Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 471, 2018 г.

А. С. Благовещенский

О ВОЛНАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ИСТОЧНИКАМИ, ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ.

Пространство-время $\mathbb{R}^4$ компактифицируется с помощью присоединения многообразия бесконечно удаленных точек. Ставится и решается задача построения решения волнового уравнения с правой частью (источником волн) – обобщенной функцией с носителем на многообразии бесконечно удаленных точек. Формулируются условия, которым должен удовлетворять источник. Эти условия имеют весьма жесткий характер.

1. В данной статье рассматривается волновое уравнение

$$U_{tt} - \triangle_X U = \Phi(X,t). \tag{1}$$

Здесь $X = \{X_1, X_2, X_3\} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, Δ_X – оператор Лапласа по переменным X.

Уравнение (1) описывает распространение волн, порожденных источниками, распределенными в пространстве-времени. Распределение источников задается правой частью $\Phi(X,t)$. Тождественное равенство нулю функции $\Phi(X,t)$ означает отсутствие источников волн, находящихся на конечном расстоянии. В связи с этим возникает вопрос: существовали ли эти волны вечно? или все-таки "на бесконечности" существовал источник, породивший эти волны? Несмотря на то, что постановка вопроса представляется надуманной, она допускает строгую математическую, естественную в некотором смысле формулировку.

Основная идея дальнейшего рассмотрения заключается в том, что мы осуществляем компактификацию пространства $\mathbb{R}^4$, присоединяя к нему многообразие бесконечно удаленных точек и рассматриваем уравнение (1) на компактифицированном пространстве $\mathbb{R}^4$. Волновым полем, отвечающим бесконечно удаленным источникам, естественно назвать решение уравнения (1), где в правой части стоит обобщенная функция, сосредоточенная на этом бесконечно удаленном многообразии. Указанная программа была реализована в работе [1], где

Ключевые слова: волновое уравнение, функция описывающая источник, двойное преобразование Кельвина, предельный переход.

Исследование выполнено при поддержке гранта СПбГУ No. 11.38.263.2014.

описаны источники типа δ-функции, сосредоточенной на бесконечно удаленном многообразии, и соответствующие им волновые поля, причем оказалось, что функция, описывающая такие источники, должна удовлетворять весьма жестким ограничениям. В статье [2] с обсуждаемой здесь точки зрения рассмотрены плоские волны. В настоящей работе удалось существенно расширить класс допустимых источников. Точные формулировки – в разделе 6. Условия на функции, задающие источники, формулируются в терминах преобразования Радона или преобразования Фурье (формулы (25) и (28)).

2. Для выбора естественного способа компактификации пространства $\mathbb{R}^4$ обратим внимание на следующее, легко проверяемое свойство волнового уравнения (1).

Пусть $U(X,t)$ – произвольное решение однородного уравнения (1), достаточно быстро убывающее на бесконечности в пространственных направлениях (т.е. при $X \to \infty$). Пусть точка (X,t) стремится к бесконечности так, что $X(t) = (t+p)\omega + \Delta X(t)$, где $\omega \in \mathbb{R}^3$ – произвольный фиксированный единичный вектор ($|\omega|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1$), $p \in \mathbb{R}$, p – фиксированная константа, $t \to \pm\infty$; $\Delta X(t)$ обладает свойствами:

1) $|\Delta X(t)| = o(t)$,

2) $2t\langle\omega, \Delta X(t)\rangle + |\Delta X(t)|^2 = o(t)$, $\langle\omega, \Delta X\rangle := \Sigma\omega_i \Delta X_i$.

Такой способ ухода на бесконечность ($[p,\omega]$-стремление) означает, грубо говоря, что точка уходит на бесконечность со скоростью, равной единице, т.е. скоростью распространения волн.

Существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} tU(X(t),t) = f(p,\omega)$*, не зависящий от выбора* $\Delta X(t)$*, удовлетворяющего условиям* 1), 2).

Обратим специально внимание на то, что величина предела не зависит от того, стремится ли t к плюс или минус бесконечности. Если же точка уходит на бесконечность со скоростью большей или меньшей скорости волн, т.е. в пространственном или времени-подобном направлении, то указанный предел есть нуль. Эти факты легко могут быть доказаны с помощью явных формул для решения задачи Коши, [3 с. 204, 4].

Высказанные соображения делают естественным следующий способ компактификации пространства $\mathbb{R}^4$. Присоединим к пространству бесконечно удаленные точки, получающиеся при $[p,\omega]$-стремлении точек к бесконечности, при этом отождествим точки, получающиеся при

$t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ при фиксированных p и ω. Все бесконечно удаленные точки, получающиеся при уходе точки на бесконечность в нехарактеристическом направлении, отождествим. Множество пар $(p, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, дополненное точкой $p = \infty$, можно рассматривать как параметризацию на множестве бесконечно удаленных точек.

Отметим специальный случай $[p, \omega]$-стремления к бесконечности, когда $\Delta X(t)$ не зависит от t; $X(t)$ уходит на бесконечность вдоль характеристической прямой

$$X(t) = \omega(t + p) + \Delta X. \tag{2}$$

Свойства 1), 2) выполнены, если $\langle \omega, \Delta X \rangle = 0$. Прямые (2) заметают характеристическую плоскость в $\mathbb{R}^4$

$$\langle \omega, X \rangle - t = p.$$

Тем самым пары (p, ω) можно рассматривать и как параметры, задающие характеристические плоскости.

