Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 471, 2018 г.

Е. А. Злобина, А. П. Киселев

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ДИФРАКЦИЯ НА КОНТУРЕ СО СКАЧКОМ КРИВИЗНЫ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЛУЧ

§1. Введение

Задача о высокочастотной дифракции на контуре со скачком кривизны, в которой для описания поля, дифрагированного особенностью, нет точно решаемой эталонной задачи, привлекала внимание многих (в том числе известных) исследователей с 1970-х годов (см. [1–6] и др.). В нашей недавней краткой заметке [7], посвященной применению к этой задаче последовательного метода пограничного слоя, впервые получено описание поля в окрестности предельного луча для случая некасательного падения плоской волны. Поле выражено через ранее не встречавшуюся в дифракционных задачах функцию параболического цилиндра D_{-3}.

Ниже, в п. 3, мы устанавливаем, что на расстояниях порядка $O(1)$ поле на предельном луче линейно растет с расстоянием от особенности контура. Для качественного объяснения этого неожиданного результата один из пионеров изучения задачи о разрыве кривизны А. В. Попов посоветовал нам обратиться к формальному исследованию лучевых формул для отраженной волны (см. [8]) вблизи предельного луча. Главный член лучевого разложения имеет на предельном луче скачок. Руководствуясь соображениями Г. Д. Малюжинца [9, 10] о поперечной диффузии поля, можно было бы надеяться на линейный рост амплитуды этого скачка или сингулярности соответствующей невязки на предельном луче. В разделе 4 мы исследуем лучевые формулы вблизи предельного луча, но не находим растущих с расстоянием членов ни в волновом поле, ни в сингулярной части невязки.

Ключевые слова: дифракция, негладкие препятствия, высокочастотная асимптотика, метод пограничного слоя, предельный луч, уравнение Гельмгольца, лучевой метод.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00529.

§2. Локальная постановка задачи вблизи точки негладкости

Пусть на контур C, кривизна $\varkappa$ которого имеет скачок в точке O (см. Рис. 1), падает плоская волна[1] $e^{ik(x\cos\beta-y\sin\beta)}$, где декартовы координаты x и y введены как показано на Рис. 1, и β – угол скольжения. Падение предполагается некасательным, т.е. $\beta>\varepsilon>0$. Кривизну контура $\varkappa=\varkappa(x)$ вблизи O можно описать как

$$\varkappa=g(x)+hH(x), \tag{1}$$

где $g(x)$ – гладкая функция, h – амплитуда скачка и $H(x)$ – функция Хевисайда

$$H(x)=1 \text{ при } x\geqslant 0, \quad H(x)=0 \text{ при } x<0. \tag{2}$$

Уходящая волна u^{out} удовлетворяет уравнению Гельмгольца с большим волновым числом k

$$(\Delta+k^2)u^{\text{out}}=0, \quad k\to\infty, \tag{3a}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, и граничному условию Дирихле

$$u^{\text{out}}+e^{ik(x\cos\beta-y\sin\beta)}\Big|_C=0. \tag{3b}$$

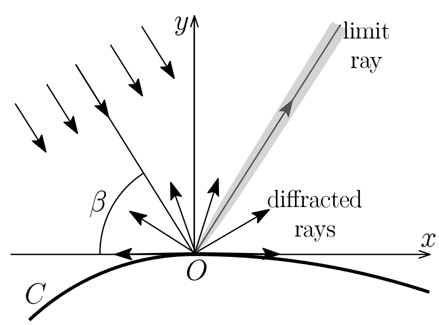

Рис. 1. Контур, падающая волна и система координат.

[1] Мы предполагаем гармоническую зависимость от времени $e^{-i\omega t}$, где t – время, ω – частота, а $\omega/c=k$ и $c=\mathrm{const}$ – скорость. Мы принимаем $c=1$.

Согласно геометрической теории дифракции (см. [3, 11]), вдали от предельного луча (см. Рис. 1) уходящая волна u^{out} является суммой двух волн – геометрооптически отраженной u^{r} и дифрагированной u^{d}:

$$u^{\mathrm{out}} = u^{\mathrm{r}} + u^{\mathrm{d}}, \tag{4}$$

причем дифрагированная волна является цилиндрической волной.

