Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 471, 2018 г.

М. Н. Демченко

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ НА ГРАНИЦЕ

§1. Введение

Рассмотрим волновое уравнение

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \tag{1}$$

в пространственно-временном цилиндре $\Omega\times\mathbb{R}$ (Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$). В данной работе изучается задача определения решения u по данным Коши u, $\partial_\nu u$ (ν – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$), известным на части границы $\partial\Omega\times\mathbb{R}$. В отличие от классической задачи Коши для волнового уравнения с данными на пространственно-ориентированной поверхности, изучаемая нами задача не является корректной по Адамару [1,2]. Однако, решение u однозначно определяется в некоторой части цилиндра $\Omega\times\mathbb{R}$, зависящей от множества, на котором известны данные Коши. Это можно вывести из теоремы Хольмгрена (а в случае переменных коэффициентов в уравнении из теоремы Татару [3]) о единственности продолжения решения через нехарактеристическую поверхность.

Обозначим точку пространства $\mathbb{R}^n$ через (x,y), $x=(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, $y\in\mathbb{R}$. Мы будем рассматривать случай, когда область Ω является подграфиком C^∞-гладкой функции $Y(x)$, удовлетворяющей условию роста на бесконечности:

$$\begin{aligned}&\Omega=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}^{n-1},\quad -\infty<y<Y(x)\},\\ &|Y(x)|\leqslant C_1+C_2|x|,\qquad C_2<1\end{aligned} \tag{2}$$

(см. рис. 1). В случае $Y(x)\equiv\mathrm{const}$ область Ω – полупространство. Зафиксируем точку $(x^*,y^*)\in\Omega$ и момент времени $t^*\in\mathbb{R}$. Мы получим алгоритм (формула (18), п. 4), позволяющий определить $u(x^*,y^*,t^*)$ по данным Коши на множестве

$$\{(x,y,t)\,|\,(x,y)\in S,\ T_-(x)\leqslant t\leqslant T_+(x)\}. \tag{3}$$

Ключевые слова: волновое уравнение, задача Коши, продолжение волнового поля, фотоакустическая томография.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00529-а.

Здесь $T_\pm(x) = t^* \pm (Y(x) - y^*)$, S – любое ограниченное открытое (в относительной топологии) подмножество $\partial\Omega$, содержащее пересечение $K \cap \partial\Omega$, где

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid y - y^* \geqslant |x - x^*|\} \tag{4}$$

(ограниченность пересечения $K \cap \partial\Omega$ следует из условия роста на $Y(x)$ в (2)). Конус K и поверхность S показаны на рис. 1. Очевидно, что $Y(x) > y^*$ для $(x, y) \in K \cap \partial\Omega$. Мы будем предполагать, что поверхность S выбрана так, что это неравенство выполнено для всех (x, y) из замыкания $\overline{S}$. Это означает, что $T_-(x) < T_+(x)$, поэтому условие на t в (3) имеет смысл.

Отметим, что формула (18) позволяет определить $u(x^*, y^*, t^*)$ по данным Коши на разных подмножествах пространственно-временной границы. В самом деле, мы можем выбрать конус K с другим направлением оси симметрии (при этом его вершина должна быть в точке (x^*, y^*)), которому будет соответствовать другое множество $S \subset \partial\Omega$. Далее мы можем выбрать прямоугольную систему пространственных координат таким образом, чтобы конус имел вид (4), а затем применить формулу (18). Для этого необходимо, чтобы в новых координатах область Ω имела вид (2). Как известно, в задаче Коши для эллиптического уравнения и в задаче аналитического продолжения решение также однозначно определяется данными Коши на разных множествах.

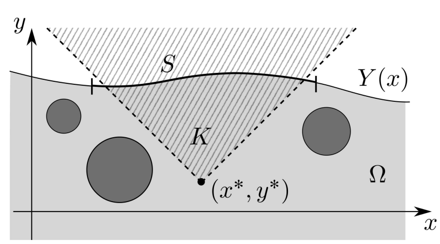

Рис. 1. Область Ω состоит из точек, лежащих под графиком функции $Y(x)$. Затемненная часть области – множество ω, содержащее рассеиватели и неоднородности. Заштрихованная область – конус K.