Компактифицированное пространство приобретает структуру C^∞-многообразия. Чтобы доказать это, достаточно указать окрестности бесконечно удаленных точек, диффеоморфные шару в $\mathbb{R}^4$ и координаты в этих окрестностях.

Введем предварительно операцию инверсии[1] относительно точки X^*, t^*:

$$(X, t) \xrightarrow{J_{X^*,t^*}} (\xi, \tau),$$

где $\xi = \frac{X - X^*}{(t-t^*)^2 - |X - X^*|^2}$, $\tau = \frac{t - t^*}{(t-t^*)^2 - |X - X^*|^2}$. Пусть точка (X, t) $[p, \omega]$-стремится к бесконечности. Тогда при условии, что $\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p \neq 0$, $\xi \to \widehat{\xi} = \frac{\omega}{2(\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p)}$, $\tau \to \widehat{\tau} = \frac{1}{2(\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p)}$. Очевидно, точка $(\widehat{\xi}, \widehat{\tau})$ лежит на конусе $\widehat{\tau}^2 - \widehat{\xi}^2 = 0$. Примем за координаты в окрестности бесконечно удаленной точки (p, ω) декартовы координаты (ξ, τ) в окрестности $(\widehat{\xi}, \widehat{\tau})$ – образа бесконечно удаленной точки (p, ω) при инверсии J_{X^*,t^*}. Ограничение $\langle \omega, X^* \rangle - t^* - p \neq 0$ на (p, ω) легко снимается с помощью изменения выбора точки (X^*, t^*). Тем самым компактифицированное пространство $\mathbb{R}^4$ приобретает структуру бесконечно дифференцируемого многообразия. Можно показать ([5 с. 354, 6]), что указанное

[1] Преобразование инверсии в совокупности с преобразованиями Лоренца, сдвига и растяжения образуют конформную группу преобразований псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$.

многообразие диффеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ с отождествленными противоположными точками.

3. Преобразование инверсии тесно связано с уравнением (1). А именно: пусть $U(X,t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1). Тогда функция

$$V(\xi,\tau) =: KU = \frac{1}{\tau^2 - |\xi|^2} U\left(\frac{\xi}{\tau^2 - |\xi|^2}, \frac{\tau}{\tau^2 - |\xi|^2}\right) \tag{3}$$

при $\tau^2 - |\xi|^2 \neq 0$ также удовлетворяет уравнению

$$V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V = 0.$$

Преобразование (3) носит название преобразование Кельвина (Отметим также, что некоторые предпочитают называть его преобразованием Бейтмена [7]). Преобразование Кельвина может быть построено с помощью инверсии относительно любой точки (X^*, t^*).

Определение. *Пусть функция V удовлетворяет уравнению*

$$V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V = \Phi(\xi,\tau),$$

где $\Phi(\xi,\tau)$ – есть обобщенная функция с носителем на конусе $\tau^2 = \xi^2$ (образе многообразия точек на бесконечности). Будем интерпретировать функцию $U(X,t) = (K^{-1}V)(X,t)$ как волновое поле, порожденное источниками, локализованными на бесконечности.

4. Примеры. Здесь рассмотрено с указанных выше позиций два хорошо известных решения волнового уравнения.

Пример 1. Плоская волна. Пусть $U = f\big(t - \langle X, \omega_0\rangle\big)$, где ω_0 – единичный вектор, точка (X,t) $[p,\omega]$-стремится к бесконечности. Для простоты будем рассматривать простейшую реализацию $[p,\omega]$-стремления точки к бесконечности: $X(t) = (t+p)\omega$ $(t \to \infty)$. Функцию f предполагаем финитной и бесконечно дифференцируемой. Очевидно, при $\omega \neq \omega_0$ $\lim\limits_{t\to\infty} tf\big(t-(t+p)\langle\omega,\omega_0\rangle\big) = 0$, при $\omega = \omega_0$ и $f(-p) \neq 0$ этот предел равен бесконечности. Эти соображения подсказывают, что указанный предел является обобщенной функцией от переменных p, ω.

Справедливо утверждение: $[p,\omega]$-предел

$$\lim_{t\to\pm\infty} tU\big(X(t),t\big) = 2\pi\delta_{\omega_0}(\omega) g^{\pm}(p),$$

где $g^+(p) = \int\limits_{-p}^{\infty} f(s)\,ds$, $\quad g^-(p) = -\int\limits_{-\infty}^{-p} f(s)\,ds$, $\quad \delta_{\omega_0}(\omega)$ – дельта функция на единичной сфере, сосредоточенная в точке ω_0.

Действительно, рассмотрим функционал

$$t(U,\psi) = t\iint f\big(t-(t+p)\langle\omega,\omega_0\rangle\big)\psi(p,\omega)\,dp\,dS_\omega.$$

Здесь $\psi(p,\omega) = \psi(p,\theta,\varphi)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2$, финитная по переменной p; θ, φ – сферические координаты на единичной сфере, угол θ отсчитывается от направления ω_0.

