Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 471, 2018 г.

М. И. Белишев, Н. А. Каразеева

ПРОСТЕЙШИЙ ТЕСТ В ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ (BC-МЕТОД)

§1. Введение

• BC-метод (метод граничного управления) это подход к обратным задачам, использующий их связи с теорией управления [1, 5]. Его "локальный" вариант, рассматриваемый в данной работе, ориентирован на приложения в геофизике (сейсмике), где требуется восстановить зависящие от глубины параметры среды по данным на дневной поверхности. Волновой процесс инициируется источниками (управлениями), расположенными на *части границы* зондируемой области; на этой же части снимаются данные [1–4].

Численные алгоритмы, созданные на базе локального варианта, успешно протестированы в ряде экспериментов [1, 6–10]. Их дальнейшая разработка и возможное использование для работы с реальными данными – важная перспективная задача.

• Одна из главных проблем апробации алгоритмов состоит в подготовке надежного теста. Подготовка состоит в решении соответствующей прямой задачи и нахождении данных (здесь – оператора реакции), которые затем используются алгоритмом для восстановления параметров (скорости звука, плотности среды и др.). В работе предлагается простейший из возможных тестов, отвечающий *постоянной* скорости. При кажущейся тривиальности этот случай, тем не менее, вполне содержателен: имеющийся опыт показывает, что алгоритм, успешно восстанавливающий константы, хорошо справляется с восстановлением гладких переменных скоростей (по крайней мере вблизи границы). Цель статьи – сделать численное тестирование доступным возможно более широкому кругу пользователей BC-метода.

Ключевые слова: двумерная динамическая обратная задача, BC-метод, численная реализация, простейший тест.

Работа поддержана программой Президиума РАН 01 "Фундаментальная Математика и ее Приложения" (грант PRAS-18-01) и грантами РФФИ No. 18-01-00269 и No. 17-01-00529.

• В первой части дается сжатое описание локального варианта BC-метода. Оно следует работе [3], в которой теория подхода изложена во всех подробностях. Особенность случая, рассматриваемого здесь (и в [3]), состоит в использовании граничных управлений *Неймана* – в отличие от упоминавшихся выше работ, в которых тестировались алгоритмы для управлений Дирихле. Неймановские управления более реалистичны в геофизических приложениях.

Во второй части описан тест, отвечающий постоянной скорости и приводится подробная схема его использования. Программирование по этой схеме не составит большого труда. Проблемой, как всегда в многомерных обратных задачах, будет регуляризация алгоритма [6, 7, 9].

• Авторы признательны А. А. Тимонову за полезные обсуждения.

§2. Прямая задача

Постановка. В полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ ставится начально-краевая задача

$$u_{tt} - \Delta u - \langle \nabla \ln \rho, \nabla u \rangle = 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+ \times (0,T), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \qquad \text{в} \quad \overline{\mathbb{R}^2_+}, \tag{2}$$

$$u_y|_{y=0} = f \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $\langle \nabla \ln \rho, \nabla u \rangle = (\ln \rho)_x u_x + (\ln \rho)_y u_y$, $\rho = \rho(x,y)$ – гладкая положительная функция (*приведенная скорость звука*), $f = f(x,t)$ – граничное управление (Неймана), $T > 0$ – финальный момент времени, $u = u^f(x,y,t)$ – решение (*волна*). Приведем некоторые известные свойства решений.

• Следствием стационарности системы (независимости коэффициентов уравнения (1) от t) является инвариантность решений относительно сдвигов по времени. Для его формулировки удобно принять соглашение, действующее всюду ниже.

Соглашение. *Все зависящие от времени функции полагаются равными* 0 *при* $t < 0$.

Если f есть управление, а

$$f^\xi(\,\cdot\,,t) := f(\,\cdot\,,t-(T-\xi)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

– оно же, включенное с задержкой $T-\xi$ (так что время действия управления f^ξ равно ξ), то

$$u^{f^\xi}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T)\,=\,u^f(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\xi)\,,\quad 0<\xi\leqslant T, \tag{4}$$

т.е. задержка управления приводит к такой же задержке волны. Из той же стационарности следуют равенства

$$u^{f_t}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t)=u^f_t(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t),\quad u^F(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t)=\int\limits_0^t u^f(\,\cdot\,,\,\cdot\,,s)\,ds,\ \ 0<\xi\leqslant T, \tag{5}$$

где $F(\,\cdot\,,t):=\int\limits_0^t f(\,\cdot\,,s)\,ds$.