Уравнение (1) описывает волновые процессы различной природы в однородных средах. Таким образом, наш результат может применяться для определения волнового поля в некоторой области по измерениям на ее границе. Как будет показано в конце п. 4, наш алгоритм применим также в случае, когда решение $u(x, y, t)$ определено для (x, y), принадлежащих некоторому подмножеству Ω. Это соответствует, например, волновому процессу в среде, занимающей область Ω и содержащей неоднородности и рассеиватели, локализованные в некотором множестве ω (см. рис. 1). При условии $\omega \cap K = \emptyset$ формула (18) позволяет восстановить волновое поле в однородной части среды (т.е. в $\Omega \backslash \omega$), не используя при этом информации о строении неоднородностей и рассеивателей.

Задача определения нестационарного волнового поля возникает в таких приложениях, как обработка данных геофизических измерений [4], фотоакустической томографии [5, 6], в задачах определения источника цунами [7], а также при решении коэффициентных обратных задач [8–10].

Задаче Коши для гиперболических уравнений с данными на границе посвящено множество работ – основные результаты и обзор литературы можно найти в [1, 2]. Основную часть результатов составляют карлемановские оценки, из которых следует единственность решения и оценки условной устойчивости. Для волнового уравнения с постоянными коэффициентами получены алгоритмы решения, основанные на аналитических выражениях. Однако, в большинстве работ изучается случай нелокальных данных Коши, когда в качестве поверхности S берется вся граница $\partial\Omega$ [5, 11–14]. Случай локальных данных Коши изучался Р. Курантом (задача Коши для ультрагиперболического уравнения в полупространстве, см. [15]), а также в работах [16, 17], где рассматривались двумерные области.

§2. Специальное решение уравнения Лапласа

Вывод основного результата работы основан на специальном решении волнового уравнения, зависящем от малого параметра h и обладающем некоторым свойством локализации при $h \to 0$. При построении этого решения мы будем использовать специальное решение уравнения Лапласа, которому посвящен этот параграф.

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\Delta_x = \sum_j \partial_{x_j}^2$ (таким образом, для оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^n$ выполнено $\Delta = \Delta_x + \partial_y^2$).

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{5}$$

$$\varphi|_{y=0} = \frac{e^{-x^2/h}}{(\pi h)^m}, \quad \partial_y\varphi|_{y=0} = 0. \tag{6}$$

Здесь $h > 0$, $m = (n-1)/2$, для вещественного или комплексного вектора $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ мы полагаем $\zeta^2 = \sum_j \zeta_j^2$. Отметим, что $\varphi(x, 0)$ – распределение Гаусса в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Лемма 1. *Для любого $h > 0$ существует единственная C^∞-гладкая функция $\varphi(x, y)$ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая уравнению* (5) *и начальным условиям* (6)*. Кроме того,*

$$\varphi, \partial_{x,y}\varphi, \partial^2_{x,y}\varphi \to 0, \quad h \to 0, \quad \textit{при } |x| > |y|; \tag{7}$$

пределы достигаются равномерно на компактах, содержащихся в $\{|x| > |y|\}$.

Доказательство. Для изучения задачи Коши (5), (6), мы применим способ, описанный [18] (лемма 9.1.4), где уравнение Лапласа сводится к волновому уравнению. Этот способ позволяет получить представление решения $\varphi(x, y)$ в терминах фундаментального решения $G(x, y)$ волнового уравнения. Последнее определяется равенствами:

$$\partial_y^2 G - \Delta_x G = 0, \tag{8}$$

$$G|_{y=0} = 0, \quad \partial_y G|_{y=0} = \delta(x) \tag{9}$$

(δ – дельта-функция). При фиксированном y функции $\partial_y^\beta G(\cdot, y)$, $\beta \geqslant 0$, сосредоточены в шаре $\{x \,|\, |x| \leqslant |y|\}$. Преобразование Фурье функции $\partial_y G(\cdot, y)$ равно $\cos(y|\xi|)$. Положим