В [7] отмечено, что вклад скачка кривизны в поле уходящей волны описывается линейной по h функцией u_h^{out}, и приведена асимптотика u_h^{out} вблизи предельного луча (см. Рис. 1) на расстояниях порядка $O(1)$ от контура:

$$u_h^{\mathrm{out}} = \frac{hre^{ikr-i\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\sin\beta} D_{-3}(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}z)(1+o(1)), \quad kr \to \infty. \tag{5}$$

Здесь D_{-3} – функция параболического цилиндра [12], (r, φ) – классические полярные координаты с центром в точке O

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arccos(x/r), \tag{6}$$

а

$$z = \sqrt{kr}(\varphi - \beta)/\sqrt{2} \tag{7}$$

– величина, часто возникающая при описании переходных областей во многих задачах. Обычно она имеет смысл квадратного корня из разности фаз цилиндрической и плоской волны (см., напр., [11]).

§3. Поле на предельном луче

3.1. Асимптотика на предельном луче. Пользуясь интегральным представлением для функции $D_{-3}(\zeta)$ (см. [12])

$$D_{-3}(\zeta) = \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{4}}}{2} \int_0^\infty e^{-\zeta t - \frac{t^2}{2}} t^2 dt, \tag{8}$$

выражение (5) на предельном луче, т. е. при $z = 0$, легко найти явно:

$$\begin{aligned} D_{-3}(0) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} t^2 dt = -\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda\frac{t^2}{2}} dt \Big|_{\lambda=1} \\ &= -\frac{d}{d\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\Big|_{\lambda=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Асимптотика (5) на предельном луче принимает вид

$$u_h^{\mathrm{out}}\big|_{\varphi=\beta} = \frac{hre^{ikr}}{2\sqrt{2}\,\sin\beta}(1+o(1)), \quad kr\to\infty. \tag{10}$$

Выражение (10) растет пропорционально r при удалении от контура вдоль предельного луча.

3.2. Точные решения Н. В. Цепелева. Отметим, что в работе [13] для описания поля вблизи предельных лучей, где происходит слияние волн различной природы, введено семейство точных решений уравнения Гельмгольца (3a)

$$u = BD_{-\frac{1-q}{2}}\big(\sqrt{2k}e^{-i\pi/4}\mu\big)D_{-\frac{1+q}{2}}\big(\sqrt{2k}e^{-i\pi/4}\nu\big) \tag{11}$$

причем $B=\mathrm{const}$, D_p – функции параболического цилиндра [12], μ и ν – параболические координаты [14], а $q\in\mathbb{C}$ – параметр разделения. Вблизи предельного луча координатные линии μ параллельны, а координатные линии ν перпендикулярны предельному лучу. Поэтому на достаточно большом расстоянии от препятствия функция $D_{-\frac{1-q}{2}}(\sqrt{2k}e^{-i\pi/4}\mu)$ заменяется ее асимптотикой. В [13] рассмотрены случаи $q=1$, $q=-2$, отвечающие полутени в задаче дифракции на угловой области и области слияния отраженной и головной волн в задаче о точечном источнике в присутствии плоской границы раздела. Случай $q=2$ встретился в [15,16] в связи с описанием полутени произвольного конуса. Приближенное решение для окрестности предельного луча в нашей задаче является асимптотикой решения (11) для $q=5$.

§4. Лучевые рассмотрения вблизи предельного луча

Исследуем аналитические свойства лучевых формул (см. [8]), описывающих отраженную волну. Мы ограничимся случаем падения плоской волны вдоль нормали к контуру в точке O, т.е. волны e^{-iky} (см. Рис. 2).