Пусть $\widehat{\psi}(p,\cos\theta) = \int\limits_0^{2\pi}\psi(p,\theta,\varphi)\,d\varphi$. Легко видеть, что функция $\widehat{\psi}(p,\sigma)$ бесконечно дифференцируема на полосе $\mathbb{R}\times[-1,1]$, финитна по p, $\widehat{\psi}(p,1) = 2\pi\psi(p,\omega_0)$. Тогда функционал $t(U,\psi)$ приобретает вид:

$$t(U,\psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\,t\int\limits_0^{\pi} f\big(t-(t+p)\cos\theta\big)\widehat{\psi}(p,\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\,t\int\limits_{-1}^{1} f\big(t-(t+p)\sigma\big)\widehat{\psi}(p,\sigma)\,d\sigma.$$

Заметим, что функция $tf\big(t-(t+p)\sigma\big)$ обладает свойствами:

1) Интеграл $t\int\limits_a^b f\big(t-(t+p)\sigma\big)d\sigma = -\frac{t}{t+p}\int\limits_{t(1-a)-ap}^{t(1-b)-bp} f(s)\,ds$ ограничен при всех $(a,b)\in[-1,1]$.

2) Этот интеграл стремится к нулю при всех $b<1$, $t\to\infty$. При $b=1$ $\quad\lim\limits_{t\to\pm\infty} t\int\limits_a^1 f\big(t-(t+p)\sigma\big)d\sigma \to g^\pm(p)$.

Свойства 1), 2) означают, что функция $tf\big(t-(t+p)\sigma\big)\to\delta(\sigma)g^\pm(p)$, функционал $t(U,\psi)\to 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\,g^\pm(p)\psi(p,\omega_0)$.

Заметим, что “скачок” плоской волны на бесконечности, т.е. разность $[p,\omega]$-пределов при $t\to\pm\infty$ есть $2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds\,\delta_{\omega_0}(\omega)$. В частности, плоская волна непрерывна на бесконечности, если нулевой момент функции $f(s)$ равен нулю.

Пример 2. Фундаментальное решение волнового уравнения.

$$E^+(t-t_0,X)=\frac{1}{2\pi}\epsilon(t-t_0)\delta\big((t-t_0)^2-X^2\big)\quad (t_0>0).$$

Здесь $\epsilon(\,\cdot\,)$ – функция Хевисайда.

$$\begin{aligned}
KE^+ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\epsilon\Big(\frac{\tau}{\gamma}-t_0\Big)\,\delta\Big(\Big(\frac{\tau}{\gamma}-t_0\Big)^2-\frac{\xi^2}{\gamma^2}\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\epsilon\Big(\frac{\tau}{\gamma}-t_0\Big)\,\delta\Big(\frac{\tau^2-\xi^2}{\gamma^2}-2\frac{\tau t_0}{\gamma}+t_0^2\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\epsilon\Big(\frac{\tau}{\gamma}-t_0\Big)\,\delta\Big(\frac{1}{\gamma}-2\frac{\tau t_0}{\gamma}+t_0^2\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi t_0^2}\operatorname{sgn}\gamma\,\epsilon\Big(\frac{\tau}{2\tau\tau_0-\tau_0^2}-\frac{1}{\tau_0}\Big)\,\delta\big((\tau-\tau_0)^2-\xi^2\big)\\
&= \frac{1}{2\pi t_0^2}\;\epsilon\Big((\tau_0-\tau)\Big(\tau-\frac{\tau_0}{2}\Big)\Big)\,\delta\big((\tau-\tau_0)^2-\xi^2\big)\,,
\end{aligned}$$

где $\gamma=\tau^2-\xi^2$, $\tau_0=t_0^{-1}$.

Тем самым $(KE^+)(\xi,\tau)$ при $\tau>\frac{\tau_0}{2}$ в терминах переменных ξ, τ пропорциональна антипричинному фундаментальному решению $E^-=E^+(\tau_0-\tau,\xi)$. Функция $\Box_{\xi,\tau}(KE^+)(\xi,\tau)$ отлична от нуля в точке $(0,\tau_0)$ (образе точки $(0,t_0)$ при инверсии) и при $\tau^2=\xi^2$, $\tau=\tau_0/2$. Это означает, что $E^+(X,t)$ описывает поле, порожденное: 1) точечным источником, сосредоточенным в точке $(0,t_0)$, и 2) источниками на пересечении конуса $t-t_0=|X|/2$ с бесконечностью.

5. Здесь и в дальнейшем нам будет удобно, вместо обозначения координат (X_1,X_2,X_3,t), использовать обозначение (x,z,t) (соответственно (ξ,ζ,τ)), где $x=(x_1,x_2)=(X_1,X_2)$, $z=X_3$, $(x,z,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$. Под x^2 в дальнейшем понимаем $x_1^2+x_2^2$, $\Gamma=t^2-x^2-z^2$, $(x,y):=x_1y_1+x_2y_2$.

