

А. Я. Казаков

**“РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ” В МОДЕЛЬНЫХ
ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ДИФФРАКЦИИ. ФОРМАЛЬНАЯ
СХЕМА**

Посвящается памяти А. П. Качалова

§1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Теория высокочастотных волн занимает важное место в математической физике и многих областях прикладной физики-радиофизике, акустике, лазерной технике и т.п. Развернутое изложение соответствующего математического аппарата можно найти в известных книгах [1–3]. В этих книгах приведены основы асимптотических подходов к описанию высокочастотных волн в разных ситуациях. В частности, там обсуждаются локализованные решения, в том числе волны шепчущей галереи и волны, сосредоточенные в окрестности луча. Обзор физических приложений таких локализованных решений можно найти, например, в работе [4]. Методы, развитые в [1, 2], позволяют построить полное асимптотическое описание локализованной высокочастотной волны в том случае, если граница (или луч), вдоль которой распространяется волна, не имеет особенностей. Однако если геометрия задачи имеет особенности, подходы, изложенные в [1, 2], не дают возможности построить решение соответствующей начально-краевой задачи. Заметим, что рассматривать такие особые ситуации можно в рамках модельных ситуаций а затем, с помощью стандартных методов (“склейки” построенных решений), можно строить глобальные решения задачи.

Рассмотрим, например, волну шепчущей галереи, которая распространяется в области $z \geq 0$, $-\infty < t < \infty$, так что t – переменная вдоль границы, полагая, что при $t = t_1 = 0$ имеется особая точка на границе области $z = 0$. Мы рассматриваем этот круг задач в рамках метода параболического уравнения (см. обоснование и обсуждение этого подхода в [1, 2]), так что распространение волн шепчущей галереи

Ключевые слова: теория диффракции, локализованные волны, разделение переменных, граница с особенностями.

описывается следующим модельным (параболическим) уравнением:

$$i\Psi_t(z, t) + \Psi_{zz}(z, t) + zf(t)\Psi(z, t) = 0. \quad (1)$$

Здесь $f(t)$ – функция, описывающая поведение эффективного радиуса кривизны [1] границы области. В [1, 2] обсуждается “регулярный” случай, когда эффективный радиус границы положителен, непрерывно зависит от точки границы и не обращается в ноль. Последний факт отражает “выпуклость” границы и гарантирует существование волн шепчущей галереи. Нас интересует решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям: 1) при $t \rightarrow -\infty$ решение должно воспроизводить (набегающую) волну шепчущей галереи, 2) решение должно убывать при $z \rightarrow +\infty$, 3) решение при $z = 0$ должно удовлетворять условию Дирихле,

$$\Psi(0, t) = 0, \quad (2)$$

или условию Неймана,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}(0, t) = 0. \quad (3)$$

“Регулярному” случаю, упоминавшемуся выше, соответствует $f(t) \equiv -1$. Соответственно, для изучения модельной ситуации можно полагать, что

$$f(t) = -1, \quad t < t_n, \quad (4)$$

где t_n достаточно большое по модулю отрицательное число. Открытым остается изучение ситуаций, когда на границе существует “особая” точка, так что эффективный радиус $f(t)$ имеет в этой точке простой или двойной ноль, меняет знак или имеет разрыв. В этих ситуациях возникает задача о “рассеянии” волны шепчущей галереи на возникающем препятствии. Уравнение в случае $f(t) = t, f(t) = t^2$ обсуждалось в работах [5–10]. Отметим следующий факт. Если ввести в уравнение большой параметр $\omega \gg 1$ с помощью замены переменных $z = \omega^{2/3}\eta$, то мы получим уравнение

$$\Psi_{\eta\eta}(\eta, t) + i\omega\Psi_t(\eta, t) + \omega^2\eta f(t)\Psi(\eta, t) = 0, \quad (5)$$

которое используется для описания распространения высокочастотных волн шепчущей галереи [1, 2].

Наряду с уравнением (1) в теории диффракции обсуждается модельное уравнение

$$i\Psi_t(z, t) + \Psi_{zz}(z, t) + z^2p(t)\Psi(z, t) = 0. \quad (6)$$

оно возникает при описании волны в окрестности луча (см. мотивировку в [1]). Кроме того, уравнение (6) активно обсуждается в физической литературе при описании динамики гармонического осциллятора с переменными параметрами, см. [12–16]. Если ввести в уравнение (6) большой параметр $\omega \gg 1$ с помощью замены переменных $z = \omega^{1/2}\eta$, то мы получим уравнение

$$\Psi_{\eta\eta}(\eta, t) + i\omega\Psi_t(\eta, t) + \omega^2\eta^2p(t)\Psi(\eta, t) = 0, \quad (7)$$

которое возникает при описании высокочастотных волн в окрестности луча [1, 2]. Интерес представляют ситуации, когда $p(t)$ имеет особую точку при $t = t_1 = 0$ ($p(t)$ имеет разрыв в этой точке, или обращается в этой точке в ноль, или меняет в этой точке знак).

