nabla w_n^0(x^0)^\top M(\omega) \overline{\nabla w_n^0(x^0)} + \lambda^0 \text{mes}_d(\omega) |w_n^0(x^0)|^2. \quad (5.12)$$

Правая часть (5.12) не имеет гарантированного знака. В самом деле, если $x^0 \in \varpi$ – точка максимума функции $|U_n^0|$, то $\nabla U_n^0(x^0) = 0$,

значит правая часть (5.12) положительна, и прежние доводы показывают, что вблизи нижнего края лакуны появляется собственное число из дискретного спектра смешанной краевой задачи (1.3), (5.7) с асимптотикой (3.44), в которой поправка $\lambda' > 0$ находится по формуле (5.12). Если же $U_n^0(x^0) = 0$, но $\nabla U_n^0(x^0) \neq 0$ в точке $x^0 \in \varpi$, то правая часть (5.12) становится отрицательной и не позволяет идентифицировать собственное число около нижнего края лакуны. В то же время, как и в п. 1 §5, можно попытаться при помощи незначительной модификации рассуждений найти собственное число около верхнего края лакуны.

Аналогичные асимптотические результаты можно вывести и для задач об упругих волноводах с малыми дефектами (ср. работу [50]), причем вместо матрицы присоединенных масс $M(\omega)$ в формулах фигурирует матрица упругой поляризации дефекта (см. [51] и др.).

5.3. Кумулятивное свойство. Волноводу можно придать множественные сингулярные возмущения границы образованием полостей, каверн и наростов около точек $x^{01}, \dots, x^{0J} \in \bar{\Pi}$ (см. рис. 1, с, где $J = 2$). Нетрудно убедиться в том, что согласно описанным выше вариантам асимптотического анализа вносимые каждым из введенных возмущений суммируются в правых частях систем (3.37), (2.11) и уравнения (5.12). В результате посредством распределения точек x^{01}, \dots, x^{0J} и подбора форм $\omega^0, \dots, \omega^J$ возмущений (1.1) или (5.1) можно добиться нужных свойств положительности/отрицательности коэффициентов в правых частях (3.37), (2.11) и (5.12) и тем самым обеспечить возникновение собственных чисел около нижнего/верхнего края лакуны. При этом для уравнивания асимптотических вкладов полостей с диаметрами $O(\varepsilon)$ каверны или наросты должны иметь размер $O(\varepsilon^{1-2/d})$ в случае $d \geq 3$ (ср. анзацы (3.1) и (3.44)). Для двумерной задачи полость придает возмущение порядка $|\ln \varepsilon|^{-2}$, а каверны и наросты – порядка ε^4 (см. формулы (4.11), (4.10)) и (3.44) в п. 2 §4 и п. 1 §5). Таким образом, при малом ε появление в плоском волноводе внутренних отверстий (1.1) полностью препятствует образованию точек дискретного спектра около верхних краев открытых лакун даже при нескольких наростах высотой $O(\varepsilon^\kappa)$, $\kappa > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. М., Наука, 1973.

2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Л., изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
3. A. V. Sobolev, J. Walthoe, *Absolute continuity in periodic waveguides*. — Proc. London Math. Soc. **85**, No. 1 (2002), 717–741.
4. Т. А. Суслина, Р. Г. Штернберг, *Абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера с метрикой в двумерном периодическом волноводе*. — Алгебра и Анализ. **13**, No. 2 (2002), 159–206.
5. И. В. Качковский, Н. Д. Филонов, *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в многомерном цилиндре*. — Алгебра и Анализ. **21**, No. 1 (2009), 133–152.
6. И. М. Гельфанд, *Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами*. — Доклады АН СССР **73** (1950), 1117–1120.
7. С. А. Назаров, *Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре*. — Известия АН СССР. Серия матем. **45**, No. 1 (1981), 101–112.
8. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*. М., Наука, 1991.
9. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. М., Мир, 1972.
10. М. М. Скриганов, *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*. — Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **171** (1985), 122.
11. P. Kuchment, *Floquet theory for partial differential equations*. Basel: Birkhäuser, 1993.
12. П. А. Кучмент, *Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных*. — Успехи матем. наук **37**, No. 4 (1982), 3–52.
13. P. Kuchment, *The mathematics of photonic crystals. Ch. 7 in Mathematical Modeling in Applied Mathematics*, SIAM **22** (2001), 207–272.
14. S. A. Nazarov, *Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domain Sobolev Spaces in Mathematics. V. II (Maz'ya V., Ed.) — International Mathematical Series* **9** (2008), 261–309.
15. W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon, *Weakly coupled bound states in quantum waveguides*. — Proc. Amer. Math. Soc. **125**, No. 8 (1997), 1487–1495.
16. В. В. Грушин, *О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях*. — Матем. заметки **72**, No. 3 (2004), 360–371.
17. Р. Р. Гадильшин, *О локальных возмущениях квантовых волноводов — Теоретическая и математическая физика* **145**, No. 3 (2005), 358–371.
18. Д. И. Борисов, *Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном*. — Матем. сборник **197**, No. 4 (2006), 3–32.
19. С. А. Назаров, *Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра*. — Сибирск. матем. журнал **51**, No. 5 (2010), 1086–1101.
20. M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, *Discrete negative spectrum under non-regular perturbations (polyharmonic operators, Schrödinger operators, with a magnetic*