Далее вместо преобразования Кельвина используем композицию $\widetilde{K}$ двух преобразований Кельвина: первое, опирающееся на инверсию относительно точки $(0,0,0)$:

$$(x,z,t)\to(x',z',t'),\quad x'=\frac{x}{t^2-x^2-z^2},$$

$$z'=\frac{z}{t^2-x^2-z^2},\quad t'=\frac{t}{t^2-x^2-z^2},$$

второе – относительно точки $x' = 0$, $z' = t' = \frac{1}{2h}$: $(x', z', t') \to (\xi, \zeta, \tau)$, т.е.

$$\xi = \frac{x'}{(t'-1/2h)^2 - x'^2 - (z'-1/2h)^2},$$

$$\zeta = \frac{z'-1/2h}{(t'-1/2h)^2 - x'^2 - (z'-1/2h)^2},$$

$$\tau = \frac{t'-1/2h}{(t'-1/2h)^2 - x'^2 - (z'-1/2h)^2}.$$

Итоговое преобразование $(x, z, t) \to (\xi, \zeta, \tau)$ имеет вид:

$$\xi = \frac{xh}{h-t+z}, \quad \zeta = \frac{zh - \Gamma/2}{h-t+z}, \quad \tau = \frac{th - \Gamma/2}{h-t+z}. \tag{4}$$

Формула обращения этой двойной инверсии:

$$x = \frac{\xi h}{h+\tau-\zeta}, \quad z = \frac{\zeta h + \gamma/2}{h+\tau-\zeta}, \quad t = \frac{\tau h + \gamma/2}{h+\tau-\zeta}. \tag{4a}$$

Отметим полезное соотношение

$$h - t + z = \frac{h^2}{h+\tau-\zeta}. \tag{5}$$

Плоскость $h + \tau - \zeta = 0$ является образом многообразия бесконечно удаленных точек. После перехода к координатам (ξ, ζ, τ) возникает в свою очередь многообразие бесконечно удаленных точек, получающихся при стремлении к бесконечности координат (ξ, ζ, τ). Плоскость $h - t + z = 0$ является прообразом этого многообразия. Найдем вид вышеупомянутого двукратного преобразования Кельвина $\widetilde{K}$:

$$\begin{aligned} &U(x,z,t) \to W(x',z',t') = \frac{1}{\Gamma'} U\Big(\frac{x'}{\Gamma'}, \frac{z'}{\Gamma'}, \frac{t'}{\Gamma'}\Big) \to V(\xi,\zeta,\tau) \\ &= \frac{1}{\gamma} W\Big(\frac{\xi}{\gamma}, \frac{\zeta}{\gamma} + \frac{1}{2h}, \frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{2h}\Big) = \frac{1}{\gamma\Gamma'} U\Big(\frac{\xi h}{h+\tau-\zeta}, \frac{\zeta h + \gamma/2}{h+\tau-\zeta}, \frac{\tau h + \gamma/2}{h+\tau-\zeta}\Big). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma' = t'^2 - x'^2 - z'^2 &= \Big(\frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{2h}\Big)^2 - \Big(\frac{\zeta}{\gamma} + \frac{1}{2h}\Big)^2 - \frac{\xi^2}{\gamma^2} \\ &= \frac{\tau^2 - \zeta^2 - \xi^2}{\gamma^2} + \frac{\tau - \zeta}{h\gamma} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\tau-\zeta}{h\gamma} = \frac{h+\tau-\zeta}{h\gamma}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$V(\xi,\zeta,\tau) = (\widetilde{K}U)(\xi,\zeta,\tau) = \frac{h}{h+\tau-\zeta}U\Big(\frac{\xi h}{h+\tau-\zeta}, \frac{\zeta h+\gamma/2}{h+\tau-\zeta}, \frac{\tau h+\gamma/2}{h+\tau-\zeta}\Big). \qquad (6)$$

Формула обращения преобразования $\widetilde{K}$ имеет вид:

$$(\widetilde{K}^{-1}V)(x,z,t) = U(x,z,t) = \frac{h}{h-t+z}V\Big(\frac{xh}{h-t+z}, \frac{zh-\Gamma/2}{h-t+z}, \frac{th-\Gamma/2}{h-t+z}\Big). \qquad (7)$$

6. *Далее под волновым полем, порожденным источниками на бесконечности будем понимать решение однородного уравнения* (1) *при* $(X,t) \in \mathbb{R}^4$*, имеющее вид* (7)*, где функция* $V(\xi,\zeta,\tau)$ *удовлетворяет уравнению:*

$$V_{\tau\tau} - \Delta_\xi V - V_{\zeta\zeta} = F(\xi,\zeta,\tau), \qquad (8)$$

причем $F(\xi,\zeta,\tau)$ *– обобщенная функция с носителем на плоскости* $h+\tau-\zeta=0$ – образе множества бесконечно удаленных точек.

Будем далее предполагать, что $F(\xi,\zeta,\tau)$ имеет вид конечной суммы:

$$F(\xi,\zeta,\tau) = \sum_{k=0}^{m} \delta^{(k)}(h+\tau-\zeta)\, f_k(\xi,\zeta), \qquad (9)$$

где $f_k(\xi,\zeta) \in Z$. Здесь через Z обозначено множество бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих при некотором β (зависящем от f), любом $\sigma \geqslant 0$ и любом мультииндексе $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ оценкам

$$\Big|\frac{\partial^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\partial\xi_2^{\alpha_2}\partial\zeta^{\alpha_3}} f(\xi,\zeta)\Big| \leqslant \frac{M_{\alpha\sigma}|1+\zeta^2|^\beta}{(1+\xi^2)^\sigma}. \qquad (10)$$

(Мы выделяем направление ζ, так как стремление ζ к бесконечности при $h+\tau-\zeta=0$ в терминах промежуточных координат (x',z',t') означает стремление точки к вершине конуса $\Gamma'=0$ – особой точке многообразия бесконечно удаленных точек).