4.1. Главный член лучевого разложения. Лучевой метод (см. [8]) дает описание волны u^{r} (ср. (4)), геометрооптически отраженной от контура слева и справа от точки O, в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра k^{-1}. Главный член лучевого разложения имеет вид

$$u_0^{\mathrm{r}} = Ae^{ik\tau} = -\frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{1+\frac{2\varkappa l}{\cos\alpha}}}. \tag{12}$$

Здесь $\tau = \tau(M)$ – эйконал, $l = |N_* M|$ – расстояние от точки N_* геометрооптического отражения луча до точки наблюдения M, α – угол падения луча на контур (см. Рис. 2), а значение кривизны $\varkappa$ берется в точке N_* (см. [8]). Эйконал τ и лучевая амплитуда A справа и слева от предельного луча удовлетворяют уравнению эйконала и уравнению переноса (см. [8])

$$(\nabla\tau)^2 = 1, \quad 2(\nabla\tau, \nabla A) + A\Delta\tau = 0. \tag{13}$$

На предельном луче ни лучевая амплитуда A, ни фаза выражения (12) не являются гладкими[2].

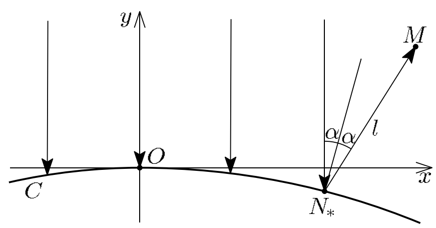

Рис. 2. Нормальное падение плоской волны на контур.

Если контур выпуклый, то $2\varkappa l/\cos\alpha \geqslant 0$ и выражение (12) конечно при любых значениях l. Для контура, имеющего вогнутый участок, при $l = -\cos\alpha/2\varkappa$ знаменатель выражения (12) обращается в нуль, что соответствует каустике. В таком случае мы будем рассматривать только расстояния $l < -\cos\alpha/2\varkappa$.

4.2. Невязка на предельном луче. Целью этого раздела является исследование на предельном луче сингулярности, возникающей при подстановке выражения (12) в уравнение (3а). Из (12) следует, что соответствующая невязка F имеет вид:

$$F = \left(\Delta + k^2\right) u_0^{\mathrm{r}} = k^2 F_2 + kF_1 + F_0, \tag{14}$$

[2]Эта негладкость может служить доводом в пользу рассмотрения поля в окрестности предельного луча в рамках метода пограничного слоя.

где F_2, F_1 и F_0 не зависят от большого параметра k. В дальнейшем мы установим, что

$$F_2 = 0, \tag{15}$$

$$F_1 = \phi_1(y)\delta(x) + \phi_2(y)H(x) + \ldots, \tag{16}$$

$$F_0 = \psi_1(y)\delta'(x) + \psi_2(y)\delta(x) + \psi_3(y)H(x) + \ldots, \tag{17}$$

где многоточие обозначает более гладкие (непрерывные по x) члены.

4.3. Эйконал. Вариационная задача. При исследовании аналитической структуры лучевых формул нам будет удобно использовать принцип Ферма (см. [8]).

Эйконал отраженной волны (определяемый с точностью до величины, постоянной на прямой $y = 0$ и принятой нами равной нулю) равен

$$\tau = |P_* N_*| + |N_* M|. \tag{18}$$

Здесь точка P_* лежит на оси абсцисс, точка $N_* \in C$ такова, что отрезок $P_* N_*$ (участок луча падающей плоской волны) вертикален, а угол[3] $(\widehat{\overrightarrow{N_* P_*}, \mathbf{n}_*})$ равен углу $(\widehat{\overrightarrow{N_* M}, \mathbf{n}_*})$ ($\mathbf{n}_*$ – нормаль к контуру в точке N_*), см. Рис. 3. Эйконал τ имеет смысл времени пробега с единичной скоростью от P_* до M вдоль геометрооптического луча $P_* N_* M$.

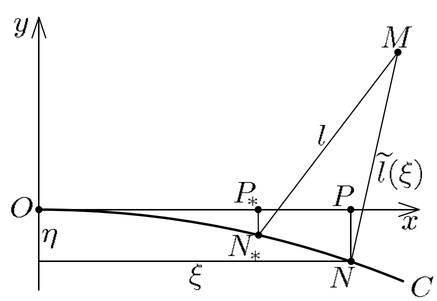

Рис. 3. Ломаная сравнения.