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{(\pi h)^m} \left\langle \partial_y G(x', y), e^{-(x-ix')^2/h} \right\rangle. \tag{10}$$

Здесь и далее в доказательстве угловые скобки означают применение обобщенной функции переменной x' к пробной функции. В данном случае гладкая функция $e^{-(x-ix')^2/h}$ не является финитной по x', однако применение к ней финитной обобщенной функции $\partial_y G(\cdot, y)$ имеет смысл. Ясно, что производные функции φ допускают аналогичное представление

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y) = \frac{1}{(\pi h)^m} \left\langle \partial_y^{\beta+1} G(x', y), \partial_x^\alpha e^{-(x-ix')^2/h} \right\rangle. \tag{11}$$

Из этого представления и равенства $\partial_y^2 G(x,0)=0$ вытекает второе начальное условие в (6). Первое условие в (6) следует из определения (10) и второго условия в (9).

Функцию $\varphi(x,y)$, а также все ее производные по x,y можно рассматривать как аналитические функции комплексных переменных $x_1,\dots,$ x_{n-1}. Это следует из (10) и (11). Функция

$$\psi(x,y)=\varphi(ix,y)=\frac{1}{(\pi h)^m}\left\langle \partial_y G(x',y), e^{(x-x')^2/h}\right\rangle$$

является сверткой функций $(\pi h)^{-m}e^{x^2/h}$ и $\partial_y G(x,y)$ по переменной x и в силу (8) удовлетворяет волновому уравнению

$$\partial_y^2\psi-\Delta_x\psi=0$$

при всех $(x,y)\in\mathbb{R}^n$. При каждом фиксированном y левая часть в этом уравнении – аналитическая функция переменных $x_1,\dots,x_{n-1}$. Следовательно, это уравнение выполнено при всех комплексных $x_1,\dots,x_{n-1}$, поэтому

$$(\partial_y^2\varphi+\Delta_x\varphi)(x,y)=(\partial_y^2\psi-\Delta_x\psi)(-ix,y)=0.$$

Таким образом, выполняется уравнение (5). Единственность решения φ следует из единственности решения задачи Коши для эллиптического уравнения.

Обратимся к утверждению (7). При фиксированном y функция $\partial_y^\beta G(\cdot,y)$ сосредоточена в круге $\{x\,|\,|x|\leqslant|y|\}$, поэтому результат ее применения к гладкой функции f определяется значениями f в окрестности указанного круга. С помощью преобразования Фурье можно получить оценку

$$\left|\left\langle \partial_y^\beta G(x',y), f(x')\right\rangle\right|\leqslant C_{y,\varepsilon}\max_{\substack{|x'|^2\leqslant|y|^2+\varepsilon,\\ |\alpha|\leqslant n+\beta-1}}|\partial^\alpha f(x')|, \qquad (12)$$

где $\varepsilon>0$, а константа $C_{y,\varepsilon}$ остается ограниченной для ограниченных y. Пусть $|x|>|y|$. Положим $f(x')=(\pi h)^{-m}e^{-(x-ix')^2/h}$, $\varepsilon=(|x|^2-|y|^2)/2$. При $|x'|^2\leqslant|y|^2+\varepsilon$ имеем

$$|e^{-(x-ix')^2/h}|/h^m=e^{(x'^2-x^2)/h}/h^m\leqslant e^{(y^2-x^2)/(2h)}/h^m\to 0,\quad h\to 0.$$

Таким же образом можно доказать аналогичное утверждение для производных $\partial_{x'}^\alpha f(x')$. Ввиду (10), (12) мы получаем утверждение (7) для функции φ. Такое же утверждение для производных функции φ доказывается аналогично с применением (11) вместо (10). $\square$

§3. Специальное решение волнового уравнения

Следующая лемма позволяет по решению уравнения Лапласа построить решение волнового уравнения (1).

