

М. А. Лялинов

**ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ГЕЛЬМГОЛЬЦА В МНОГОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ
СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ИДЕАЛЬНЫМИ
КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Посвящается памяти А. П. Качалова

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние волн в областях с многоугольной границей имеет многочисленные приложения, причем, в клиновидных областях часто используется техника Зоммерфельда–Малюжинца, [1, 2]. Однако, лишь недавно появились содержательные новые подходы исследования таких задач. Среди наиболее интересных стоит отметить обобщение подхода Зоммерфельда–Малюжинца, см. [3]. В нашей недавней работе мы обсуждали еще один подход к задачам такого сорта, который основан на применении преобразования Конторовича–Лебедева (КЛ) в его комплексной форме и редукции к интегральным уравнениям в “спектральной” области, [4]. Мы также изучали асимптотику дальнего рассеянного поля, в частности, получили интегральное представление для дифракционного коэффициента круговой (цилиндрической) волны. В настоящей работе мы продолжаем эти исследования, строим функцию Грина в многоугольной области с помощью упомянутого подхода.

1.1. Постановка задачи. Рассматриваемая область Ω может быть представлена как композиция из трех клиньев (углов) Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 в R^2 (Рис.1), имеющих общие части границы Σ'_2 и Σ'_3 , которые являются естественным продолжением конечных сегментов Σ_2 и Σ_3 многоугольной границы области Ω . Функция Грина в Ω решает уравнение Гельмгольца с $-\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$ в правой части ($\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = (x - x_0, y - y_0)$), удовлетворяет условию Дирихле на границе $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$,

Ключевые слова: функция Грина, многоугольная область, интегральные уравнения, асимптотика.

Работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ, No. 17-01-00668а.

условиям Мейкснера в угловых точках A_1, A_2, A_3 и условиям излучения (Зоммерфельда) на бесконечности.

Пользуясь специальной формой области Ω , ее композицией из трех угловых областей, мы переформулируем задачу в следующем эквивалентном виде. Введем полярные координаты (r, φ) в Ω_1 с началом A_1 полярной оси, совпадающей с бисектриссой угла Ω_1 так, что

$$\Omega_1 = \{(r, \varphi) : r > 0, |\varphi| < \Phi\}, \quad 2\Phi > \pi.$$

Таким же образом, мы введем полярные координаты (ρ, ψ) в Ω_2 с началом в A_2 и полярной осью – бисектриссой в Ω_2 так, что

$$\Omega_2 = \{(\rho, \psi) : \rho > 0, |\psi| < \Psi\}$$

и полярные координаты (R, χ) в Ω_3 с началом в A_3 и осью – бисектриссой в Ω_3 так, что

$$\Omega_3 = \{(R, \chi) : R > 0, |\chi| < \Xi\}.$$

Обозначим компоненты границы $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ и Σ_4 , где $\Sigma_{2,3}$ конечные сегменты, A_1A_2 длины a и A_2A_3 длины b . Отметим, что $U + U_i$ – рассеянное плюс падающее поля в Ω_1 и V, W – полное поле в $\Omega_{2,3}$ соответственно. Волновое число в Ω обозначим k . Уравнения для полей имеют вид

$$(\Delta + k^2)(U + U_i) = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \quad \mathbf{R} \in \Omega_1, \quad (1)$$

$$(\Delta + k^2)V = 0 \quad \mathbf{R} \in \Omega_2, \quad (2)$$

$$(\Delta + k^2)W = 0 \quad \mathbf{R} \in \Omega_3. \quad (3)$$

Волновое поле возбуждается источником

$$U_i(r, r_0; \varphi, \varphi_0) = \frac{K_0(-ik\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|)}{2\pi},$$

где $K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} H_\nu^{(1)}(iz)$ функция Макдональда, $\mathbf{R} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, и $\mathbf{R}_0 = (r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0)$ описывают соответственно положение точки наблюдения и точки источника. Считаем, что источник расположен так, что освещается лишь компонента Σ_1 границы. Другие случаи расположения источника изучаются аналогично. В частности, если освещены обе бесконечные компоненты границы Σ_1 и Σ_2 , в асимптотике рассеянного поля присутствуют отраженные волны от обеих компонент Σ_1 и Σ_2 .

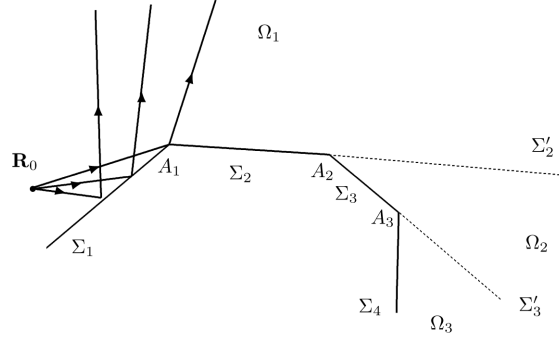


Рис. 1. Дифракция в области с многоугольной границей.