На практике представляет интерес решение начально-краевой задачи, когда задано (начальное) поле в точке $t = t_n$, задано граничное условие (Дирихле, Неймана или иное) и поле должно обладать заданным поведением (убывать) при $z \rightarrow +\infty$. В теории уравнений

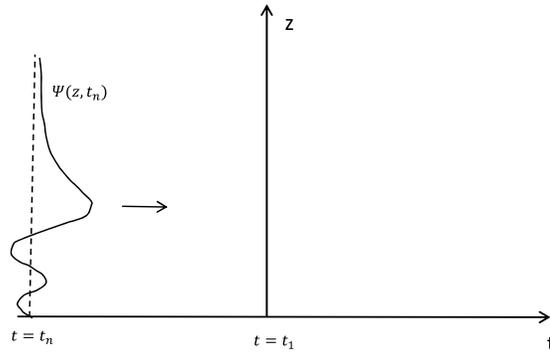


Рис. 1. Постановка начально-краевой задачи.

в частных производных хорошо известен метод разделения переменных. В рамках этого метода строят достаточно богатый набор решений параболического уравнения специального вида, удовлетворяющих граничному условию, с надлежащим поведением при $z \rightarrow +\infty$. После этого решение начально-краевой задачи для параболического уравнения сводится к построению линейной комбинации найденных решений, которая удовлетворяет начальному условию.

В нашем случае стандартное применение этого метода невозможно. Тем не менее, несколько модифицируя обычную схему, для решений уравнений (1), (6) мы построим интегральные представления с достаточно богатым набором функциональных параметров. Для функциональных параметров, описывающих решения этих параболических уравнений, мы выведем систему (обыкновенных) дифференциальных уравнений. Граничное условие при этом порождает трансцендентное уравнение для функциональных параметров. Наше изложение, в основном, останется на формальном уровне – мы предъявим уравнения для функциональных параметров, которые (по крайней мере локально) разрешимы, вопросы о глобальном поведении решений уравнений и описание их свойств мы обсудим в другом месте.

Опишем план дальнейшего изложения. Сначала, в разделе 2, мы рассмотрим хорошо известную задачу – построение решений начально-краевых задач для волн шепчущей галереи в регулярном случае, т.е. в случае $f(t) \equiv -1$. Для этого примера мы предъявим все ингредиенты нашего подхода: 1) построим решения исходного параболического уравнения с помощью подходящего набора функциональных параметров, 2) получим для этих параметров систему дифференциальных уравнений, 3) предъявим трансцендентное уравнение, к которому сводится граничное условие. Далее мы обсудим начально-краевую задачу, связанную с параболическим уравнением (6) и покажем, как можно строить решения соответствующих начально-краевых задач в случае граничного условия Дирихле или Неймана. Это уравнение обладает симметрией относительно замены $z \mapsto -z$, что облегчает построение решений начально-краевых задач для условия Дирихле и Неймана. Затем, в разделе 4, мы рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1): построим интегральное представление для решений уравнения, рассмотрим граничное условие и покажем, что на формальном уровне число функциональных параметров достаточно для решения широкого набора начально-краевых задач. В Заключении мы обсуждаем полученные результаты.

§2. ВОЛНА ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ, РЕГУЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙ

2.1. Представление решений параболического уравнения.

Как уже упоминалось, в регулярном случае уравнение (1) принимает вид

$$i\Psi_t(z, t) + \Psi_{zz}(z, t) - z\Psi(z, t) = 0. \quad (8)$$

Решения этого уравнения мы ищем в виде

$$\Psi(z, t) = Ai[z + \beta(t)] \exp[\kappa(t)z + \rho(t)], \quad (9)$$

где $Ai(s)$ – решение уравнения Эйри

$$\Phi''(s) = s\Phi(s), \quad (10)$$

фиксированное асимптотикой [11],

$$Ai(s) \sim \frac{\exp(-2s^{3/2}/3)}{2\sqrt{\pi}s^{1/4}}, \quad s \rightarrow +\infty, \quad (11)$$

$$Ai(s) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-s)^{1/4}} \cos(2(-s)^{3/2}/3 - \pi/4), \quad s \rightarrow -\infty, \quad (12)$$

а функциональные параметры $\beta(t)$, $\kappa(t)$, $\rho(t)$ подлежат определению. Наш выбор решения $Ai(s)$ гарантирует убывание функции (9) при $z \rightarrow +\infty$ независимо от значений $\kappa(t)$.