Лемма 2. *Пусть C^∞-гладкая функция $\varphi(x,y)$ в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет равенствам*

$$\Delta\varphi = 0, \quad \partial_y\varphi|_{y=0} = 0. \tag{13}$$

Тогда функция

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right) ds \tag{14}$$

является C^∞-гладкой на множестве $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, $y > |t|$, и удовлетворяет волновому уравнению

$$\partial_t^2 w - \Delta w = 0. \tag{15}$$

Доказательство. Имеем

$$\pi\partial_y w = \frac{y}{\sqrt{y^2-t^2}}\int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)\sin s\,ds,$$

$$\pi\partial_t w = \frac{-t}{\sqrt{y^2-t^2}}\int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)\sin s\,ds.$$

Далее

$$\pi\partial_y^2 w = \frac{-t^2}{(y^2-t^2)^{3/2}}\int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)\sin s\,ds$$
$$+ \frac{y^2}{y^2-t^2}\int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y^2\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)(\sin s)^2\,ds,$$

$$\pi\partial_t^2 w = \frac{-y^2}{(y^2-t^2)^{3/2}} \int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)\sin s\, ds$$
$$+ \frac{t^2}{y^2-t^2} \int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y^2\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)(\sin s)^2\, ds.$$

Отсюда

$$\pi(\partial_t^2 - \partial_y^2)w = \frac{-1}{\sqrt{y^2-t^2}} \int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)\sin s\, ds$$
$$- \int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y^2\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)(\sin s)^2\, ds.$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части

$$\frac{1}{\sqrt{y^2-t^2}} \int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)\frac{d}{ds}(\cos s)\, ds$$
$$= -\frac{(\partial_y\varphi)(x,0)}{\sqrt{y^2-t^2}} - \int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y^2\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)(\cos s)^2\, ds.$$

Теперь используя второе равенство в (13), получаем

$$\pi(\partial_t^2 - \partial_y^2)w = -\int\limits_0^{\pi/2} (\partial_y^2\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)\, ds.$$

Прибавив к этому выражение

$$-\pi\Delta_x w = -\int\limits_0^{\pi/2} (\Delta_x\varphi)\left(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\right)\, ds,$$

с учетом первого равенства в (13) получаем (15). □

Из определения (14) следует, что w и $\partial_x w$ имеют непрерывные продолжения на множество $\{y \geqslant |t|\}$. Это же верно для $\partial_y w$ и $\partial_t w$, что можно вывести из формул для этих производных, приведенных в начале доказательства леммы 2, и из второго условия в (13). Всюду далее под w и $\partial_{x,y,t}w$ мы будем понимать непрерывные продолжения функции w и ее производных на множество $\{y \geqslant |t|\}$. На границе этого множества выполнено

$$(\partial_y w \pm \partial_t w)\big|_{t=\pm y} = 0. \tag{16}$$

Лемма 3. *Если функция φ является решением задачи Коши* (5), (6), *то для функции $w(x,y,t)$, определенной по формуле* (14), *выполнено*

$$w, \partial_{x,y} w \to 0, \quad h \to 0, \quad \text{при } |x| > y \geqslant |t|; \tag{17}$$

пределы достигаются равномерно на компактах, содержащихся в $\{|x| > y \geqslant |t|\}$.

Доказательство. Для w и $\partial_x w$ утверждение (17) является следствием свойства (7) и формулы (14). Для оценки $\partial_y w$ заметим, что в силу $\partial_y \varphi|_{y=0} = 0$ выполнено

$$\Big|(\partial_y\varphi)\Big(x, \sqrt{y^2-t^2}\cdot\sin s\Big)\Big| \leqslant \sqrt{y^2-t^2} \max_{\tau\in[0,\sqrt{y^2-t^2}]} |(\partial_y^2\varphi)(x,\tau)|.$$

Требуемое утверждение теперь вытекает из (7) и из формулы для $\partial_y w$, приведенной в начале доказательства леммы 2. □

Отметим (хотя нам в дальнейшем это не понадобится), что в (17) условие $|x| > y \geqslant |t|$ можно заменить на более слабое: $\sqrt{x^2+t^2} > y \geqslant |t|$. Отметим также, что для $\sqrt{x^2+t^2} < y$ функция w, вообще говоря, растет экспоненциально быстро при $h \to 0$.