На многоугольной границе $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ полное поле равно нулю

$$U + U_i|_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = 0, \quad (4)$$

$$V|_{\Sigma_3} = 0, \quad (5)$$

$$W|_{\Sigma_4} = 0, \quad (6)$$

тогда как на полубесконечных линиях контакта областей имеем (непрерывность полей и их нормальных производных)

$$U + U_i|_{\Sigma'_2} = V|_{\Sigma'_2}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(U + U_i)}{\partial\varphi} \Big|_{\Sigma'_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial\psi} \Big|_{\Sigma'_2}, \quad (8)$$

$$V|_{\Sigma'_3} = W|_{\Sigma'_3}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial\varphi} \Big|_{\Sigma'_3} = \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial\chi} \Big|_{\Sigma'_3}. \quad (10)$$

Условие Мейкснера, например, в угловой точке A_1 имеет вид

$$(U + U_i)(r, \varphi) = O(r^{\delta_1}), \quad (11)$$

равномерно по угловым переменным, $\delta_1 > 0$. Похожие условия выполнены вблизи точек $A_{2,3}$. На бесконечности удовлетворяются условия

излучения

$$\int_{S_{r_1}} \left| \frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right|^2 ds \rightarrow 0, \quad r_1 \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$\int_{S_{\rho_1}} \left| \frac{\partial V}{\partial \rho} - ikV \right|^2 ds \rightarrow 0, \quad \rho_1 \rightarrow \infty, \quad (13)$$

$$\int_{S_{R_1}} \left| \frac{\partial W}{\partial \rho} - ikW \right|^2 ds \rightarrow 0, \quad R_1 \rightarrow \infty, \quad (14)$$

где S_{r_1} , S_{ρ_1} , S_{R_1} дуги окружностей в Ω_1, Ω_2 и Ω_3 соответственно с центрами в вершинах углов A_1, A_2, A_3 . Можно показать, что классическое решение однородной задачи (1)–(14) (с нулем в правой части уравнения) тривиально.

В последующем нам важно иметь возможность варьировать аргумент волнового числа k так, что

$$|\arg(-ik)| < \pi/2 \quad (15)$$

и использовать аналитическое продолжение формул по волновому числу вплоть до $\arg(-ik) = \pi/2$.

§2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ

В редукции задачи мы будем пользоваться преобразованием Конторовича-Лебедева (КЛ) [5, 6], в частности, его комплексной формой, см. Приложение в [7]. Рассмотрим интегральное представление Конторовича-Лебедева для падающего поля (от точечного источника)

$$U_i(r, r_0; \varphi, \varphi_0) = \frac{K_0(-ik\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|)}{2\pi} = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) u_\nu^i(\varphi) d\nu, \quad (16)$$

где

$$u_\nu^i(\varphi) = \frac{K_\nu(-ikr_0)}{2\pi} \cos(\nu[\pi - |\varphi - \varphi_0|]), \quad (17)$$

$iR = (-i\infty, i\infty)$. Ввиду выражения (17) и асимптотики

$$K_\nu(-ikr) \sim C|\nu|^{a_0-1/2} \frac{\cos(\nu[\pi/2 + |\arg(-ikr)|])}{\sin \pi\nu}, \quad \nu \rightarrow i\infty, \quad a_0 = \operatorname{Re} \nu$$

мы можем утверждать, что интеграл (16) сходится при

$$|\varphi - \varphi_0| > 2|\arg(-ik)|,$$

что в дальнейшем подразумевается.

Неизвестное волновое поле удовлетворяет уравнениям (1)–(3) и ищется в виде (разделение переменных)

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) u_\nu(\varphi) d\nu, \quad (18)$$

в Ω_1 ,

$$V(\rho, \psi) = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikN\rho) v_\nu(\psi) d\nu, \quad (19)$$

в Ω_2 и

$$W(R, \chi) = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikR) w_\nu(\chi) d\nu, \quad (20)$$

в Ω_3 .

Отметим, проверка условий Мейкснера на ребрах может быть выполнена посредством преобразований аналогичным тем, что обсуждаются в конце параграфа 5.2.2 в [2].