• Решения гиперболического уравнения (1) подчиняются принципу конечности области влияния. Пусть $\sigma=\{(x,0)\,|\,\alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$ есть конечный сегмент оси x, $\Omega^r[\sigma]:=\{p\in\mathbb{R}^2_+\,|\,\mathrm{dist}\,(p,\sigma)<r\}$ – его метрическая окрестность радиуса $r>0$ (dist – евклидово расстояние). Если $\mathrm{supp}\,f\subset\sigma\times[0,T]$, т.е. управление сосредоточено на сегменте σ, то

$$\mathrm{supp}\,u^f(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t)\,\subset\,\Omega^t[\sigma],\quad 0<t\leqslant T \tag{6}$$

т.е. соответствующая волна локализована в t-окрестности сегмента, с которого действует управление. Соотношение (6) означает, что волны распространяются в полуплоскости с единичной скоростью.

Динамическая система. Задаче (1)–(3) сопоставляются стандартные атрибуты динамической системы: пространства и операторы. Упрощая обозначения, мы опускаем указание на сегмент σ, который пока предполагается фиксированным.

• *Внешнее пространство* есть гильбертово пространство $\mathscr{F}^T$ управлений, действующих с σ, со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathscr{F}^T}=\int\limits_{\sigma\times[0,T]} f(x,t)\,g(x,t)\,\rho(x,0)\,dx\,dt. \tag{7}$$

В нем выделено семейство подпространств

$$\mathscr{F}^{T,\,\xi}:=\left\{f^\xi\,|\,f\in\mathscr{F}^T\right\},\quad 0<\xi\leqslant T,$$

образованных задержанными управлениями. Здесь $T-\xi$ есть задержка, ξ – время действия; $\mathscr{F}^{T,\,T}=\mathscr{F}^T$.

• *Внутреннее пространство* состояний (волн) есть пространство $\mathscr{H}^T$ со скалярным произведением

$$(v, w)_{\mathscr{H}^T} = \int\limits_{\Omega^T[\sigma]} v(x,y)\, w(x,y)\, \rho(x,y)\, dx\, dy. \tag{8}$$

В силу (6) волны $u^f(\,\cdot\,, \,\cdot\,, t)$ суть его элементы (функции переменных x и y, зависящие от t как от параметра). В $\mathscr{H}^T$ выделено семейство подпространств

$$\mathscr{H}^\xi := \left\{ v \in \mathscr{H}^T \,\middle|\, \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega^\xi[\sigma]} \right\}, \quad 0 < \xi \leqslant T,$$

которые содержат запаздывающие волны: в силу (4) и (6) выполнено $u^{f^\xi}(\,\cdot\,, \,\cdot\,, T) = u^f(\,\cdot\,, \,\cdot\,, \xi) \in \mathscr{H}^\xi$.

• *Оператор управления* $W^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{H}^T$,

$$(W^T f)(x,y) := u^f(x,y,T), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{9}$$

есть оператор, разрешающий задачу (1)–(3). Он непрерывен и инъективен при всех $T > 0$ [3].

• *Оператор реакции* $R^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T$,

$$(R^T f)(x,t) := u^f(x,0,t), \qquad x \in \sigma, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T \tag{10}$$

описывает реакцию системы на воздействие, производимое управлением. Он также непрерывен. Правая часть в этом определении имеет смысл величины давления, наблюдаемого на границе полуплоскости.

Оператор $C^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T$,

$$C^T := (W^T)^* W^T \tag{11}$$

называется *связывающим.* Для управлений $f, g \in \mathscr{F}^T$ выполнено

$$\big(u^f(\,\cdot\,, \,\cdot\,, T), u^g(\,\cdot\,, \,\cdot\,, T)\big)_{\mathscr{H}^T} \overset{(9)}{=} (W^T f, W^T g)_{\mathscr{H}^T} = (C^T f, g)_{\mathscr{F}^T}, \tag{12}$$

так что C^T связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. По инъективности W^T, оператор C^T также инъективен: из $C^T f = 0$ следует $f = 0$.