7. Решение уравнения (8) будем строить с помощью свертки функции $F(\xi,\zeta,\tau)$ и фундаментального решения волнового уравнения. В большинстве приложений используется фундаментальное решение

$$E^+(\xi,\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(\tau)\delta(\tau^2-\xi^2-\zeta^2),$$

где $\varepsilon(\tau)$ – функция Хевисайда. Решение $E^+(\xi,\zeta,\tau)$ удовлетворяет принципу причинности. В нашей ситуации однако роль принципа причинности представляется сомнительной в связи с тем, что в сколь угодно малой (в терминах переменных (ξ,ζ,τ)) окрестности образа бесконечно удаленной точки находятся как точки, являющиеся образами точек, расположенных в далеком прошлом, так и в отдаленном будущем. Поэтому мы будем использовать как причинное фундаментальное решение $E^+(\xi,\zeta,\tau)$, так и антипричинное $E^-(\xi,\zeta,\tau) = E(\xi,\zeta,-\tau)$.

Представим каждую функцию $f_k(\xi,\zeta)$ в виде суммы

$$f_k(\xi,\zeta) = f_k^+(\xi,\zeta) + f_k^-(\xi,\zeta),$$

где каждое из слагаемых принадлежит Z, в остальном разбиение произвольно. Построим решение уравнения (8) в виде

$$V = \sum_{k=0}^{m} \left(V_k^+ + V_k^-\right),$$

где

$$\begin{aligned} V_k^\pm &= E^\pm(\tau,\xi,\zeta) * \left(\delta^{(k)}(h+\tau-\zeta) f_k^\pm(\xi,\zeta)\right) \\ &= \frac{\partial^k}{\partial\tau^k} E^\pm(\tau,\xi,\zeta) * \left(\delta(h+\tau-\zeta) f_k^\pm(\xi,\zeta)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Свертки в формуле (11) определены, так как интегрирование в них (см. далее формулы (12),(13)) фактически производится по параболоиду. Уход ζ' на бесконечность означает одновременно и стремление ξ' к бесконечности пропорционально $\sqrt{|\zeta'|}$. Выбирая показатель σ в оценке (10) достаточно большим, всегда можно добиться сколь угодно быстрого степенного убывания подынтегральной функции.

Рассмотрим V_k^+,

$$\begin{aligned} V_k^+ = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k} \int\limits_{\tau'<\tau} &\delta\Big((\tau-\tau')^2 - (\zeta-\zeta')^2 - (\xi-\xi')^2\Big) \\ &\times \delta(h+\tau'-\zeta') f_k^+(\xi',\zeta') d\xi'\, d\zeta' d\tau' \\ = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k} \int\limits_{\zeta'-h<\tau} &\delta\Big((\tau-\zeta'+h)^2 - (\zeta-\zeta')^2 - (\xi-\xi')^2\Big) f_k^+(\xi',\zeta')\, d\xi'\, d\zeta'. \end{aligned}$$

Очевидно, при $\tau < \zeta - h$ носитель δ-функции, стоящей под знаком интеграла, не пересекается с полупространством $\zeta' < \tau + h$ и $V_k^+(\xi,\zeta,\tau) = 0$.

При $\tau > \zeta - h$ носитель δ-функции полностью помещается в полупространстве $\zeta' - h < \tau$; тем самым указание $\zeta' - h < \tau$ под знаком интеграла является излишним, V_k^+ может быть записано в виде

$$V_k^+(\xi,\zeta,\tau) = \varepsilon(\tau-\zeta+h) \times \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\int \delta\Big((\tau-\zeta'+h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f_k^+(\xi',\zeta')\,d\xi' d\zeta'. \quad (12)$$

Аналогично

$$V_k^-(\xi,\zeta,\tau) = \varepsilon(\zeta-\tau-h) \times \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\int \delta\Big((\tau-\zeta'+h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f_k^-(\xi',\zeta')\,d\xi' d\zeta'. \quad (13)$$

8. Преобразуем выражение для

$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\int \delta\Big((\tau-\zeta'+h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'.$$

Пусть $k=1$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int \delta\Big((\tau+h-\zeta')^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= 2\int (\tau+h-\zeta')\delta'\Big((\tau+h-\zeta')^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= 2\int \delta'\Big((2\zeta'-\tau-h-\zeta)(\zeta-\tau-h)-(\xi-\xi')^2\Big)(\tau+h-\zeta') f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'. \quad (14)$$

Так как $\delta'\big((2\zeta'-\tau-h-\zeta)(\zeta-\tau-h)-(\xi-\xi')^2\big)$ можно представить в виде $\frac{1}{2(\zeta-\tau-h)}\frac{\partial}{\partial\zeta'}\delta'\big((2\zeta'-\tau-h-\zeta)(\zeta-\tau-h)-(\xi-\xi')^2\big)$, то равенство (14) можно продолжить