2.2. Уравнения для функциональных параметров. Простые выкладки приводят к следующим соотношениям (мы для краткости опускаем аргументы у $Ai[z + \beta(t)]$ и функциональных параметров и множитель $\exp[\kappa(t)z + \rho(t)]$, полагая $\beta' = \frac{\partial}{\partial t}\beta(t)$, аналогичное соглашение мы применяем и для всех остальных функциональных параметров):

$$\Psi_t \Rightarrow \beta' Ai' + (\kappa'z + \rho') Ai,$$

$$\Psi_{zz} \Rightarrow Ai'' + 2\kappa Ai' + \kappa^2 Ai \Rightarrow^{eq.(10)} (z + \beta + \kappa^2) Ai + 2\kappa Ai'.$$

Суммируя, находим:

$$i\Psi_t + \Psi_{zz} - z\Psi \Rightarrow i(\beta' Ai' + (\kappa'z + \rho') Ai) + (z + \beta + \kappa^2) Ai + 2\kappa Ai' - z Ai.$$

Выражение в правой части содержит $1 \cdot Ai'$, $z \cdot Ai$, $1 \cdot Ai$. Приравнявая нулю коэффициенты при этих выражениях, получаем уравнения для функциональных параметров:

$$i\beta' + 2\kappa = 0, \quad (13)$$

$$i\kappa' = 0, \quad (14)$$

$$i\rho' + \beta + \kappa^2 = 0. \quad (15)$$

2.3. Граничные условия. Рассмотрим случай граничного условия Дирихле. В этом случае мы приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$Ai(\beta) = 0. \quad (16)$$

Пусть β_n – одно из решений этого уравнения, так что $\beta(t) = \beta_n = \text{const}$. Сопоставляя с уравнениями (13)–(15), приходим к следующим соотношениям:

$$\beta(t) = \beta_n, \quad (17)$$

$$\kappa(t) = 0, \quad (18)$$

$$\rho(t) = i\beta_n t. \quad (19)$$

Таким образом, мы нашли все функциональные параметры выражения (9), при этом у нас существует произвол в выборе решения уравнения (16). В итоге мы построили достаточно богатый набор решений параболического уравнения (8), удовлетворяющих граничному условию Дирихле. Эти результаты хорошо известны, они обсуждаются и используются в [1, 2]. Построенное решение можно получить и с помощью обычной версии метода деления переменных.

Отметим, что для 3 функциональных параметров $\beta(t)$, $\kappa(t)$, $\rho(t)$ мы построили 3 дифференциальных уравнения (13)–(15) и 1 трансцендентное (16). В данном случае “число уравнений больше числа неизвестных”, задача является переопределенной и успех в ее решении связан с тем, что в определенном смысле данная ситуация является “вырожденной”. В ситуациях, которые будут обсуждаться далее, основную сложность представляло построение такого решения, для которого “число функциональных параметров не меньше числа уравнений”. Для уравнения (6) и условий Дирихле или Неймана мы используем симметрию задачи, в то время как при обсуждении задач, связанных с уравнением (1) в разделе 4 никакой априорной симметрии нет.

Наши рассуждения являются некоторой модификацией стандартного подхода, который основан на разделении переменных в задаче для шепчущей волны в регулярном случае. В рамках представленного формализма “разделение переменных” мы трактуем как 1) построение представления решения с помощью набора функциональных параметров, 2) вывод системы обыкновенных дифференциальных

уравнений для функциональных параметров, 3) описание трансцендентного уравнения, которое выражает граничное условие. “Разделение переменных”, в наших терминах реализуется, если “число уравнений (для функциональных параметров) не больше числа неизвестных”. При этом возникает некоторый набор свободных параметров для построенных решений. Таким образом, на формальном уровне мы получаем возможность построить богатый набор решений параболического уравнения, удовлетворяющих граничному условию, и получаем инструмент для решения достаточно произвольных начально-краевых задач. Далее мы обсудим, как представленную схему можно реализовать для существенно более сложных ситуаций уравнения (1) и (6).

§3. ВОЛНА ЛОКАЛИЗОВАННАЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЛУЧА

3.1. Представление решений параболического уравнения. Мы будем искать решение уравнения (6) в следующем виде:

$$\Psi(z, t) = \exp[\alpha(t)z^2 + \beta(t)z + \gamma(t)][\Phi(\mu(t)z + \rho(t)) + \kappa(t)\Phi'(\mu(t)z + \rho(t))], \quad (20)$$

где 6 функциональных параметров $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \mu(t), \rho(t), \kappa(t)$ подлежат определению, а функция $\Phi(x)$ является решением уравнения Эйри. Мы полагаем в дальнейшем, что $p(t)$ – вещественно-значная функция.