Чтобы удовлетворить уравнениям Гельмгольца, подчиним $u_\nu(\varphi)$, $v_\nu(\psi)$ и $w_\nu(\chi)$ (“спектральные” функции) уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \nu^2 \right) u_\nu(\varphi) &= 0, & \left(\frac{d^2}{d\psi^2} + \nu^2 \right) v_\nu(\psi) &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{d\chi^2} + \nu^2 \right) w_\nu(\chi) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

так как $K_\nu(z)$ решение уравнения Бесселя

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right) K_\nu(z) = 0.$$

Решение уравнений (21) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_\nu(\varphi) &= \left(-\frac{u_\nu(-\Phi)}{\sin(2\Phi\nu)} - \frac{u_\nu^i(\Phi)}{\sin(2\Phi\nu)} \cos(2\Phi\nu) \right) \\ &\quad \times \sin(\nu[\varphi - \Phi]) - u_\nu^i(\Phi) \cos(\nu[\varphi - \Phi]), \end{aligned} \quad (22)$$

$$v_\nu(\psi) = v_\nu(\Psi) \frac{\sin(\nu[\psi + \Psi])}{\sin(2\Psi\nu)} + v_\nu(-\Psi) \frac{\sin(\nu[-\psi + \Psi])}{\sin(2\Psi\nu)}, \quad (23)$$

$$w_\nu(\chi) = w_\nu(\Xi) \frac{\sin(\nu[\chi + \Xi])}{\sin(2\nu\Xi)}, \quad (24)$$

отмечая, что такой выбор позволяет удовлетворить также краевым условиям на Σ_1 и Σ_4 . Коэффициенты $u_\nu(-\Phi)$, $v_\nu(\Psi)$, и $v_\nu(-\Psi)$, $w_\nu(\Xi)$ пока остаются неизвестными. Именно для этих неизвестных мы получим интегральные уравнения.

Спектральные функции являются очевидно четными по ν и предполагаются регулярными в некоторой окрестности мнимой оси. Мы также предполагаем справедливость следующих оценок ($|\varphi| \leq \Phi$)

$$|u_\nu(\varphi)| < \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \min_{\varphi} \left\{ \left| e^{-i\nu[|\arg(-ik)| + \pi/2 - |2\Phi - \varphi - \varphi_0|]} \right| \right\}, \quad (25)$$

$\nu \rightarrow i\infty$,

$$\int_{iR} |v_\nu(\psi)| |d\nu| < C, \quad |\psi| \leq \Psi \quad (26)$$

и

$$\int_{iR} |w_\nu(\chi)| |d\nu| < C, \quad |\chi| \leq \Xi. \quad (27)$$

Константы в этих оценках не зависят от углов.

Оценки (25), (26), (27) ограничивают поведение спектральных функций на бесконечности. Данные неравенства мотивированы ожидаемым поведением спектральных функций при $\nu \rightarrow i\infty$. Оценка (25) следует из геометрикооптических рассмотрений отраженного поля. Например, волна отраженная от поверхности $\varphi = \Phi$ порождается мнимым источником в (r_0, φ_*) (зеркальный образ реального источника относительно $\varphi = \Phi$, где $\varphi_* = 2\Phi - \varphi_0$) и задается

$$\begin{aligned} U_*(r, r_0; \varphi, \varphi_*) &= -\frac{K_0(-ik\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_*\|)}{2\pi} \\ &= -\frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) u_\nu^*(\varphi) d\nu, \end{aligned} \quad (28)$$

причем

$$u_\nu^*(\varphi) = \frac{K_\nu(-ikr_0)}{2\pi} \cos(\nu[\pi - |\varphi - \varphi_*|]) \quad (29)$$

с оценкой

$$|u_\nu^*(\varphi)| \sim \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \left| e^{-i\nu[|\arg(-ik)| + \pi/2 - |2\Phi - \varphi - \varphi_0|]} \right|, \quad \nu \rightarrow i\infty.$$

Сходимость интеграла в (18) гарантирована при условии

$$|2\Phi - \varphi - \varphi_0| > 2|\arg(-ik)|.$$

Ограничения (26), (27) мотивированы следующими соображениями. Ввиду условий излучения в областях Ω_2, Ω_3 в асимптотике дальнего рассеянного поля присутствует лишь круговая (цилиндрическая) волна вида $D \frac{\exp(ik\|\mathbf{R}\|)}{\sqrt{-ik\|\mathbf{R}\|}} (1 + O(\|\mathbf{R}\|^{-1}))$, поэтому, заменяя, например, в (20) функцию Макдональда ее асимптотикой, приходим к выражению дальнего поля

$$W(R, \chi) \sim \frac{C_w}{i\pi} \frac{\exp\{ikR\}}{\sqrt{ikR}} \int_{iR} w_\nu(\chi) d\nu,$$

что подразумевает справедливость оценки (27).