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int \delta\Big((\tau-\zeta'-h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= \frac{1}{\zeta-\tau-h}\int \delta\Big((\tau-\zeta'-h)^2-(\zeta-\zeta')^2-(\xi-\xi')^2\Big)\frac{\partial}{\partial\zeta'}(\zeta'-\tau-h) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$

$$= \int \delta(\Lambda) b^{-1}\sum_{j=0}^{1} P_{1j}(a,b)\frac{\partial}{\partial\zeta'} f(\xi',\zeta')\,d\xi' d\zeta', \quad (15)$$

где аргумент δ-функции обозначен через Λ, $\tau+h-\zeta' =: a$, $\tau+h-\zeta =: b$. Справедливо представление

$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\int \delta(\Lambda) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta' = b^{-k}\int \delta(\Lambda)\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(a,b)\,\frac{\partial j}{\partial\zeta'^j} f(\xi',\zeta') d\xi'\,d\zeta', \quad (16)$$

где P_{kj} – однородные полиномы степени j своих аргументов. Докажем это представление с помощью индукции. При $k=1$ оно верно (формула (15)). Пусть оно верно при каком-то k, тогда

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial\tau^{k+1}}\int \delta(\Lambda) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$
$$= \frac{\partial}{\partial\tau}\int \delta(\Lambda) b^{-k}\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(a,b)\frac{\partial j}{\partial\zeta'^j} f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$
$$= \int \frac{\partial}{\partial\tau}\big(\delta(\Lambda)\big)\cdot b^{-k}\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(a,b)\frac{\partial j}{\partial\zeta'^j} f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$
$$+ \int \delta(\Lambda)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(b^{-k}\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(a,b)\Big)\frac{\partial j}{\partial\zeta'^j} f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'.$$

Аналогично предыдущему, имеем:

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial\tau^{k+1}}\int \delta(\Lambda) f(\xi',\zeta')\,d\xi'\,d\zeta'$$
$$= \int \delta(\Lambda)\frac{\partial}{\partial\zeta'}\cdot\Big(ab^{-k-1}\cdot\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(a,b)\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^j} f(\xi',\zeta')\Big)\,d\xi'\,d\zeta'$$
$$+ \int \delta(\Lambda)\Big(-kb^{-k-1}\cdot\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(a,b)\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^j} f(\xi',\zeta')$$
$$+ b^{-k}\sum_{j=0}^{k}\Big(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\Big)P_{kj}(a,b)\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^j} f(\xi',\zeta')\Big)\,d\xi'\,d\zeta'$$
$$= \int \delta(\Lambda) b^{-k-1}\Big(-\sum_{j=0}^{k}\big(P_{kj}(a,b) + a\frac{\partial}{\partial a}P_{kj}(a,b)\big)\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^j} f(\xi',\zeta')$$

$$
\begin{aligned}
&+ a\sum_{j=0}^{k+1} P_{kj}(a,b)\frac{\partial^{j+1}}{\partial \zeta'^{j+1}} f(\xi',\zeta') - k\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(a,b)\frac{\partial^{j}}{\partial \zeta'^{j}} f(\xi',\zeta') \\
&+ b\sum_{j=0}^{k}\Big(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\Big)P_{kj}(a,b)\frac{\partial^{j}}{\partial \zeta'^{j}} f(\xi',\zeta')\Big)\, d\xi'\, d\zeta' \\
&= \int \delta(\Lambda) b^{-k-1}\cdot\sum_{j=0}^{k+1} P_{k+1,j}(a,b)\frac{\partial^{j}}{\partial \zeta'^{j}} f(\xi',\zeta')\, d\xi'\, d\zeta'.
\end{aligned}
$$

Формула (16) доказана, причем для полиномов $P_{kj}(a,b)$ имеет место рекуррентное соотношение

$$
\begin{aligned}
&P_{k+1,j}(a,b) \\
&= -P_{kj}(a,b) - a\frac{\partial}{\partial a}P_{kj}(a,b) + aP_{k,j-1}(a,b) - kP_{kj}(a,b) + b\Big(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\Big)P_{kj}(a,b)
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
P_{k+1,j}(a,b) &= -(1+k)P_{kj}(a,b) \\
&\quad - a\frac{\partial}{\partial a}P_{kj}(a,b) + b\Big(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\Big)P_{kj}(a,b) + aP_{k,j-1}(a,b). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Соотношение (17) верно при всех $j = 0,\dots k+1$, если принять, что $P_{k,-1}(a,b) = P_{k,k+1}(a,b) = 0$, $\quad P_{00}(a,b) = 1$. Выпишем несколько первых полиномов $P_{kj}(a,b)$:

$$
P_{00}(a,b) = 1,\ \ P_{10}(a,b) = -1,\ \ P_{11}(a,b) = a,\ \ P_{20}(a,b) = 2!,
$$

$$
P_{21}(a,b) = -4a+b,\ \ P_{22}(a,b) = a^2,\ \ P_{30}(a,b) = -3!,\ \ P_{31}(a,b) = 18a-3b,
$$

$$
P_{32}(a,b) = -9a^2+3ab,\ \ P_{33}(a,b) = a^3
$$

и т.д. В частности, при всех k :

$$
P_{k0} = (-1)^k k!, \quad P_{kk} = a^k. \qquad (18)
$$

Итак, построенное решение уравнения (8) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
V(\xi,\zeta,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}(\tau+h-\zeta)^{-k}\int \delta(\Lambda)\sum_{j=0}^{k} P_{kj}(\tau+h-\zeta',\tau+h-\zeta) \\
&\times\frac{\partial^j}{\partial\zeta'^j}\Big(\epsilon(\tau+h-\zeta)f_k^{+}(\xi',\zeta') + \epsilon(\zeta-\tau-h)f_k^{-}(\xi',\zeta')\Big)\, d\xi'\, d\zeta'. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