3.2. Уравнения для функциональных параметров. Подставляя выражение (20) в уравнение (6) и используя соотношение (10), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & (2\alpha z + \beta)^2(\Phi + \kappa\Phi') + 2\alpha(\Phi + \kappa\Phi') + 2(2\alpha z + \beta)[\mu\Phi' + \kappa\mu(\mu z + \rho)\Phi \\ & + \kappa\mu^2\Phi + \mu^2(\mu z + \rho)\Phi + \kappa\mu^2(\mu z + \rho)\Phi' \\ & + i[(\alpha'z^2 + \beta'z + \gamma')(\Phi + \kappa\Phi') + \kappa'\Phi' + (\mu'z + \rho')\Phi' \\ & + \kappa(\mu'z + \rho')(\mu z + \rho)\Phi] + pz^2(\Phi + \kappa\Phi') = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при, соответственно, $z^2 \cdot \Phi', z \cdot \Phi', 1 \cdot \Phi', z^2 \cdot \Phi, z \cdot \Phi, 1 \cdot \Phi$, получаем 6 уравнений для функций $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \mu(t), \rho(t), \kappa(t)$:

$$4\alpha^2\kappa + i\alpha'\kappa + p(t)\kappa = 0, \quad (21)$$

$$4\alpha\beta\kappa + 4\alpha\mu + \kappa\mu^3 + i\beta'\kappa + i\mu' = 0, \quad (22)$$

$$\beta^2 \kappa + 2\alpha \kappa + 2\beta \mu + \kappa \rho \mu^2 + i\gamma' \kappa + i\kappa' + i\rho' = 0, \quad (23)$$

$$4\alpha^2 + 4\alpha \kappa \mu^2 + i\alpha' + i\kappa \mu' \mu + p(t) = 0, \quad (24)$$

$$4\alpha \beta + 4\alpha \kappa \mu \rho + 2\beta \kappa \mu^2 + \mu^3 + i\beta' + i\mu' \kappa \rho + i\kappa \rho' \mu = 0, \quad (25)$$

$$\beta^2 + 2\alpha + 2\beta \kappa \mu \rho + \kappa \mu^2 + \mu^2 \rho + i\gamma' + i\kappa \rho' \rho = 0, \quad (26)$$

где $\alpha' = \frac{d\alpha(t)}{dt}$, $\beta' = \frac{d\beta(t)}{dt}$, ...

Полагая $\kappa, \mu \neq 0$, приводим эту систему к виду:

$$i\alpha' + 4\alpha^2 + p(t) = 0, \quad (27)$$

$$i\mu' + 4\alpha \mu = 0, \quad (28)$$

$$i\beta' + 4\alpha \beta + \mu^3 = 0, \quad (29)$$

$$i\rho' + 2\beta \mu = 0, \quad (30)$$

$$i\kappa' = \kappa^2 \mu^2, \quad (31)$$

$$i\gamma' + \beta^2 + 2\alpha + \kappa \mu^2 + \rho \mu^2 = 0. \quad (32)$$

Суммируя приведенные рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Предложение 1. Пусть выполняются соотношения (27)–(32), тогда соотношение (20) описывает решение уравнения (6).

3.3. Поведение при $z \rightarrow +\infty$. Обсудим поведение решений вида (20), где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\mu(t)$, $\rho(t)$, $\kappa(t)$ – решения системы (27)–(32), при $z \rightarrow +\infty$. Информация об асимптотике решений уравнения Эйри [11] приводит к выводу, что определяющим является знак $Re(\alpha(t))$. Уравнение (27) для функции $\alpha(t)$ – это уравнение Риккати, и стандартная подстановка $\alpha(t) = iu'(t)/(4u(t))$ приводит его к уравнению

$$u''(t) - 4p(t)u(t) = 0. \quad (33)$$

Выделим у этой функции вещественную и мнимую части, $u(t) = a(t) + ib(t)$, так что $a(t)$, $b(t)$ – вещественные функции. Коэффициент $p(t)$ в

уравнении (33) – вещественный, так что $a(t)$, $b(t)$ также являются решениями уравнения (33). Вообще говоря, мы можем выбрать их так, чтобы они были линейно независимыми решениями этого уравнения при достаточно большом (по модулю) и отрицательном значении t (полагая, что выполняется условие (4)). А именно, пусть при $t < t_n$

$$u(t) = \exp(2it) = \cos(2t) + i \sin(2t), \quad \alpha(t) = \frac{-1}{2}.$$

Таким образом, функции $a(t) = \cos(2t)$, $b(t) = \sin(2t)$ – линейно независимые решения уравнения (33) при $t < t_n$. Согласно нашим соотношениям,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{i(a' + ib')}{4(a + ib)} = \frac{i}{4(a^2 + b^2)} [a'a + b'b + i((b'a - a'b))] \\ &= \frac{i}{8} [ln(a^2 + b^2)]' + \frac{a'b - ab'}{4(a^2 + b^2)}, \end{aligned}$$

так что

$$\operatorname{Re} \alpha(t) = \frac{a'b - ab'}{4(a^2 + b^2)}.$$

В числителе этого выражения стоит Вронскиан решений $a(t)$, $b(t)$ уравнения (33) и, как было указано выше, при $t < t_n$ выполняется: $a'b - ab' = -2$. Таким образом, при всех t имеем: $\operatorname{Re} \alpha(t) < 0$, этот факт гарантирует убывание решений уравнения (6) при любом выборе решений $\Phi(x)$.

В дальнейшем мы фиксируем выбор функции $\alpha(t)$ указанным способом: при $t \leq t_n$ она равна $-1/2$.