• Одним из центральных фактов BC-метода является простая и явная связь между связывающим оператором и оператором реакции (см. [1–3]). Для ее описания введем:

операторы четного и нечетного продолжений $S^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^{2T}$,

$$(S^T_\pm f)(\,\cdot\,,t) \;:=\; \begin{cases} f(\,\cdot\,,t), & 0 \leqslant t < T, \\ \pm f(\,\cdot\,,2T-t), & T \leqslant t \leqslant 2T; \end{cases}$$

оператор интегрирования $J^{2T} : \mathscr{F}^{2T} \to \mathscr{F}^{2T}$,

$$(J^{2T} f)(\,\cdot\,,t) := \int\limits_0^t f(\,\cdot\,,s)\,ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T;$$

операторы выделения четной и нечетной частей $P^{2T}_\pm : \mathscr{F}^{2T} \to \mathscr{F}^{2T}$,

$$(P^{2T}_\pm f)(\,\cdot\,,t) \;:=\; \frac{1}{2}\left[f(\,\cdot\,,t) \pm f(\,\cdot\,,2T-t)\right]\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T;$$

оператор редукции $N^{2T} : \mathscr{F}^{2T} \to \mathscr{F}^T$,

$$(N^{2T} f)(\,\cdot\,,t) := f(\,\cdot\,,t)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Отметим легко проверяемое соотношение $(S^T_-)^* = 2N^{2T}P^{2T}_-$.

Пусть $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$ есть оператор реакции системы (1)–(3) с финальным моментом $t = 2T$, ∂_t - производная по времени.

Лемма 1. *Справедливы представления*

$$C^T = \frac{1}{2}(S^T_-)^* J^{2T} R^{2T} S^T_-, \;\; \partial_t C^T = \frac{1}{2}(S^T_+)^* R^{2T} S^T_- = N^{2T} P^{2T}_+ R^{2T} S^T_-. \quad (13)$$

Вывод представления для C^T см. в [3]; второе представление легко следует из первого. Первое представление влечет

$$\begin{aligned}(C^T f)(x,t) &= -\frac{1}{2}\int\limits_t^{2T-t} u^{f_-}(x,0,s)\,ds \\ &\overset{(5)}{=} \frac{1}{2}\left[u^{F_-}(x,0,t) - u^{F_-}(x,0,2T-t)\right], \quad x \in \sigma,\; 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned} \qquad (14)$$

где $F_-(\,\cdot\,,t) := \int\limits_0^t f_-(\,\cdot\,,s)\,ds$, $0 \leqslant t \leqslant 2T$, и

$$\left(u^f(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T), u^g(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T)\right)_{\mathscr{H}^T} \overset{(12)}{=} (C^T f, g)_{\mathscr{F}^T} \overset{(13)}{=} \frac{1}{2}(R^{2T} S^T_- f, (J^{2T})^* S^T_- g)_{\mathscr{F}^{2T}}$$

$$\overset{(10)}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{\sigma\times[0,2T]} u^{f_-}(x,0,t)\left[\int\limits_t^{2T} g_-(x,s)\,ds\right] dx\,dt, \qquad (15)$$

где $f_- := S_-^T f$ и $g_- := S_-^T g$. Из второго следует

$$(\partial_t C^T f)(x,t) = \frac{1}{2}\left[u^{f_-}(x,0,t) + u^{f_-}(x,0,2T-t)\right], \qquad x \in \sigma,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{16}$$

Волновой базис. • Напомним, что полнота системы элементов в гильбертовом пространстве означает возможность аппроксимировать элементы этого пространства линейными комбинациями элементов системы (сколь угодно точно по норме пространства). Если $\mathscr{S}$ – гильбертово пространство, а $\phi_1, \phi_2, \ldots$ – полная линейно независимая система, то для любого $s \in \mathscr{S}$ справедливо представление

$$s \,=\, \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^N \phi_k\,, \tag{17}$$

в котором коэффициенты находятся из системы Грама

$$\sum_{k=1}^{N} G_{ik}\alpha_k^N = \beta_i\,; \quad G_{ik} := (\phi_i, \phi_k)_{\mathscr{S}},\ \ \beta_i := (s, \phi_i)_{\mathscr{S}}, \quad i = 1, \ldots, N\,.$$

Принципиальным для ВС-метода оказывается свойство *приближенной локальной граничной управляемости* динамической системы (1)–(3): см. [1–9]. Приведем одну из эквивалентных формулировок.