9. Перейдем в выражении (19) к исходным функции U и переменным (x, z, t). В силу формулы (7):

$$U(x,z,t) = \frac{h}{h-t+z} V\Big(\frac{hx}{h-t+z}, \frac{hz-\Gamma/2}{h-t+z}, \frac{ht-\Gamma/2}{h-t+z}\Big).$$

Выполним сначала подстановку в аргументе δ-функции Λ: с учетом того, что

$$\tau + h + \zeta = \frac{x^2 + (z+h)^2 - t^2}{t-h-z} = \frac{x^2}{t-h-z} - (t+z+h),$$

$$\tau + h - \zeta = -\frac{h^2}{h-t+z},$$

$$\Lambda = \Big(2\zeta' + \frac{x^2}{t-h-z} - (t+z+h)\Big)\frac{h^2}{t-h-z} - \xi'^2 - \frac{2(x,\xi')h}{t-h-z} - \frac{x^2h^2}{(t-h-z)^2}$$
$$= \frac{2h^2}{t-h-z}\Big(\zeta' - \xi'^2\frac{t-h-z}{2h^2} + \frac{(x,\xi')}{h} - \frac{t+h+z}{2}\Big).$$

С учетом однородности δ-функции и однородности полиномов P_{kj}, а также формулы (5), получаем:

$$U(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{h^{2k+1}}\iint \delta\Big(\zeta' - \xi'^2\frac{t-h-z}{2h^2} + \frac{(x,\xi')}{h} - \frac{t+h+z}{2}\Big)$$
$$\times \sum_{j=0}^{k}(h-t+z)^{k-j}P_{kj}\Big(h^2 + hz - \Gamma/2 - (h-t+z)\zeta', h^2\Big)$$
$$\times \frac{\partial^j}{\partial\zeta'^j}\Big(\epsilon(h-t+z)f_k^+(\xi',\zeta') - \epsilon(t-z-h)f_k^-(\xi',\zeta')\Big)\,d\xi'\,d\zeta'. \qquad (20)$$

10. Как видно из формулы (20), построенное решение является гладкой непрерывной функцией от x, z, t всюду, за исключением, может быть, плоскости $t = z + h$ (эта плоскость является прообразом многообразия бесконечно удаленных в смысле координат (ξ, ζ, τ) точек).

Исследуем поведение функции U в окрестности плоскости $t = z + h$. Существуют пределы при $t \to z + h + 0$ и при $t \to z + h - 0$ решения $U(x, z, t)$. Действительно,

$$U(x,z,z+h+0) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{h^{2k+1}}\iint d\xi'\,d\zeta'\,\delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big)$$
$$\times P_{kk}\Big(h^2 + hz - \frac{(h+z)^2 - z^2 - x^2}{2}, h^2\Big)\frac{\partial^k}{\partial\zeta'^k}f_k^-(\xi',\zeta')$$

или, с учетом формулы (18):

$$U(x,z,z+h+0) = -\frac{1}{2\pi h}$$
$$\times \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{h^2+x^2}{2h^2}\Big)^k \iint d\xi'\, d\zeta'\, \delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k^-(\xi',\zeta'). \quad (21)$$

Аналогично, предел

$$U(x,z,z+h-0) = \frac{1}{2\pi h}$$
$$\times \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{h^2+x^2}{2h^2}\Big)^k \iint d\xi'\, d\zeta'\, \delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k^+(\xi',\zeta'). \quad (22)$$

Тем самым построенная функции U имеет особенность типа скачка при $t = z+h$. При этом неожиданностью является тот факт (подмеченный впервые А. А. Новицкой), что повышение сингулярности источника (добавление членов с производными от δ-функции в формуле (9)) не влечет за собой повышение сингулярности решения.

Найдем величину скачка решения $U(x,z,t)$ при $t = z+h$:

$$\big[U(x,z,t)\big]\big|_{t=z+h} = U(x,z,z+h+0) - U(x,z,z+h-0)$$
$$= -\frac{1}{2\pi h} \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{h^2+x^2}{2h^2}\Big)^k \iint d\xi'\, d\zeta'\, \delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big)$$
$$\times \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} \big(f_k^-(\xi',\zeta') + f_k^+(\xi',\zeta')\big)$$
$$= -\frac{1}{2\pi h} \sum_{k=0}^{m} \Big(\frac{h^2+x^2}{2h^2}\Big)^k \iint d\xi'\, d\zeta'\, \delta\Big(\zeta' + \frac{(x,\xi')}{h} - z - h\Big) \frac{\partial^k}{\partial \zeta'^k} f_k(\xi',\zeta'). \quad (23)$$

Замечательно, что *несмотря на то, что сама функция U зависит от способа разбиения функций $f_k(\xi,\zeta)$ на слагаемые $f_k^+(\xi,\zeta)$ и $f_k^-(\xi,\zeta)$, величина скачка U при $t = z+h$ не зависит от произвола, заключающегося в этом разбиении.*

11. Как следует из построения функции U, она удовлетворяет однородному уравнению (1) всюду, за исключением, может быть, плоскости $t = z+h$.