2.1. Интегральные соотношения эквивалентные краевым условиям на $\Sigma_2, \Sigma'_2, \Sigma_3$ и Σ'_3 . Воспользуемся краевыми условиями на $\Sigma_2, \Sigma'_2, \Sigma_3$ и Σ'_3 предполагая, что $\arg(k)$ изменяется надлежащим образом для обеспечения сходимости соответствующих интегралов КЛ при $\varphi = -\Phi, \psi = \Psi$ и $\chi = \Xi$. Таким образом, из краевых условий (4) на Σ_2 имеем

$$\frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) (u_\nu(-\Phi) + u_\nu^i(-\Phi)) d\nu = 0, \quad 0 < r < a \quad (30)$$

и, таким же образом, из условий (7) и (8) мы можем написать

$$\frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) (u_\nu(-\Phi) + u_\nu^i(-\Phi)) d\nu = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ik\rho) v_\nu(\Psi) d\nu, \\ \text{при } r > a, \rho = r - a > 0 \quad (31)$$

и

$$\frac{1}{i\pi} \int_{iR} \frac{K_\nu(-ikr)}{r} \left(\left(-\frac{u_\nu(-\Phi)}{\sin(2\Phi\nu)} - u_\nu^i(\Phi) \frac{\cos(2\Phi\nu)}{\sin(2\Phi\nu)} \right) \nu \cos(2\Phi\nu) \right. \\ \left. - u_\nu^i(-\Phi) \nu \sin(2\Phi\nu) \right) d\nu \quad (32)$$

$$= \frac{1}{i\pi} \int_{iR} \frac{K_\nu(-ik\rho)}{\rho} \left(v_\nu(\Psi) \frac{\nu \cos(2\Psi\nu)}{\sin(2\Psi\nu)} + v_\nu(-\Psi) \frac{\nu}{\sin(2\Psi\nu)} \right) d\nu, \\ \text{при } r > a, \rho = r - a > 0. \quad (33)$$

Условия (30) и (31) могут быть представлены в объединенной форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikr) (u_\nu(-\Phi) + u_\nu^i(-\Phi)) d\nu \\ = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} H(\rho) K_\nu(-ik\rho) v_\nu(\Psi) d\nu, \quad \text{при } r > 0, \end{aligned} \quad (34)$$

где $H(\rho)$ функция Хевисайда, $r = \rho + a$.

Обратимся к краевым условиям на Σ_3 и Σ'_3 ,

$$\frac{1}{i\pi} \int_{i\rho} K_\nu(-ik\rho) v_\nu(-\Psi) d\nu = 0, \quad 0 < \rho < b, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} \int_{i\rho} K_\nu(-ik\rho) v_\nu(-\Psi) d\nu = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} K_\nu(-ikR) w_\nu(\Xi) d\nu, \\ \text{при } \rho > b, \rho = R + b, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} \int_{iR} \frac{K_\nu(-ik\rho)}{\rho} \left(v_\nu(\Psi) \frac{\nu}{\sin(2\Psi\nu)} - v_\nu(-\Psi) \frac{\nu \cos(2\Psi\nu)}{\sin(2\Psi\nu)} \right) d\nu \\ = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} \frac{K_\nu(-ikR)}{R} w_\nu(\Xi) \frac{\nu \cos(2\Psi\nu)}{\sin(2\Psi\nu)} d\nu, \text{ при } \rho > b, \rho = R + b. \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая (35) и (36), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} \int_{i\rho} K_\nu(-ik\rho) v_\nu(-\Psi) d\nu = \frac{1}{i\pi} \int_{iR} H(R) K_\nu(-ikR) w_\nu(\Xi) d\nu, \\ \text{при } \rho > 0, \rho = R + b. \end{aligned} \quad (38)$$

§3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ НЕИЗВЕСТНЫХ $u_\nu(-\Phi)$, $v_\nu(\pm\Psi)$ И $w_\nu(\Xi)$

Дальнейшее преобразование условий (32), (34), (37) и (38) связано со свойствами преобразования Конторовича–Лебедева, т. е. с возможностью обращения прямого преобразования К.Л. Существуют несколько

подходов, связанных с теорией преобразования Конторовича–Лебедева. Один из них, обсуждаемый в приложении [7] (см. также [2], параграф 1.4.4), основан на комплексной форме преобразования и использует возможность варьировать $\arg(k)$ как отмечалось выше. Альтернативные подходы рассматриваются в работах [5, 6].

Воспользуемся условием “ортогональности” для функций Макдональда

$$\lim_{w \rightarrow 0+} \frac{(-k)^\nu \sin \pi \nu}{(i\pi)^2} \int_0^\infty K_\nu(-ik\rho) K_\mu(-ik\rho) (-ik\rho)^{-1+w} d\rho = \frac{\delta(\mu - \nu) + \delta(\mu + \nu)}{2}, \quad (39)$$

где $\delta(\cdot)$ дельта-функция Дирака на мнимой оси ($\delta(\mu) = \delta(\text{Im}\mu)/i$), а предел понимается в смысле обобщенных функций (см., например, [2], параграф 1.4.4).