Отметим, что из уравнения (28) следует:

$$\mu(t) = \frac{C}{u(t)}, \quad C = \text{const.}$$

3.4. Граничные условия. Отметим следующие свойства системы уравнений (27)–(32). Пусть набор функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\mu(t)$, $\rho(t)$, $\kappa(t)$ является решением этой системы, тогда набор функций $\alpha(t)$, $-\beta(t)$, $\gamma(t)$, $-\mu(t)$, $\rho(t)$, $\kappa(t)$ также удовлетворяет системе (27)–(32). Рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} \Psi_D(z, t) &= \exp[\alpha(t)z^2 + \gamma(t)] \{ \exp[\beta(t)z] [\Phi(\mu(t)z + \rho(t)) \\ &\quad + \kappa(t)\Phi'(\mu(t)z + \rho(t))] \\ &\quad - \exp[-\beta(t)z] [\Phi(-\mu(t)z + \rho(t)) + \kappa(t)\Phi'(-\mu(t)z + \rho(t))] \}. \end{aligned} \quad (34)$$

Эта комбинация обладает следующими свойствами:

1. Если $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \mu(t), \rho(t), \kappa(t)$ удовлетворяют системе уравнений (27)–(32), то выражение (34) является решением уравнения (6) (в силу линейности модельного уравнения (6)).

2. Построенная функция удовлетворяет граничному условию Дирихле (2), $\Psi_D(0, t) = 0$ при всех t .

Аналогичным образом комбинация

$$\begin{aligned} \Psi_N(z, t) = \exp[\alpha(t)z^2 + \gamma(t)]\{ & \exp[\beta(t)z][\Phi(\mu(t)z + \rho(t)) \\ & + \kappa(t)\Phi'(\mu(t)z + \rho(t))] \\ & + \exp[-\beta(t)z][\Phi(-\mu(t)z + \rho(t)) + \kappa(t)\Phi'(-\mu(t)z + \rho(t))]\}. \end{aligned} \quad (35)$$

удовлетворяет тому же уравнению и граничному условию Неймана,

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi_N(0, t) = 0,$$

$$-\infty < t < +\infty.$$

3.5. Решение начально-краевой задачи. На практике представляет интерес построение решения начально-краевой задачи, связанной с уравнением (6), когда в точке $t = t_n$, расположенной левее особой точки, задано значение $\Psi(z, t_n)$. Для построения решения такой задачи ищут линейную комбинацию решений параболического уравнения, удовлетворяющих граничному условию. Покажем, что представление (34) (или (35), соответственно), предоставляет большие возможности (при фиксированной точке $t = t_n$). В самом деле, свободными параметрами этого представления являются значения $\beta(t_n), \mu(t_n), \rho(t_n), \kappa(t_n)$, они могут быть выбраны произвольно. (Напомним, что функцию $\alpha(t)$, решение уравнения (27), мы фиксировали, а значение $\gamma(t_n)$ фиксирует общий множитель решения).

С формальной точки зрения результаты данного раздела можно понимать как расширение известных результатов [12] для решений уравнения (6).

§4. Волна шепчущей галереи, общий случай

4.1. Представление решений параболического уравнения. В данном разделе мы обсудим решения начально-краевых задач, связанных с уравнением (1) в случае произвольной $f(t)$. Мы будем искать

решение этого уравнения в виде следующего интеграла:

$$\Psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi[\alpha(t)z + x] Q[\beta(t)z + \gamma(t)x + \delta(t)] \exp[\mu(t)x + \kappa(t)z + \rho(t)] dx, \quad (36)$$

где $\Phi(s)$, $Q(s)$ являются решениями уравнения Эйри (10), а 7 функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $\mu(t)$, $\kappa(t)$, $\rho(t)$ подлежат определению. В качестве решений уравнения Эйри мы берем решение $Ai(s)$ с асимптотиками (11), (12). Заметим, что если $\operatorname{Re} \gamma(t) < 0$, то интеграл (36) сходится при любой $\mu(t)$. Более того, при этом условии правомерно интегрирование по частям (использующееся ниже), внеинтегральные члены пропадают в силу выбора контура интегрирования и описанного поведения $Ai(s)$.