§4. Определение решения u

В этом параграфе мы получим основной результат нашей работы – соотношение, позволяющее определить $u(x^*, y^*, t^*)$ по данным Коши на множестве (3).

Теорема 1. *В условиях параграфа* 1 *для любого решения* $u \in C^2(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ *волнового уравнения* (1) *справедливо равенство*

$$u(x^*, y^*, t^*) = \frac{1}{2}\sum_{\pm} u\,(x^*, Y(x^*), T_\pm(x^*)) \\ + \lim_{h\to 0}\int\limits_S d\sigma_{x,y}\int\limits_{T_-(x)}^{T_+(x)} (u\,\partial_\nu w^* - \partial_\nu u\cdot w^*)\,dt, \tag{18}$$

где $w^*(x, y, t) = w(x-x^*, y-y^*, t-t^*)$*, функция* w *определена в условии леммы* 3*,* $d\sigma$ *– элемент площади на* $\partial\Omega$*.*

Из замечания, сделанного в конце п. 3, следует, что в конусе K функция w^* может расти экспоненциально быстро при $h \to 0$, а значит, подинтегральное выражение в правой части (18) быстро растет. Отсюда следует, что предел интеграла, вообще говоря, не существует, если в формулу (18) подставить произвольные гладкие функции вместо данных Коши u, $\partial_\nu u$. Поэтому если данные Коши известны с погрешностью, этот предел следует аппроксимировать значением интеграла при некотором положительном h. Оптимальное значение h зависит от точности данных Коши. Это характерная особенность задач, требующих регуляризации, таких как задача аналитического продолжения.

Доказательство теоремы 1. Пусть координаты выбраны так, что $(x^*, y^*, t^*) = (0, 0, 0)$. В этом случае $T_\pm(x) = \pm Y(x)$. Наше условие $Y(x) > y^*$, $(x, y) \in \overline{S}$ (см. п. 1) теперь принимает вид $Y(x) > 0$, $(x, y) \in \overline{S}$. Сначала мы докажем (18) в предположении $Y(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. После этого мы рассмотрим общий случай.

По условию роста на функцию $Y(x)$ в (2) множество $K_\Omega = K \cap \overline{\Omega}$ компактно. Поэтому существует финитная C^∞-гладкая функция $\chi(x, y)$ в $\mathbb{R}^n$, равная единице в некоторой окрестности множества K_Ω. Пусть R такое большое число, что проекция носителя $\mathrm{supp}\chi$ на гиперплоскость $(x_1, \dots, x_{n-1})$ содержится в шаре $\{|x| < R\}$. Положим

$$V = \{(x, y, t) \mid |x| < R,\ |t| < y < Y(x)\} \subset \Omega\times\mathbb{R}.$$

Множество V – ограниченная область с липшицевой границей в $\mathbb{R}^{n+1}$. В самом деле, диффеоморфизм

$$(x, y, t) \mapsto (x, y/Y(x), t/Y(x))$$

корректно определен в окрестности множества $\overline{V}$, поскольку $Y(x)$ отделено от нуля при ограниченных x. Остается заметить, что указанный диффеоморфизм переводит V в прямое произведение $\{x \mid |x| < R\} \times \{(y,t) \mid |t| < y < 1\}$ двух липшицевых областей.

Положим $\tilde{u} = \chi u$. Имеем

$$\int\limits_V \left[w \cdot (\partial_t^2 - \Delta)\tilde{u} - \tilde{u} \cdot (\partial_t^2 - \Delta)w\right] dxdydt$$

$$= \int\limits_{\partial V} [(\tilde{u}\,\partial_x w - w\,\partial_x \tilde{u})\nu_x + (\tilde{u}\,\partial_y w - w\,\partial_y \tilde{u})\nu_y$$

$$+(-\tilde{u}\,\partial_t w + w\,\partial_t \tilde{u})\nu_t]\,d\gamma. \quad (19)$$