Фиксируем точку наблюдения $M = (x, y)$ и рассмотрим ломаную сравнения PNM. Здесь точка P лежит на оси x, точка $N \in C$, а отрезок PN вертикален. Будем параметризовать варьируемую точку

[3]Через $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ мы обозначаем угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

N значением ξ ее абсциссы, см. Рис. 3. Вблизи точки O ордината η точки N является однозначной функцией переменной ξ, $\eta = \eta(\xi)$. Ломаная PNM является лучом, если углы $(\widehat{\overrightarrow{NP}, \mathbf{n}})$ и $(\widehat{\overrightarrow{NM}, \mathbf{n}})$ равны ($\mathbf{n}$ – нормаль к контуру в точке N). Согласно принципу Ферма, длина ломаной $\widetilde{\tau}(\xi) = |PN| + |NM|$ достигает минимального значения по сравнению близкими к ней ломаными сравнения. Поскольку $\eta = -|PN|$ и $\widetilde{l}(\xi) := |NM|$ (см. Рис. (2)), то

$$\widetilde{\tau}(\xi) = \widetilde{l}(\xi) - \eta. \tag{19}$$

Исследуем лучевую амплитуду A и эйконал τ вблизи предельного луча.

4.4. Эйконал вблизи предельного луча для нормального падения. Для нормального падения на контур плоской волны e^{-iky} предельный луч совпадает с положительной полуосью y. Рассмотрим случай, когда точка наблюдения M лежит вблизи предельного луча на расстоянии порядка $O(1)$ от контура, т.е. $|x| \ll 1$, а y порядка $O(1)$. Тогда достаточно рассматривать малые ξ и η (причем ξ и x одного знака), и

$$l = y + O\left(x^2\right), \quad r = y + O\left(x^2\right). \tag{20}$$

Везде далее с помощью символа $\approx$ записываются равенства с точностью до $O\left(x^3\right)$ (ясно, что $\xi = O(x)$). Будем рассматривать контур C, состоящий из дуг двух касающихся окружностей разной кривизны, т.е. положим в формуле (1) $g(x) = \varkappa_0 = const$:

$$\varkappa = \varkappa_0 + hH(x). \tag{21}$$

Тогда для координат ξ и η по обе стороны от O точки N справедливо соотношение

$$\xi^2 + (\eta + a)^2 = a^2, \tag{22}$$

где $a = a(\xi) = \varkappa^{-1}(\xi)$ – радиус кривизны контура[4]. Отсюда

$$\eta \approx -\frac{\xi^2}{2a}. \tag{23}$$

[4]Здесь и далее равенство следует понимать как два отдельных равенства, записанных для $\xi < 0$ и для $\xi > 0$.

Следовательно,

$$\widetilde{l}(\xi) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \approx y + \frac{x^2}{2y} - \frac{x\xi}{y} + \frac{\xi^2}{2a}\left(1 + \frac{a}{y}\right), \tag{24}$$

$$\widetilde{\tau}(\xi) \approx y + \frac{x^2}{2y} - \frac{x\xi}{y} + \frac{\xi^2}{2a}\left(2 + \frac{a}{y}\right). \tag{25}$$

Нетрудно заметить, что функция $\widetilde{\tau}(\xi)$ достигает минимума при

$$\xi = \xi_* \approx \frac{ax}{2y+a} = \frac{x}{2\varkappa y + 1}. \tag{26}$$

Напомним, что если $\varkappa(x) < 0$, то мы рассматриваем только $y < -2\varkappa^{-1}(x)$. Введем обозначения (см. (21))

$$J = 2\varkappa y + 1, \quad J_0 = 2\varkappa_0 y + 1. \tag{27}$$

Тогда эйконал равен

$$\tau = \widetilde{\tau}(\xi_*) \approx y + \frac{\varkappa_0}{J_0}x^2 + \left[\frac{\varkappa}{J}\right] x_+^2. \tag{28}$$

Здесь использовано стандартное обозначение (см. [17]) $x_+^\lambda = x^\lambda H(x)$, $x_+^1 := x_+$, а

$$[f] = f(+0, \ldots) - f(-0, \ldots) \tag{29}$$

– скачок функции $f(x, \ldots)$ при $x = 0$.