4.2. Уравнения для функциональных параметров. Мы получим уравнения для функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $\mu(t)$, $\kappa(t)$, $\rho(t)$, подставляя выражение (36) в уравнение (1) после некоторых преобразований, включающих интегрирование по частям. При интегрировании по частям мы будем использовать следующие соотношения:

$$\Phi'[\alpha(t)z + x] = \frac{\partial}{\partial x} \Phi[\alpha(t)z + x], \quad (37)$$

и, соответственно,

$$Q'[\beta(t)z + \gamma(t)x + \delta(t)] = \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial x} Q[\beta(t)z + \gamma(t)x + \delta(t)]. \quad (38)$$

Используя эти соображения, получаем (в правой части мы для краткости выписываем только подинтегральные выражения без \exp и опускаем аргументы):

$$\begin{aligned} \Psi_t &\Rightarrow \alpha' z \Phi' Q + [\beta' z + \gamma' x + \delta'] \Phi Q' + (\mu' x + \kappa' z + \rho') \Phi Q \Rightarrow \\ &-\alpha' z [\gamma \Phi Q' + \mu \Phi Q] + [\beta' z + \gamma' x + \delta'] \Phi Q' + (\mu' x + \kappa' z + \rho') \Phi Q. \end{aligned}$$

Далее,

$$\Psi_{zz} \Rightarrow \alpha^2 \Phi'' Q + 2\alpha\beta \Phi' Q' + \beta^2 \Phi Q'' + 2\kappa(\alpha \Phi' Q + \beta \Phi Q') + \kappa^2 \Phi Q.$$

Для преобразования слагаемых, содержащих Φ'' , Q'' мы используем уравнение (10). Для преобразования слагаемого $2\alpha\beta \Phi' Q'$ есть 2 возможности - можно использовать либо (37), либо (38), затем интегрируя

по частям. Выделим часть, пропорциональную $\zeta(t)$ (мы будем называть этот параметр “параметром разделения”) и, используя соотношение (37), интегрирование по частям и уравнение (10), получим:

$$2\alpha\beta\zeta\Phi'Q' = 2\alpha\beta\zeta Q' \frac{\partial}{\partial x} \Phi \Rightarrow -2\alpha\beta\zeta[\mu\Phi Q' + \gamma(\beta z + \gamma x + \delta)\Phi Q].$$

Аналогично, используя (38), интегрирование по частям и (10), получим:

$$2\alpha\beta(1-\zeta)\Phi'Q' = 2\alpha\beta(1-\zeta)\Phi' \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial x} Q \Rightarrow -\frac{2\alpha\beta(1-\zeta)}{\gamma(t)}[(\alpha z + x)\Phi Q + \mu\Phi'Q].$$

Вновь интегрируя по частям во втором слагаемом в правой части, находим:

$$2\alpha\beta(1-\zeta)\Phi'Q' \Rightarrow -\frac{2\alpha\beta(1-\zeta)}{\gamma(t)}[(\alpha z + x)\Phi Q] + \frac{2\alpha\beta(1-\zeta)\mu}{\gamma(t)}[\gamma\Phi Q' + \mu\Phi Q].$$

Суммируя, получаем:

$$\begin{aligned} \Psi_{zz} \Rightarrow & [\alpha^2(\alpha z + x) + \beta^2(\beta z + \gamma x + \delta) + \kappa^2]\Phi Q - 2\alpha\beta\zeta[\mu\Phi Q' + \gamma(\beta z + \gamma x + \delta)\Phi Q] \\ & + 2\kappa\beta\Phi Q' - 2\kappa\alpha(\mu\Phi Q + \gamma\Phi Q') - \frac{2\alpha\beta(1-\zeta)}{\gamma}[(\alpha z + x)\Phi Q] \\ & + \frac{2\alpha\beta(1-\zeta)\mu}{\gamma}[\gamma\Phi Q' + \mu\Phi Q]. \end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned} i\Psi_t + \Psi_{zz} + zf\Psi \Rightarrow & i \cdot \{[-\alpha'z\gamma + \beta'z + \gamma'x + \delta']\Phi Q' \\ & + [-\alpha'\mu z + \mu'x + \kappa'z + \rho']\Phi Q\} + 2\kappa\beta\Phi Q' - 2\kappa\alpha(\mu\Phi Q + \gamma\Phi Q') \\ & + [\alpha^2(\alpha z + x) + \beta^2(\beta z + \gamma x + \delta) + \kappa^2 - 2\alpha\beta\zeta\gamma(\beta z + \gamma x + \delta) \\ & - \frac{2\alpha\beta(1-\zeta)}{\gamma}(\alpha z + x) + \frac{2\alpha\beta(1-\zeta)\mu^2}{\gamma} + zf]\Phi Q + \\ & + [2\alpha\beta\zeta\mu + 2\alpha\beta(1-\zeta)\mu]\Phi Q'. \end{aligned}$$

Правая часть содержит следующие мономы: $(z, x, 1) \cdot \Phi Q'$, $(z, x, 1)\Phi Q$. Приравнивая нулю коэффициенты при них, мы получаем 6 уравнений для 8 функций $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \kappa, \rho, \zeta$. Выпишем эту систему уравнений в указанном порядке:

$$\beta' - \gamma\alpha' = 0, \tag{39}$$

$$\gamma' = 0, \tag{40}$$

$$i\delta' - 2\alpha\beta\zeta\mu + 2\alpha\beta(1 - \zeta)\mu + 2\kappa(\beta - \alpha\gamma) = 0, \quad (41)$$

$$i\kappa' - i\mu\alpha' + \alpha^3 + \beta^3 - 2\alpha\beta^2\gamma\zeta - \frac{2\alpha^2\beta(1 - \zeta)}{\gamma} + f = 0, \quad (42)$$

$$i\mu' + \alpha^2 + \beta^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma^2\zeta - \frac{2\alpha\beta(1 - \zeta)}{\gamma} = 0, \quad (43)$$

$$i\rho' + \beta^2\delta - 2\alpha\beta\gamma\delta\zeta + \frac{2\alpha\beta\mu^2(1 - \zeta)}{\gamma} - 2\alpha\kappa\mu + \kappa^2 = 0. \quad (44)$$

Мы пришли к следующему результату.