Будем интерпретировать функцию $U(x,z,t)$ как обобщенную. Результат применения оператора Даламбера $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Delta_x$ к функции U есть

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Delta_x\Big)U=2\frac{\partial}{\partial z}\big[U(x,z,t)\big]\Big|_{t=z+h}\delta(t-z-h). \qquad (24)$$

Уравнение (24) означает, что если волновое поле $U(x,z,t)$ испытывает скачок на характеристической плоскости $t-z=h$, то оно отвечает источнику, описываемому функцией, стоящей в правой части равенства (24). Поскольку мы пытаемся описать поля, порождаемые источниками, локализованными только на бесконечности, то следует потребовать, чтобы при всех $(x,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\big[U(x,z,t)\big]\Big|_{t=z+h}=0,$$

или, переобозначая $z+h\to z$, $x/h\to -x$ и опуская штрихи в переменных интегрирования

$$\sum_{k=0}^{m}\Big(\frac{1+x^2}{2}\Big)^k\iint d\xi\,d\zeta\,\delta\big(z+(x,\xi)-\zeta\big)\frac{\partial^{k+1}}{\partial\zeta^{k+1}}f_k(\xi,\zeta)=0. \qquad (25)$$

Равенство (25) представляет собой условие на функции $f_k(\xi,\zeta)$ (рассматриваемого класса Z), необходимое и достаточное для того, чтобы функция вида (9) описывала источник волн, локализованный на бесконечности. Ниже это условие переформулируется в терминах преобразования Фурье.

12. Перепишем условие (25) в форме

$$\sum_{k=0}^{m}\Big(\frac{1+x^2}{2}\Big)^k H_k(x,z)=0,$$

где

$$H_k(x,z):=\iint d\xi\,d\zeta\,\delta\big(z+(x,\xi)-\zeta\big)g_k(\xi,\zeta)d\xi d\zeta,$$

$$g_k(\xi,\zeta):=\frac{\partial^{k+1}}{\partial\zeta^{k+1}}f_k(\xi,\zeta).$$

Заметим теперь, что функцию $H_k(x,z)$ можно рассматривать при фиксированном x как интеграл по параметру ξ от свертки по переменной

z обобщенных функций $g_k(\xi, z)$ и $\delta\big(z + (x, \xi)\big)$:

$$H_x(x, z) = \int d\xi \Big(\delta\big(z + (x, \xi)\big) * g_k(\xi, z)\Big). \tag{26}$$

Переходя в равенстве (26) к преобразованию Фурье по z, найдем с учетом того, что: $\Phi_{z\to q}\big(\delta(z - a)\big) = e^{-iaq}$

$$\Phi_{z\to q}\big(H_k(x, z)\big) = \int d\xi e^{iq(x,\xi)} \widetilde{g}_k(\xi, q) = \widehat{g}_k(p, q)|_{p=-qx}, \tag{27}$$

где через $\widetilde{g}_k(\xi, q)$ обозначено $\widetilde{g}_k(\xi, q) := \Phi_{z\to q}\big(g_k(\xi, z)\big)$, через $\widehat{g}_k(p, q) := \Phi_{\xi\to p, z\to q}\big(g_k(\xi, z)\big)$. В итоге необходимое и достаточное условие (25) локализации источника на бесконечности в терминах преобразования Фурье имеет вид

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1 + x^2}{2}\right)^k \widehat{g}_k(-qx, q) = 0. \tag{28}$$

Список литературы

1. A. Blagovestchensky, *On wave fields the sources disposed in the infinity.* — J. Inv. Ill-posed Problems **16** (2008), 1–11.
2. А. С. Благовещенский, *Плоские волны, решения Бейтмена и источники на бесконечности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014).
3. Р. Курант, *Уравнения с частными производными.* М., Мир, 1964.
4. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых задачах для волнового уравнения.* Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Л., Наука, 1971.
5. З. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени.* М., Мир, 1988.
6. А. С. Благовещенский, *Обобщенный оператор Даламбера на компактифицированном псевдоэвклидовом пространстве.* — Матем. заметки **85** No. 5, (2009).
7. H. Bateman, *The conformal transformations in four dimensions and their applications to geometrical optics.* — Proc. London Math. Soc. **7** (1909), 70–89.

Blagoveschensky A. S. On waves generated by sources localized at infinity.

The space-time $\mathbb{R}^4$ is compactified by adding the manifold of infinitely distant points. The problem of constructing the solution of the wave equation with the right-hand side (the source of waves) which is a generalized function supported by the variety of infinitely distant points is posed and solved. Strict necessary and sufficient conditions that the source must satisfy, are formulated.

Физический факультет
С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: a.blagoveshchensky@spbu.ru

Поступило 1 ноября 2018 г.