4.5. Лучевая амплитуда вблизи предельного луча. Из (26) следует, что расстояние l от точки падения N_* до точки наблюдения M равно

$$l = \widetilde{l}(\xi_*) \approx y + \frac{\varkappa_0(4\varkappa_0 y + 1)}{2J_0^2}x^2 + \left[\frac{\varkappa(4\varkappa y + 1)}{2J^2}\right] x_+^2. \tag{30}$$

В результате простых выкладок, использующих равенства $\varkappa^{-1}\cos\alpha = \varkappa^{-1} + \eta$ и (30), получим выражение для лучевой амплитуды (12) вблизи предельного луча

$$A \approx -\frac{1}{\sqrt{J_0}} + \frac{\varkappa_0^2(5\varkappa_0 y + 1)}{2J_0^{7/2}}x^2 - \left[\frac{1}{\sqrt{J}}\right] H(x) + \left[\frac{\varkappa^2(5\varkappa y + 1)}{2J^{7/2}}\right] x_+^2, \tag{31}$$

где J и J_0 определены в (27).

4.6. Сингулярность невязки на предельном луче. Рассмотрим теперь невязку F, см. (14). Подставляя выражение $Ae^{ik\tau}$ в уравнение Гельмгольца (3а), получим

$$\begin{aligned} F &= \left(\Delta + k^2\right) Ae^{ik\tau} \\ &= \left(k^2 A(1-(\nabla\tau)^2) + ik(2(\nabla\tau, \nabla A) + A\Delta\tau) + \Delta A\right) e^{ik\tau}. \end{aligned} \tag{32}$$

Сравним (32) с (14). Очевидно, функции F_2, F_1 и F_0 в (14) равны соотвественно

$$F_2 = (1-(\nabla\tau)^2)e^{ik\tau}, \tag{33}$$

$$F_1 = (2(\nabla\tau, \nabla A) + A\Delta\tau)e^{ik\tau}, \tag{34}$$

$$F_0 = (\Delta A)e^{ik\tau}. \tag{35}$$

Уравнение эйконала (13) и непрерывная дифференцируемость выражения (28) приводят равенству $F_2 = 0$ (15).

Лучевая амплитуда A удовлетворяет уравнению переноса (13) справа и слева от предельного луча, но имеет на этом луче скачок. Поэтому $F_1(x)$ является сингулярной обобщенной функцией, сосредоточенной на предельном луче. Как лучевая амплитуда A, так и эйконал τ имеют структуру

$$f(x,y) = f_0(x,y) + f_1(x,y)H(x), \tag{36}$$

где f_0 и f_1 – гладкие функции (ср. (31) и (28)). Производная такого выражения равна

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f_0(x,y) + H(x)\frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y) + f_1(x,y)\delta(x). \tag{37}$$

Тогда из уравнения переноса (13) и выражений для эйконала (28) и лучевой амплитуды (31) легко получаем

$$F_1 = -i\left[\frac{1}{\sqrt{J}}\right]\delta(x)e^{iky}, \tag{38}$$

где J определено в (27).

Наконец, пользуясь (31), прямым вычислением находим

$$F_0 = -\left[\frac{1}{\sqrt{J}}\right]\delta'(x)e^{iky} - \left[\frac{\varkappa^2(\varkappa y + 2)}{J^{7/2}}\right]H(x)e^{iky} + \ldots, \tag{39}$$

где многоточием обозначены непрерывные по x члены.