Предложение 2. Пусть функции $\alpha(t)$, $\eta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $\mu(t)$, $\kappa(t)$, $\rho(t)$, $\zeta(t)$ удовлетворяют системе уравнений (39)–(44). Тогда $\Psi(z, t)$, определенная интегралом (36), является решением уравнения (1).

Из уравнения (40) следует: $\gamma = \text{const}$, из уравнения (39) получаем $\beta - \gamma\alpha = \text{const}$. Далее, заметим, что функция $\rho(t)$ входит только в уравнение (44), так что это уравнение служит для определения этой функции. Перед тем, как обсуждать остальные уравнения, мы рассмотрим граничное условие при $z = 0$.

4.3. Граничные условия. Рассмотрим, для определенности, граничное условие Дирихле (2). Тогда выражение (36) приводит к трансцендентному уравнению, которое связывает значения δ и μ ,

$$\Psi(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)Q(\gamma x + \delta) \exp[\mu x] dx = 0. \quad (45)$$

Возьмем, для определенности, $\gamma = -0.8$. График, представленный на рис.2, показывает, что функция $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)Q(\gamma x + \delta) \exp[\mu x] dx$ меняет знак в указанной области изменения параметров, так что она обращается там в ноль. Пусть $\delta = R(\mu)$ – решение уравнения (45). Тогда

$$i\delta' = i\mu' R'(\mu),$$

так что сравнивая уравнения (41) и (43) можно получить

$$R'(\mu) \left[\alpha^2 + \beta^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma^2\zeta - \frac{2\alpha\beta(1 - \zeta)}{\gamma} \right] = 2\alpha\beta\mu(1 - 2\zeta) + 2\kappa(\beta - \alpha\gamma). \quad (46)$$

Это соотношение можно понимать как линейное уравнение для параметра разделения $\zeta = \zeta(\alpha, \beta, \gamma, \mu, \kappa)$.

Таким образом, с формальной точки зрения мы имеем 7 уравнений для 8 функциональных параметров: i) $\gamma = \text{const}$ (уравнение (40)),

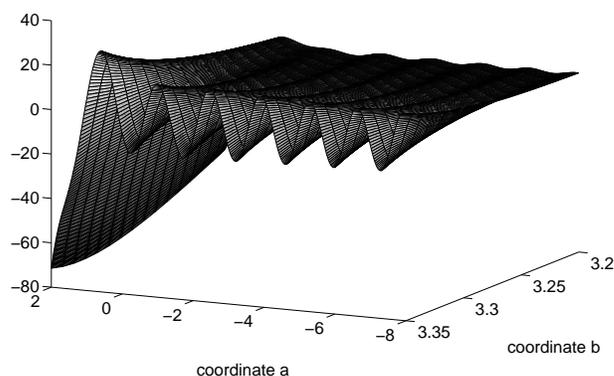


Рис. 2. График функции $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)Q(\gamma x + a) \exp[bx] dx, \gamma = -0.8$.

ii) $\beta = \alpha\gamma + \text{const}$ (уравнение (39)), iii) трансцендентное уравнение (45) для определения $\delta = R(\mu)$, iv) линейное уравнение (46) для параметра разделения ζ , v) пара уравнений (42), (43) для определения функций $\kappa(t)$, $\mu(t)$, и vi) уравнение (44) для определения функции $\rho(t)$. При этом свободными параметрами являются значения $\mu(t_n)$, $\kappa(t_n)$, $\gamma = \text{const}$, $\beta - \alpha\gamma = \text{const}$, функциональный параметр $\alpha(t)$ и выбор решения трансцендентного уравнения (45). Выбор начального значения для функции $\rho(t)$ приводит к выбору общего множителя у решения параболического уравнения.

Отметим, что интегралы, подобные (36), обсуждались в [17].

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках метода параболического уравнения мы обсудили модельные начально-краевые задачи теории диффракции. Для решений этих задач построены интегральные представления, с помощью которых развит вариант “разделения переменных”. Все рассмотрения в данной работе проводились на формальном уровне, имея в виду изложение общей схемы “разделения переменных” и обсуждение ее для уравнений

(1), (6). Обсуждение более продвинутых вопросов - таких, как существование глобальных решений построенных систем уравнений, возможность разложения достаточно произвольных начальных (заданных при $t = t_n$) функций $\Psi(z, t_n)$ по построенным наборам решений, описание их поведения при $z \rightarrow +\infty, \dots$ - мы надеемся изложить в другом месте.