Умножим обе части уравнения (34) на

$$\frac{(-k)}{i\pi} K_\mu(-ikr) (-ikr)^{-1+w}$$

и проинтегрируем по $r \in (0, \infty)$. В левой части перейдем к пределу при $w \rightarrow 0+$ и используем (39), получим

$$\frac{u_\mu(-\Phi) + u_\mu^i(-\Phi)}{\mu \sin \pi \mu}.$$

В правой части введем новую переменную интегрирования $r = \rho + a$, поменяем порядок интегрирования по r и ν , что оправдано, затем перейдем к пределу. После преобразований в обеих частях приходим к интегральному уравнению

$$\frac{u_\mu(-\Phi) + u_\mu^i(-\Phi)}{\cos(\pi\mu/2)} = \int_{iR} P(\mu, \nu; a) \frac{v_\nu(\Psi)}{\cos(\pi\nu/2)} d\nu \quad (40)$$

причем

$$P(\mu, \nu; a) = \frac{(-k)2\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \cos \frac{\pi\nu}{2}}{(i\pi)^2} \int_0^\infty \frac{K_\mu(-ik[\rho + a]) K_\nu(-ik\rho)}{(-ik[\rho + a])} d\rho, \quad (41)$$

где интеграл сходится равномерно по μ и ν и задает голоморфную функцию по переменным μ и ν в некоторой полосе каждая, содержащей мнимую ось.

Важно отметить, что $P(\mu, \nu; a)$ может быть представлено в упрощенной форме, ($z = -ika$)

$$P(\mu, \nu; a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\infty} d\tau e^{-z \cosh \tau} [\cosh([\mu - \nu]\tau) - \cosh([\nu + \mu]\tau)]$$

или (см. [8], 8.432(1), $|\arg z| < \pi/2$)

$$P(\mu, \nu; a) = \frac{K_{\mu-\nu}(z) - K_{\mu+\nu}(z)}{2i\pi}, \quad z = -ika. \quad (42)$$

Соответствующие вычисления непосредственно следуют из Приложения в нашей статье [4].

Совершенно аналогично с проделанным выше умножим обе части в (32) на

$$\frac{(-k)}{i\pi} K_{\mu}(-ik\rho)(-ik\rho)^w/(-ik)$$

проинтегрируем по $\rho \in (0, \infty)$, поменяем порядок интегрирования и, затем, перейдем к пределу при $w \rightarrow 0+$ и используем (39). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{v_{\mu}(\Psi)}{\cos(\pi\mu/2)} + \frac{v_{\mu}(-\Psi)}{\cos(\pi\mu/2)} \frac{1}{\cos(2\Psi\mu)} &= \int_{iR} d\nu Q(\mu, \nu; a) \frac{\nu \sin(2\Psi\mu)}{\mu \cos(2\Psi\mu)} \\ &\times \left(-\frac{u_{\nu}(-\Phi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{\cos(2\Phi\nu)}{\sin(2\Phi\nu)} - \frac{u_{\nu}^i(\Phi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{1}{\sin(2\Phi\nu)} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$Q(\mu, \nu; a) = \frac{(-k)2\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \cos \frac{\pi\nu}{2}}{(i\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{K_{\nu}(-ik[\rho + a]) K_{\mu}(-ik\rho)}{(-ik[\rho + a])} d\rho. \quad (44)$$

Очевидно, что

$$\frac{P(\mu, \nu; a)}{2\mu \sin \frac{\pi\mu}{2} \cos \frac{\pi\nu}{2}} = \frac{Q(\nu, \mu; a)}{2\nu \sin \frac{\pi\nu}{2} \cos \frac{\pi\mu}{2}}. \quad (45)$$

Обратимся к (38) и (37). Умножая обе части равенства (38) на $\frac{(-k)}{i\pi} K_\mu(-ik\rho)(-ik\rho)^w/(-ik\rho)$, после стандартных вычислений находим

$$\frac{v_\mu(-\Psi)}{\cos(\pi\mu/2)} = \int_{iR} P(\mu, \nu; a) \frac{w_\nu(\Xi)}{\cos(\pi\nu/2)} d\nu. \quad (46)$$

Умножим обе части уравнения (37) на

$$\frac{(-k)}{i\pi} K_\mu(-ikR)(-ik)^{-1+w}$$

и проинтегрируем по $R \in (0, \infty)$, переставим порядки интегрирования, перейдем к пределу при $w \rightarrow 0+$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{w_\mu(\Xi)}{\cos(\pi\mu/2)} &= \int_{iR} Q(\mu, \nu; a) \frac{\nu \sin(2\Xi\mu)}{\mu \cos(2\Xi\mu)} \\ &\times \left(\frac{v_\nu(\Psi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{1}{\sin(2\Psi\nu)} - \frac{v_\nu(-\Psi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{\cos(2\Psi\nu)}{\sin(2\Psi\nu)} \right) d\nu. \end{aligned} \quad (47)$$