Отсюда мгновенно получаем сингулярность невязки (12) на предельном луче:

$$F = -ik\left[\frac{1}{\sqrt{J}}\right]\delta(x)e^{iky} - \left[\frac{1}{\sqrt{J}}\right]\delta'(x)e^{iky} - \left[\frac{\varkappa^2(\varkappa y+2)}{J^{7/2}}\right]H(x)e^{iky} + \dots \quad (40)$$

Здесь многоточие обозначает непрерывные по x члены порядка $O(1)$, $k \to \infty$.

Итак, мы нашли сингулярность невязки (14) главного члена лучевого разложения (12) на предельном луче. Видно, что в сингулярной части невязки растущих с расстоянием членов нет.

§5. Заключение

Можно показать, что учет следующего члена лучевого разложения, вносящего вклад в сингулярность невязки в порядке $O(1)$, $k \to \infty$, также не приводит к возникновению выражений, напоминающих (5). Таким образом, предположение А. В. Попова о том, что рассмотрение невязки лучевого разложения на предельном луче поможет качественно объяснить рост амплитуды поля на предельном луче, не оправдывается.

Авторы признательны А. В. Попову за стимулирующее обсуждение.

Список литературы

1. А. Ф. Филиппов, *Отражение от границы, составленной из дуг различной кривизны.* — Прикл. матем. мех. **34**, No. 6 (1971), 1076–1084.
2. А. В. Попов, *Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны.* — In: Труды V Всес. симпоз. по дифр. и распр. волн, Наука, Л., 1971, pp. 171–175.
3. L. Kaminetzky, J. B. Keller, *Diffraction coefficients for higher order edges and vertices.* — SIAM J. Appl. Math. **22**, No. 1 (1972), 109–134.
4. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Дифракция волны шепчущей галереи вблизи линии разрыва кривизны.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 95–109.
5. A. S. Kirpichnikova, V. B. Philippov, *Diffraction by a line of curvature jump (a special case).* — IEEE Trans. Antennas Propagation **49**, No. 12 (2001), 1618–1623.
6. Z. M. Rogoff, A. P. Kiselev, *Diffraction at jump of curvature on an impedance boundary.* — Wave Motion **33**, No. 2 (2001), 183–208.
7. E. A. Zlobina, A. P. Kiselev, *High-frequency diffraction by a contour with a jump of curvature.* — In: Proc. Intern. Conf. “Days on Diffraction 2018” (2018), pp. 325–328.

8. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* — Наука, М., 1972.
9. Г. Д. Малюжинец. *Развитие представлений о явлениях дифракции (к 130-летию со дня смерти Томаса Юнга).* — Успехи физических наук **69**, No. 2 (1959), 321–334.
10. И. Г. Кондратьев, Г. Д. Малюжинец. *Дифракция волн.* — In: Физическая энциклопедия, Том 1, Советская энциклопедия, 1988, pp. 664–667.
11. В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, *Геометрическая теория дифракции.* — Связь, М., 1978.
12. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции, Том 2.* — Наука, М., 1973.
13. Н. В. Цепелев, *О некоторых специальных решениях уравнения Гельмгольца.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **51** (1975), 197–202.
14. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы математической физики, Том 1.* — Издательство иностранной литературы, М., 1958.
15. А. Л. Бродская, А. В. Попов, С. А. Хозиосский, *Асимптотика волны, отраженной от конуса в области полутени.* — In: Труды VI Всес. симпоз. по дифр. и распр. волн, Том 1, Наука, Москва–Ереван, 1973, pp. 227–231.
16. A. Popov, A. Ladyzhensky (Brodskaya), S. Khozioski, *Uniform asymptotics of the wave diffracted by a cone of arbitrary cross section.* — Russ. J. Math. Phys. **16**, No. 2 (2009), 296–299.
17. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними, Том 1.* — Государственное издательство физико-математической литературы, М., 1959.

Zlobina E. A., Kiselev A. P. High-frequency diffraction by a contour with a jump of curvature. Limit ray.

High-frequency diffraction by a contour with a jump of curvature is addressed. Outgoing wavefield at the limit ray is studied.

Поступило 1 ноября 2018 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: ezlobina2@yandex.ru
E-mail: aleksei.kiselev@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: aleksei.kiselev@gmail.com