Здесь $\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_t)$ – внешняя единичная нормаль к ∂V, $\nu_x = (\nu_{x_1}, \ldots, \nu_{x_{n-1}})$, $d\gamma$ – элемент площади на границе ∂V. Для применимости этой формулы достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: *i*) функции $\tilde{u}$ и w являются C^2-гладкими внутри V; *ii*) интеграл в левой части абсолютно сходится; *iii*) функции $\tilde{u}$, w и их первые производные имеют непрерывные продолжения с V на замыкание $\overline{V}$ – в правой части берутся предельные значения производных на границе. Условие (*i*), очевидно, выполняется. Условие (*ii*) вытекает из (15) и того факта, что w ограничена в V, а $\tilde{u}$ является C^2-гладкой в $\overline{V}$. Последнее условие, очевидно, выполняется для $\tilde{u}$, а для w оно следует из замечания, приведенного сразу после доказательства леммы 2.

Определим множество Γ как пересечение ∂V с $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, множества $\Gamma^{\pm}$ – пересечение ∂V с гиперплоскостями $\{\pm t = y\}$. Для всех точек (x,y,t) множества $\partial V \setminus (\Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-)$ выполнено $|x| = R$. Число R было выбрано так, что в этих точках выполнено $\chi = 0$, а значит, $\tilde{u} = 0$. Поэтому интеграл в правой части (19) равен сумме соответствующих интегралов по Γ, Γ^+, Γ^-. Интеграл по Γ^+ равен

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Gamma^+} [(\tilde{u}\,\partial_y w - w\,\partial_y \tilde{u})\nu_y + (-\tilde{u}\,\partial_t w + w\,\partial_t \tilde{u})\nu_t]\,d\gamma \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\Gamma^+} [w\,(\partial_y \tilde{u} + \partial_t \tilde{u}) - \tilde{u}\,(\partial_y w + \partial_t w)]\;d\gamma\end{aligned} \quad (20)$$

(на Γ^+ имеем $\nu_x = 0$, $\nu_t = -\nu_y = 1/\sqrt{2}$). В силу (16) на Γ^+ выполнено $\partial_y w + \partial_t w = 0$. Учитывая также, что $w(x,y,\pm y) = \varphi(x,0)/2$ (это следует из (14)), полученный интеграл равен

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<R} dx\,\varphi(x,0)\int\limits_{0}^{Y(x)}(\partial_y\tilde{u}+\partial_t\tilde{u})(x,y,y)\,dy$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<R} dx\,\varphi(x,0)\int\limits_{0}^{Y(x)}\partial_y(\tilde{u}(x,y,y))\,dy$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<R}\varphi(x,0)\,[\tilde{u}(x,Y(x),Y(x))-\tilde{u}(x,0,0)]\,dx.$$

Аналогично получаем, что интеграл (20) с заменой Γ^+ на Γ^- равен

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<R}\varphi(x,0)\,[\tilde{u}(x,Y(x),-Y(x))-\tilde{u}(x,0,0)]\,dx.$$

Мы получаем, что интеграл в правой части (19) равен

$$\int\limits_{|x|<R}\varphi(x,0)\left[\frac{1}{2}\tilde{u}(x,Y(x),Y(x))+\frac{1}{2}\tilde{u}(x,Y(x),\right.$$
$$\left.-Y(x))-\tilde{u}(x,0,0)\right]dx+\int\limits_{\Gamma}(\tilde{u}\,\partial_\nu w-\partial_\nu\tilde{u}\cdot w)\,d\gamma. \tag{21}$$

Теперь перейдем к пределу $h\to 0$ в равенстве (19). Предел левой части равен нулю. В самом деле, второе слагаемое под интегралом равно нулю в силу (15). Выражение $(\partial_t^2-\Delta)\tilde{u}$ может быть отлично от нуля лишь при условии $\partial_{x,y}\chi\neq 0$. Однако множество таких точек (x,y) отделено от K_Ω согласно нашему выбору функции χ. Тогда в силу (17) первое слагаемое под интегралом в левой части (19) стремится к нулю при $h\to 0$.