В уравнении (43) воспользуемся для $\frac{v_\mu(-\Psi)}{\cos(\pi\mu/2)}$ выражением из (46), тогда (43) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{v_\mu(\Psi)}{\cos(\pi\mu/2)} &= \int_{iR} d\nu \left\{ Q(\mu, \nu; a) \frac{\nu \sin(2\Psi\mu)}{\mu \cos(2\Psi\mu)} \left(-\frac{u_\nu(-\Phi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{\cos(2\Phi\nu)}{\sin(2\Phi\nu)} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{u_\nu^i(\Phi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{1}{\sin(2\Phi\nu)} \right) - P(\mu, \nu; a) \frac{w_\nu(\Xi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{1}{\cos(2\Psi\mu)} \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Введем обозначения обозначения

$$p(\mu) = \frac{u_\mu(-\Phi)}{\cos(\pi\mu/2)}, \quad q(\mu) = \frac{v_\mu(\Psi)}{\cos(\pi\mu/2)},$$

$$s(\mu) = \frac{v_\mu(-\Psi)}{\cos(\pi\mu/2)}, \quad t(\mu) = \frac{w_\mu(\Xi)}{\cos(\pi\mu/2)}$$

и представим систему интегральных уравнений в виде

$$\begin{aligned}
 p(\mu) &= \int_{iR} d\nu P(\mu, \nu; a) q(\nu) + p_i(\mu), \\
 q(\mu) &= \int_{iR} d\nu \left(-Q(\mu, \nu; a) \frac{\nu \sin(2\Psi\mu)}{\mu \cos(2\Psi\mu)} \frac{\cos(2\Phi\nu)}{\sin(2\Phi\nu)} p(\nu) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{P(\mu, \nu; b)}{\cos(2\Psi\mu)} t(\nu) \right) + q_i(\mu), \\
 s(\mu) &= \int_{iR} d\nu P(\mu, \nu; b) t(\nu), \\
 t(\mu) &= \int_{iR} d\nu Q(\mu, \nu; b) \frac{\nu \sin(2\Xi\mu)}{\mu \cos(2\Xi\mu)} \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{\sin(2\Psi\nu)} q(\nu) - \frac{\cos(2\Psi\nu)}{\sin(2\Psi\nu)} s(\nu) \right),
 \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned}
 p_i(\mu) &= -\frac{u_\mu^i(-\Phi)}{\cos(\pi\mu/2)}, \\
 q_i(\mu) &= -\int_{iR} d\nu Q(\mu, \nu; N, a) \frac{\nu \sin(2\Psi\mu)}{\mu \cos(2\Psi\mu)} \left(\frac{u_\nu^i(\Phi)}{\cos(\pi\nu/2)} \frac{1}{\sin(2\Phi\nu)} \right).
 \end{aligned}$$

Ввиду оценки (25) мы можем утверждать, что

$$|p(\nu)| < \frac{C}{\sqrt{|\nu|}} \left| e^{-i\nu[|\arg(-ik)| - |3\Phi + \varphi_0|]} \right|,$$

$\nu \rightarrow i\infty$ и, следовательно, $p(\cdot)$ принадлежит $L_2(iR)$ при условии

$$|3\Phi + \varphi_0| > |\arg(-ik)|.$$

Оценки (26), (27) показывают, что $q(\cdot), s(\cdot), t(\cdot)$ также как и $p(\cdot)$ естественно искать в классе $L_2(iR)$, причем эти функции голоморфны в некоторой окрестности мнимой оси.

Систему интегральных уравнений запишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & 0 & 0 & K_{24} \\ 0 & 0 & 0 & K_{34} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$h = Kh + h_i, \quad (50)$$

где определения выражений для ядер интегрального оператора, h, h_i в (50) следуют из (49).

Мы не рассматриваем здесь фредгольмовость системы уравнений (49) или (50), следуя в этом смысле лишь формальной подходу, считая что система интегральных уравнений однозначно разрешима. Для изучения свойств системы можно воспользоваться результатами работы [9].

§4. АСИМПТОТИКА ДАЛЬНОГО ПОЛЯ

Мы рассмотрим асимптотику только для случая освещения падающим полем лишь стороны Σ_1 , (Рис. 1), полагая, что другие ситуации исследуются вполне аналогично. Существенным обстоятельством применения представлений Конторовича–Лебедева является то, что они в действительности используются для комплексных k и аналитическое продолжение этих представлений на вещественные k и $kr \rightarrow \infty$, а также создание численного алгоритма, требуют дополнительной работы. Однако, известная связь интеграла Конторовича–Лебедева с интегралом Зоммерфельда дает возможность отчасти преодолеть эти трудности. Похожий подход был эффективно использован для вычисления асимптотики дальнего поля при рассеянии на импедансных клиньях и конусах (см., например, [2]).