- fields, periodic operators*). — Rigorous Results in Quantum Dynamics (Liblice, 1990), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991, pp. 25–36.
21. М. Ш. Бирман, *Дискретный спектр периодического оператора Шредингера, возмущенного убывающим потенциалом*. — Алгебра и Анализ **8**, No. 1 (1996), 3–20.
 22. M. Sh. Birman, *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations*. — Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization. Math. Top., Akademie Verlag, Berlin, **8** (1995), 334–352.
 23. М. Ш. Бирман, *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шредингера. II. Нерегулярные возмущения*. — Алгебра и Анализ **9**, No. 6 (1997), 62–89.
 24. A. Figotin, A. Klein, *Midgap defect modes in dielectric and acoustic media*. — SIAM J. Appl. Math. **58**, No. 6 (1998), 1748–1773.
 25. H. Ammari, F. Santosa, *Guided Waves in a Photonic Bandgap Structure with a Line Defect*. — SIAM Journal on Applied Mathematics **64**, No. 6 (2004), 2018–2033.
 26. D. Miao, F. Ma, *On guided waves created by line defects*. — J. Stat. Phys. **130** (2008), 1197–1215.
 27. С. А. Назаров, *Лакуны и собственные частоты в спектре периодического акустического волновода*. — Акустический журнал **59**, No. 3 (2013), 312–321.
 28. B. M. Brown, V. Hoang, M. Plum, I. Wood, *Spectrum created by line defects in periodic structures*. — Math. Nachr. **287** (2014), 1972–1985.
 29. С. А. Назаров, *Ограниченные решения в Т-образном волноводе и спектральные свойства лестницы Дирихле*. — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **54**, No. 8 (2014), 1299–1318.
 30. B. Delourme, S. Fliss, P. Joly, E. Vasilevskaya, *Trapped modes in thin and infinite ladder like domains. Part 1: Existence results*. — Asymptotic Analysis **103**, No. 3 (2017), 103–134.
 31. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных чисел в спектральных лакунах при регулярном возмущении стенок периодического волновода*. — Проблемы матем. анализа. Новосибирск **89** (2017), 63–98.
 32. С. А. Назаров, *Почти стоячие волны в периодическом волноводе с резонатором и околоторговые собственные числа*. — Алгебра и анализ **28**, No. 3 (2016), 111–160.
 33. D. V. Evans, M. Levitin, D. Vasil'ev, *Existence theorems for trapped modes*. — J. Fluid Mech. **261** (1994), 21–31.
 34. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода*. — Теоретическая и матем. физика **167**, No. 2 (2011), 239–262.
 35. С. А. Назаров, *Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода*. — Функциональный анализ и его приложения **47**, No. 3 (2013), 37–53.
 36. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию несамосопряженных операторов*. М., Наука, 1965.

37. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*. М., Наука, 1969.
38. W. G. Mazja, S. A. Nazarov, V. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten*. — Berlin: Akademie-Verlag **1** (1991).
39. М. Д. Ван Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей*. М., Мир, 1967.
40. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М., Наука, 1989.
41. С. А. Назаров, *Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода*. — Матем. заметки **87**, No. 5 (2010), 764–786.
42. F. L. Bakharev, S. A. Nazarov, K. M. Ruotsalainen, *A gap in the spectrum of the Neumann–Laplacian on a periodic waveguide*. — Appl. Analysis **88** (2012), 1–17.
43. D. Borisov, K. Pankrashkin, *Quantum waveguides with small periodic perturbations: gaps and edges of Brillouin zones*. — J. Physics A: Mathematical and Theoretical **46**, No. 23 (2013), 235–203.
44. С. А. Назаров, *Асимптотика спектральных лагун в регулярно возмущенном периодическом волноводе*. — Вестник СПбГУ. Сер. 1, **2**, No. 7 (2013), 54–63.
45. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями*. — Известия АН СССР. Серия матем. **48**, No. 2 (1984), 347–371.
46. Г. Поляк, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*. М., Физматгиз, 1962.
47. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*. М., Наука, 1966.
48. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
49. С. А. Назаров, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач с периодическими коэффициентами*. — Вестник ЛГУ. Серия 1, **3**, No. 15 (1985), 16–22.
50. С. А. Назаров, *Асимптотика частот упругих волн, захваченных малой трещиной в цилиндрическом волноводе*. — Механика твердого тела No. 6 (2010), 112–122.
51. S. A. Nazarov, M. Specovius-Neugebauer, J. Sokolowski, *Polarization matrices in anisotropic heterogeneous elasticity*. — Asymptotic Analysis **68**, No. 4 (2010), 189–249.

Nazarov S. A. Asymptotics of eigenvalues in spectral gaps of periodic waveguides with small singular perturbations.

We study asymptotics of eigenvalues appearing near the lower edge of a spectral gap of the Dirichlet problem for the Laplace operator in d -dimensional periodic waveguide with the singular perturbation of the boundary by creating a hole with a small diameter ε is studied. Several versions of the structure of the gap edge are considered. As usual the

asymptotic formulas are different in the cases $d \geq 3$ and $d = 2$ where eigenvalues occur at the distances $O(\varepsilon^{2(d-2)})$ or $O(\varepsilon^{2d})$ and $O(|\ln \varepsilon|^{-2})$ or $O(\varepsilon^4)$, respectively, from the gap edge. Other types of singular perturbation of the waveguide surface and other types of boundary conditions are discussed which provide the appearance of eigenvalues near both edges of one or several gaps.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Старый Петергоф, 198504 С.-Петербург;
ИпМАШ РАН,
Большой пр., 61, В.О.
199178 С.-Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 20 августа 2018 г.