Как было показано выше, правая часть (19) равна выражению (21). Согласно первому равенству в (6), $\varphi(x,0)$ равно распределению Гаусса в $\mathbb{R}^{n-1}$, которое стремится к $\delta(x)$ при $h\to 0$. Таким образом, первый интеграл в (21) в пределе $h\to 0$ дает

$$\frac{1}{2}\sum_{\pm}\tilde{u}(0,Y(0),\pm Y(0))-\tilde{u}(0,0,0)=\frac{1}{2}\sum_{\pm}u(0,Y(0),\pm Y(0))-u(0,0,0)$$

(мы воспользовались тем, что $\chi|_{K_\Omega} = 1$). Из определения гиперповерхности Γ следует, что второй интеграл в (21) равен

$$\int\limits_{S_R} d\sigma_{x,y} \int\limits_{-Y(x)}^{Y(x)} (\tilde{u}\,\partial_\nu w - \partial_\nu \tilde{u}\cdot w)\,dt,$$

где $S_R = \{(x,y)\,|\,|x| < R,\ y = Y(x)\} \subset \partial\Omega$. Таким образом, равенство (19) в пределе $h \to 0$ дает

$$u(0,0,0) = \frac{1}{2}\sum_{\pm} u\,(0, Y(0), \pm Y(0)) \\ + \lim_{h\to 0}\int\limits_{S_R} d\sigma_{x,y} \int\limits_{-Y(x)}^{Y(x)} (\tilde{u}\,\partial_\nu w - \partial_\nu \tilde{u}\cdot w)\,dt.$$

Однако, интеграл по S_R можно заменить на интеграл по S. Это следует из того, что множество $S_R \setminus S$ отделено от K_Ω, и в силу (17) на этом множестве подинтегральное выражение стремится к нулю при $h \to 0$. Аналогичным образом в полученном интеграле можно заменить $\tilde{u}$ на u, поскольку множество точек, в которых $\chi \neq 1$, отделено от K_Ω. Таким образом, равенство (18) доказано в случае $Y(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Перейдем к общему случаю, когда функция $Y(x)$ предполагается положительной только при $(x,y) \in \overline{S}$.

Пусть X – проекция замыкания $\overline{S}$ на гиперплоскость $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Имеем $Y(x) > 0$ для $x \in X$, а значит, функция Y положительна и в некоторой окрестности множества X. Поэтому существует C^∞-гладкая функция $\widetilde{Y}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, такая что $\widetilde{Y}|_X = Y|_X$, $0 < \widetilde{Y}(x) \leqslant C$ для $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Введем область

$$\widetilde{\Omega} = \{(x,y)\mid x \in \mathbb{R}^{n-1},\ -\infty < y < \widetilde{Y}(x)\}.$$

Несмотря на то, что функция $\widetilde{Y}$ всюду положительна, приведенное выше доказательство соотношения (18) неприменимо к области $\widetilde{\Omega}$, поскольку решение u, вообще говоря, не определено всюду в $\widetilde{\Omega}\times\mathbb{R}$. Однако, это препятствие может быть устранено подходящим выбором функции χ, введенной в начале доказательства. Мы можем выбрать χ таким образом, чтобы было выполнено $\chi = 1$ в окрестности множества

K_Ω и $\chi(x,y)=0$ для $x \notin X$, поскольку проекция множества K_Ω на гиперплоскость $(x_1,\dots,x_{n-1})$ содержится во внутренности X. Тогда произведение $\tilde{u}=\chi u$ корректно определено для $x \in X$, $y < \widetilde{Y}(x) = Y(x)$, $t \in \mathbb{R}$, и может быть гладко продолжено нулем на оставшуюся часть цилиндра $\widetilde{\Omega} \times \mathbb{R}$. После этого можно повторить приведенное выше доказательство соотношения (18). $\square$

В доказательстве теоремы 1 не обязательно, чтобы решение u уравнения (1) было определено всюду в $\Omega \times \mathbb{R}$. Предположим, что уравнение (1) выполняется при $t \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \Omega \setminus \omega$, где ω – относительно замкнутое подмножество Ω. Тогда формула (18) верна, если конус K отделен от ω (из чего также следует, что $(x^*,y^*) \in \Omega \setminus \omega$), см. рис. 1. При выводе этой формулы достаточно выбрать гладкую функцию χ так, чтобы в окрестности множества ω было выполнено $\chi = 0$. После этого произведение χu можно продолжить нулем на $\omega \times \mathbb{R}$ и рассматривать его как функцию, определенную в $\Omega \times \mathbb{R}$. Далее вывод формулы (18) проводится без изменений.