Воспользуемся стандартным выражением функции Макдональда в терминах функции Бесселя, таким образом, получим из (18)

$$\begin{aligned} U(r, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{iR} \frac{e^{i\pi\nu/2} J_{-\nu}(kr) - e^{-i\pi\nu/2} J_{\nu}(kr)}{\sin \pi\nu} u_{\nu}(\varphi) d\nu \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{iR} d\nu \int_{\gamma_-} d\alpha e^{-ikr \cos \alpha} \left(\frac{e^{i\nu\alpha} - e^{-i\nu\alpha}}{\sin \pi\nu} \right) u_{\nu}(\varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} d\alpha e^{-ikr \cos \alpha} \left\{ \int_{iR} d\nu \left(\frac{e^{i\nu\alpha} - e^{-i\nu\alpha}}{2 \sin \pi\nu} \right) u_{\nu}(\varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (51)$$

где мы использовали интегральное представление Зоммерфельда для функции Бесселя

$$J_\nu(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_-} d\alpha e^{-ikr - i\nu\alpha + i\pi\nu/2}$$

(см. Рис. 2 для γ_- для $k > 0$) и поменяли порядки интегрирования, что может быть оправдано. Считаем, что $u_\nu(\varphi)$ известна вследствие решения интегрального уравнения. Введем формальным равенством функцию

$$\Psi_-(\alpha, \varphi) = i \int_{iR} \frac{\sin \nu\alpha}{\sin \pi\nu} u_\nu(\varphi) d\nu$$

и, ввиду оценки (25), заключаем, что она регулярна в полосе

$$|\operatorname{Re}(\alpha)| < \pi/2 + d(\varphi, \varphi_0, \Phi) - |\arg(-ik)|$$

и $d(\varphi, \varphi_0, \Phi) = |2\Phi - \varphi - \varphi_0|$, причем, $\arg(-ik) \rightarrow -\pi/2$.

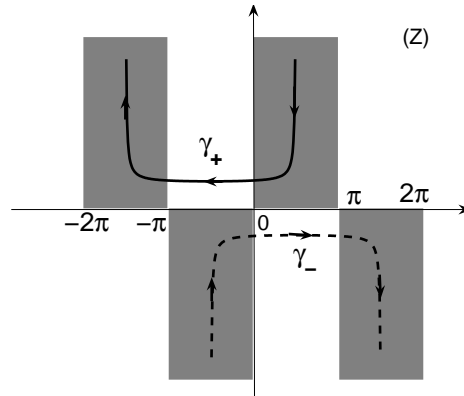


Рис. 2. Контуры Зоммерфельда.

Аналитическое продолжение функции $\Psi_-(\cdot, \varphi)$ на более широкую полосу также возможно. Результаты такого продолжения позволяют нам заключить, что функция $\Psi_-(\cdot, \varphi)$ также регулярна в верхней и нижней полуплоскости и имеет вещественные особенности, если $|\alpha| \geq$

$d(\varphi, \varphi_0, \Phi)$ при $k > 0$. $\Psi_-(\cdot, \varphi)$ нечетная функция α . Мы можем выписать представление Зоммерфельда волнового поля в Ω_1

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} d\alpha e^{-ikr \cos \alpha} \Psi_-(\alpha, \varphi). \quad (52)$$

Отметим, что аналогичные формулы могут быть получены для $V(\rho, \psi)$ в Ω_2 и $W(R, \chi)$ в Ω_3 .

Теперь мы обсудим способ вычисления асимптотики дальнего поля из интеграла Зоммерфельда (52) при $kr \rightarrow \infty$, $k > 0$. Деформируем контур γ_- в перевальные γ_π и γ_0 (рис. 3). В процессе такой деформации вещественные особенности $\Psi_-(\cdot, \varphi)$ (см. рис. 3) могут быть захвачены и приведут к геометрооптическим вкладам в дальнее поле (к отраженным волнам).

Однако, если $d(\varphi, \varphi_0, \Phi) > \pi$ никакие особенности не захватываются. Это соответствует той части области в Ω_1 , которая не освещена лучами отраженными от Σ_1 , (рис. 1). В соответствующих направлениях (вне окрестности предельного отраженного луча) имеется только цилиндрическая волна

$$U(r, \varphi) = \mathcal{Q}(\varphi; k) \frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}} \left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right), \quad (53)$$

где

$$\mathcal{Q}(\varphi; k) = -e^{-i\pi/2} \Psi_-(\pi, \varphi) = - \int_{iR} u_\nu(\varphi) d\nu \quad (54)$$

диаграмма рассеяния, которая задается значением трансформанты Зоммерфельда в седловой точке π . Отметим, что контур γ_0 не дает вклада в волновое поле, так как подынтегральное выражение является нечетной функцией и интеграл по γ_0 равен нулю.