Лемма 2. *Пусть сегмент σ и момент $T > 0$ выбраны произвольно и пусть $f_1, f_2, \ldots$ – полная линейно независимая система управлений в пространстве $\mathscr{F}^T$. Тогда волны $u^{f_1}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T), u^{f_2}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T), \ldots$ образуют полную линейно независимую систему в пространстве $\mathscr{H}^T$.*

Таким образом, любую функцию, заданную в области $\Omega^T[\sigma]$, заметенной волнами к финальному моменту, можно аппроксимировать волнами, которые инициированы управлениями, действующими с σ. Систему волн $u^{f_1}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T), u^{f_2}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T), \ldots$ мы называем *волновым базисом* пространства $\mathscr{H}^T$.

• Поскольку момент $T > 0$ в Лемме 2 произволен, по свойству (4) заключаем: если $f_1^\xi, f_2^\xi, \ldots$ – полная линейно независимая система управлений в $\mathscr{F}^{T,\,\xi}$, то инициированные ими волны $u^{f_1^\xi}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T)$, $u^{f_2^\xi}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T), \ldots$ образуют волновой базис в подпространстве $\mathscr{H}^\xi$ при каждом $0 < \xi \leqslant T$.

Пусть $h \in \mathscr{H}^T$ есть функция, заданная в области $\Omega^T[\sigma]$,

$$h^\xi := \begin{cases} h & \text{в } \Omega^\xi[\sigma], \\ 0 & \text{в } \Omega^T[\sigma] \setminus \Omega^\xi[\sigma] \end{cases}$$

– ее срезка на подобласть $\Omega^\xi[\sigma]$, заметаемую волнами к моменту $t = \xi$. Тогда для срезки имеем представление (17) в виде разложения по волновому базису

$$h^\xi = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k^N u_k^\xi, \tag{18}$$

в котором $u_k^\xi := u^{f_k^\xi}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T)$, а коэффициенты находятся из системы Грама

$$\sum_{k=1}^N G_{ik}\alpha_k^N = \beta_i\,; \quad G_{ik} := (u_i^\xi, u_k^\xi)_{\mathscr{H}^T} \overset{(12)}{=} (C^T f_i^\xi, f_k^\xi)_{\mathscr{F}^T}\,,$$
$$\beta_i := (h, u_i^\xi)_{\mathscr{H}^T}\,, \ \ i = 1, \ldots, N\,. \tag{19}$$

Матричные элементы G_{ik}, правые части β_i и решения α_k^N, конечно, зависят от ξ. Мы игнорируем эту зависимость в обозначениях, чтобы не перегружать их.

• Если $h = 1$ в $\Omega^T[\sigma]$, то правые части β_i находятся явно:

$$\beta_i = \int\limits_{\sigma\times[T-\xi,T]} (T-t)\, f_i^\xi(x,t)\, dx\, dt \tag{20}$$

(вывод см. в [3]). В этом случае разложение (18) принимает вид

$$1^\xi = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k^N u_k^\xi, \tag{21}$$

где коэффициенты α_k^N определяются из системы (19) с матрицей

$$G_{ik} \overset{(15)}{=} \frac{1}{2} \int\limits_{\sigma\times[0,2T]} u^{\{f_i^\xi\}_-}(x,0,t) \left[\int\limits_t^{2T} \{f_k^\xi\}_-(x,s)\, ds\right] dx\, dt \tag{22}$$

и правыми частями (20).

§3. Обратная задача

Постановка. В области $\Omega^T[\sigma]$, заполненной волнами к финальному моменту $t = T$, выделена подобласть

$$B^T[\sigma] \;:=\; \{(x,y) \mid x \in \sigma,\; 0 \leqslant y < T\}\,,$$

которая покрывается лучами, исходящими из точек σ ортогонально границе.

Обратная задача состоит в определении функции ρ в подобласти $B^T[\sigma]$ по заданному оператору реакции R^{2T}. Дополнительно считаются известными значения $\rho|_\sigma$.

Напомним, что задание оператора R^{2T} равносильно следующему: для любого управления f, действующего с σ при временах $0 \leqslant t \leqslant 2T$, известны значения волны $u^f(x,0,t)$ при всех $x \in \sigma$ и $0 \leqslant t \leqslant 2T$. Добавим, что, за счет некоторого усложнения приводимой ниже процедуры решения обратной задачи, по R^{2T} можно определить и значения $\rho|_\sigma$, так что в принципе задавать их излишне.