Автор благодарен М. И. Белишеву и А. П. Киселеву за полезные обсуждения.

Список литературы

1. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations* (*2nd Ed.*). — Applied Mathematical Sciences **127**, Springer (2006).
2. М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Москва, Наука (1980).
3. D. Tataru, *Unique Continuation for Solutions to PDE's; Between Hörmander's Theorem and Holmgren's Theorem.* — Commun. Partial Diff. Equations **20**, Nos. 5–6 (1995), 855–884.
4. S. I. Kabanikhin, D. B. Nurseitov, M. A. Shishlenin, B. B. Sholpanbaev, *Inverse problems for the ground penetrating radar.* — J. Inverse Ill-Posed Probl. **21** (2013), 885–892.
5. F. Natterer, *Photo-acoustic inversion in convex domains.* — Inverse Probl. Imaging **6**, No. 2 (2012), 315–320.
6. R. A. Kruger, P. Liu, Y. Fang, C. R. Appledorn, *Photoacoustic ultrasound* (*PAUS*) *– Reconstruction tomography.* — Medical Physics **22** (1995), 1605–1609.
7. T. A. Voronina, V. A. Tcheverda, V. V. Voronin, *Some properties of the inverse operator for a tsunami source recovery.* — Siberian Electronic Mathematical Reports **11** (2014), 532–547.
8. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse problems **23**, No. 5 (2007), 1–67.

9. М. Н. Демченко, *Динамическая трехмерная обратная задача для системы Максвелла.* — Алгебра и анализ **23**, No. 6 (2011), 31–78.
10. M. I. Belishev, M. N. Demchenko, *Elements of noncommutative geometry in inverse problems on manifolds.* — J. Geometry and Physics **78** (2014), 29–47.
11. A. S. Blagoveshchensky, F. N. Podymaka, *On a Cauchy problem for the wave equation with data on a time-like hyperplane.* — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (2016), pp. 31–34.
12. E. T. Quinto, A. Rieder, T. Schuster, *Local inversion of the sonar transform regularized by the approximate inverse.* — Inverse Problems **27**, No. 3 (2011), 035006.
13. D. Finch, S. K. Patch, Rakesh, *Determining a Function from Its Mean Values Over a Family of Spheres.* — SIAM J. Math. Anal. **35**, No. 5 (2004), 1213–1240.
14. D. Finch, M. Haltmeier, Rakesh, *Inversion of spherical means and the wave equation in even dimensions.* — SIAM J. Appl. Math. **68** (2007), 392–412.
15. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики.* Том 2 *Уравнения с частными производными.* Мир, Москва (1964).
16. V. P. Palamodov, *Reconstruction from Limited Data of Arc Means.* — J. Fourier Anal. Appl. **6**, No. 1 (2000), 25–42.
17. M. N. Demchenko, *Reconstruction of solution to the wave equation from Cauchy data on the boundary.* — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (2018), 66–70.
18. Л. Хермандер *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Том 1 *Теория распределений и анализ Фурье.* Москва, Мир (1986).

Demchenko M. N. On the Cauchy problem for the wave equation with data on the boundary.

We consider the Cauchy problem for the wave equation in $\Omega \times \mathbb{R}$ with data given on some part of the boundary $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. We provide a reconstruction algorithm for this problem based on analytic expressions. Our result is applicable to the problem of determining nonstationary wave field arising in geophysics, photoacoustic tomography, tsunami wave source recovery.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН.
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 1 ноября 2018 г.