Заметим, что в рамках предложенного здесь подхода можно обсуждать и более общие задачи. Во-первых, можно рассмотреть и другие варианты граничного условия, в том числе для границы, заданной уравнением $z = \psi(t)$. Такая модель граничного условия даст потенциальную возможность рассматривать рассеяние волны, локализованной вблизи границы, на дефектах границы типа ступеньки и т.п. Во-вторых, можно в качестве функций $\Phi(s), Q(s)$ в интеграле (36) использовать подходящие решения уравнения параболического цилиндра $P_1(s), P_2(s)$,

$$\Psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ai[\alpha(t)z + x] \cdot dx \quad (47)$$

$P[\beta(t)z + \gamma(t)x + \delta(t)] \exp[\zeta(t)x^2 + \xi(t)zx + \nu(t)z^2 + \mu(t)x + \kappa(t)z + \rho(t)] dx$,
или

$$\Psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1[\alpha(t)z + x] \cdot dx \quad (48)$$

$P_2[\beta(t)z + \gamma(t)x + \delta(t)] \exp[\zeta(t)x^2 + \xi(t)zx + \nu(t)z^2 + \mu(t)x + \kappa(t)z + \rho(t)] dx$,
имея в виду начально-краевые задачи для более общего уравнения

$$i\Psi_t(z, t) + \Psi_{zz}(z, t) + [z^2 p(t) + z f(t)]\Psi(z, t) = 0. \quad (49)$$

Автор благодарен В. П. Смышляеву за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. M. Babich, V. S. Buldyrev, *Short-Wavelength Diffraction Theory*. Asymptotic Methods (Berlin, Springer) (1991).
2. V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, *The Boundary-Layer Method in Diffraction Theory* (Leningrad, Leningrad University) 1974.
3. Yu. A. Kravtsov, Yu. I. Orlov, *Caustics, catastrophes and wave fields* (Heidelberg, Springer) (1999).
4. A. N. Oraevsky, *Whispering-gallery waves*. — Quantum Electron **32**, No. 5 (2002), 377–400.

5. М. М. Попов, *К задаче о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы*. — Зап. научн. семина. ЛОМИ **62** (1976), 197–206.
6. М. М. Попов, *Волновое поле в каустической тени в окрестности точки перегиба границы*. — Зап. научн. семина. ЛОМИ **89** (1979), 246–260.
7. V. M. Babich, V. P. Smyshlyaev, *Scattering problem for the Schrödinger equation in the case of a potential linear in time and coordinate*. I. Asymptotics in the shadow zone, *Journ. of Soviet Math.* **32**, No. 2 (1986), 103–112.
8. V. P. Smyshlyaev, *Concentration of the solutions near a limit ray in the neighborhood of an inflection point of the boundary*. — *J. Soviet Math.* **55**, No. 3 (1991), 1757–1760.
9. A. Ya. Kazakov, *Special function related to the concave-convex boundary problem of the diffraction theory*. — *J. Phys. A: Math.Gen.* **36**, No. 14 (2003), 4127–4142.
10. A. Ya. Kazakov, *Special Function Related to the Scattering of the Whispering Gallery Mode at a Point of Local Straightening*. — *J. Math. Sci.* **128**, No. 2 (2005), 2782–2786.
11. F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*. NIST and Cambridge University Press (2010).
12. K. Husimi, *Miscellanea in Elementary Quantum Mechanics*, II, *Progr. Theor. Phys.* **9**, No. 4 (1953), 381–402.
13. А. М. Переломов, В. С. Попов, *Групповые аспекты задачи об осцилляторе с переменной частотой*. — *Теорет. мат. физ.* **1**, No. 3 (1969), 360–374.
14. C. F. Lo, *Propagator of the general driven time-dependent oscillator*. — *Phys. Rev. A* **47**, No. 1 (1993), 115–118.
15. Sang Pyo Kim, *A class of exactly solved time-dependent quantum harmonic oscillators*. — *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, No. 11 (1994), 3927–3926.
16. H. Kanasugi, H. Okada, *Systematic Treatment of General Time-Dependent Harmonic Oscillator in Classical and Quantum Mechanics*. — *Progr. Theoret. Phys.* **93**, No. 5 (1995), 949–960.
17. O. Vallee, M. Soares, *Airy functions and application to physics*. Imperial College Press, London (2010).

Kazakov A.Ya. “Separation of variables in the model problems of the diffraction theory. Formal scheme.

Parabolic equation describes propagation of the localized waves along the boundary with peculiarities. We present here some reformulation of the “separation of variables”, which gives the possibility to obtain rich set of solutions of the corresponding boundary problems.

СПбГУТД С.-Петербург, Россия,
СПбГУАП, С.-Петербург, Россия

E-mail: a_kazak@mail.ru

Поступило 13 Августа 2018 г.