Как уже отмечено, формула (54) для диаграммы рассеяния верна в подобласти в Ω_1 , где нет отраженных лучей и цилиндрическая волна является единственным вкладом в дальнее поле. Однако, интеграл в (54) расходится в областях, где $0 \leq |2\Phi - \varphi - \varphi_0| \leq \pi$, а соответствующий полюс $\Psi_-(\alpha, \varphi)$ захватывается контуром при деформации его в перевальный γ_π и дает вклад в виде отраженной от Σ_1 волны (см. (28)). Деформируя контур интегрирования в перевальные, имеем

$$U(r, \varphi) = U_{GO}(r, \varphi) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\pi} d\alpha e^{-ikr \cos \alpha} \Psi_-(\alpha, \varphi),$$

причем, интегральный член оценивается с помощью метода перевала, а вычет в точке $\alpha = 2\Phi - \varphi - \varphi_0$ дает

$$U_{GO}(r, \varphi) = -\frac{K_0(-ik\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_*\|)}{2\pi}.$$

Принимая во внимание старший член $u_\nu(\varphi)$ при $\nu \rightarrow i\infty$ (который ведет к расходимости интеграла для \mathcal{Q}), мы вычтем его из $u_\nu(\varphi)$. Для углов наблюдения φ , удовлетворяющих условию $\Phi - \varphi_0 < 2\Phi - \varphi - \varphi_0 < \pi - \epsilon$ ($\epsilon > 0$ малое), диаграмма рассеяния принимает вид

$$\mathcal{Q}(\varphi; k) = \frac{e^{-i\pi/4}}{i\sqrt{2\pi k}} \times \int_{iR} \left(u_\nu(\varphi) - \frac{(-K_\nu(-ikr_0))}{2\pi} \cos(\nu[\pi - |\varphi - (2\Phi - \varphi_0)|]) \right) d\nu.$$

В случае $2\Phi - \varphi - \varphi_0 \sim \pi$ точка наблюдения находится в полутени волны, отраженной от грани $\varphi = \Phi$, и последняя формула для диаграммы рассеяния становится неприменимой, а рассеянное поле описывается интегралом Френеля [1].

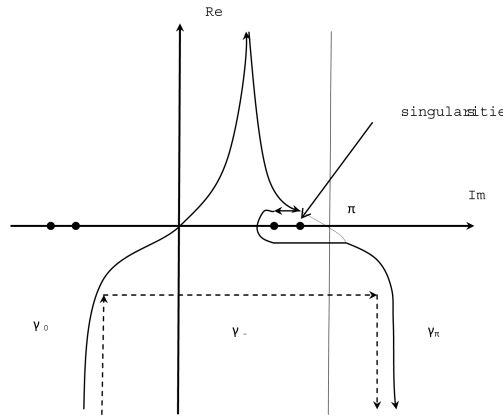


Рис. 3. Деформация контура интегрирования γ_- .

В областях Ω_2, Ω_3 дальше поле содержит лишь уходящую круговую волну, например, в Ω_2

$$V(\rho, \psi) = \mathcal{Q}_2(\psi; k) \frac{e^{ik\rho + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\rho}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k\rho}\right) \right), \quad (55)$$

где

$$\mathcal{Q}_2(\varphi; k) = - \int_{iR} v_\nu(\psi) d\nu. \quad (56)$$

Выражения (55), (56) могут быть получены также напрямую из представления Конторовича–Лебедева заменой функции Макдональда ее асимптотикой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov, *Diffraction Theory. The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique*. Alpha Sci. Ser. Wave Phenom. Alpha Science, Oxford (2008).
2. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions* (Mario Boella Series on Electromagnetism in Information & Communication). Edison, NJ, SciTech-IET (2012).
3. J.-M. L. Bernard, *A spectral approach for scattering by impedance polygons* — Q. J. Mech. Appl. Math. **59**, No. 4 (2006) 517–550.
4. M. A. Lyalinov, *Integral equations and the scattering diagram in the problem of diffraction by two contacting wedges with polygonal boundary*. — J. Math. Sci. **214**, No. 3, (2016) 322–336.
5. D. S. Jones, *The Kontorovich-Lebedev transform*. — J. Inst. Maths Appl. **26** (1980), 133–141.
6. А. Д. Авдеев, С. М. Грудский, *О модифицированном преобразовании Конторовича-Лебедева и его приложении к задаче дифракции цилиндрической волны на идеально проводящем клине*. — Радиотехника и электроника **39**, No. 7 (1994), 1081–1089.
7. J.-M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *Diffraction of acoustic waves by an impedance cone of an arbitrary cross-section*. — Wave Motion **33** (2001), 155–181.
8. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, 4th ed., Academic Press, Orlando, (1980).
9. Л. С. Раковщик, *Системы интегральных уравнений с почти разностными операторами*. — Сибирский Мат. Журнал **3**, No. 2, (1962) 250–255.

Lyalinov M. A. Green's function for the Helmholtz equation in a polygonal domain of special form with ideal boundary conditions.

A formal approach for the construction of the Green's function in a polygonal domain with the Dirichlet boundary conditions is proposed. The

complex form of the Kontorovich–Lebedev transform and reduction to a system of integral equations is exploited. The far-field asymptotics of the wave field is discussed.

С.-Петербургский государственный
университет,
Университетская наб. д. 7-9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: lyalinov@yandex.ru

Поступило 19 октября 2018 г.