Амплитудная формула. • Основным средством решения обратной задачи BC-методом является *амплитудная формула* (АФ), которая выводится средствами геометрической оптики [1–9]. Здесь мы используем версию АФ из работы [3]:

$$\sqrt{\frac{\rho\,(x,\xi)}{\rho(0,\xi)}} \;=\; \left\{\left[\partial_t \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^N \left(C^T f_k^\xi\right)\right](x,t)\right\}\Bigg|_{t=T-\xi-0}^{t=T-\xi+0}, \tag{23}$$

где $\xi \in (0,T)$ фиксировано, x пробегает сегмент σ, а $f_1^\xi, f_2^\xi, \ldots$ – полная система управлений в $\mathscr{F}^{T,\,\xi}$. Коэффициенты α_k^N определяются из системы Грама (19)

$$\sum_{k=1}^{N} G_{ik}\alpha_k^N = \beta_i \tag{24}$$

с матрицей

$$G_{ik} \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_{\sigma\times[0,2T]} u^{\{f_i^\xi\}_-}(x,0,t) \left[\int\limits_t^{2T} \{f_k^\xi\}_-(x,s)\,ds\right] dx\,dt \tag{25}$$

(см. (22)) и правыми частями

$$\beta_i \;=\; \int\limits_{\sigma\times[T-\xi,T]} (T-t)\, f_i^\xi(x,t)\,dx\,dt, \tag{26}$$

(см. (20)).

Решение. Амплитудная формула позволяет определить скорость ρ в подобласти $B^T[\sigma]$ с помощью следующей процедуры.

Шаг 1. Фиксируем $\xi\in(0,T)$.

Выберем полную линейно независимую систему управлений $f_1^\xi, f_2^\xi, \ldots$ в подпространстве $\mathscr{F}^{T,\,\xi}$. Располагая оператором реакции, найдем граничные значения отвечающих им волн $u^{\{f_k^\xi\}_-}(x,0,t)$ при всех $x\in\sigma$ и $0<t\leqslant 2T$. Определим функции

$$\begin{aligned}(C^T f_k^\xi)(x,t) &= -\frac{1}{2}\int\limits_t^{2T-t} u^{\{f_k^\xi\}_-}(x,0,s)\,ds\\ &\overset{(14)}{=} \frac{1}{2}\left[u^{F_k^\xi}(x,0,t) - u^{F_k^\xi}(x,0,2T-t)\right], \quad x\in\sigma,\;\; 0\leqslant t\leqslant T\,, \end{aligned}\tag{27}$$

где $F_k^\xi(x,t) := \int\limits_0^t \{f_k^\xi\}_-(x,s)\,ds,\;\; 0\leqslant t\leqslant 2T.$

Шаг 2. Для каждого $N=1,2,\ldots$ составим систему Грама (24)–(26) и найдем ее решения $\alpha_k^N,\;\; k=1,\ldots,N$.

Шаг 3. Используя (27), определим функцию

$$\Phi(x,t) := \left[\partial_t \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N \alpha_k^N (C^T f_k^\xi)\right](x,t), \quad x\in\sigma,\;\; 0\leqslant t\leqslant T, \tag{28}$$

имеющую разрыв при $t=T-\xi$. По (23) найдем

$$\rho(x,\xi) \;=\; \rho(x,0)\left\{\lim_{\delta\to+0}\left[\Phi(x,t)\Big|_{t=T-\xi-\delta}^{t=T-\xi+\delta}\right]\right\}^2, \quad x\in\sigma. \tag{29}$$

Шаг 4. Выполняя Шаги 1-3 для различных $\xi\in(0,T)$, восстановим $\rho(x,\xi)$ при $x\in\sigma$, $0<\xi<T$, т.е. всюду в $B^T[\sigma]$.

Обратная задача решена.

Комментарии. • При численной реализации процедуры **1-4** вместо (28) и (29) используются приближения

$$\Phi(x,t) \approx \frac{1}{\varepsilon}\left\{\left[\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N(C^T f_k^\xi)\right](x,t+\varepsilon) - \left[\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N(C^T f_k^\xi)\right](x,t)\right\}; \quad (30)$$

$$\rho(x,\xi) \approx \rho(x,0)\left[\Phi(x,T-\xi+\delta) - \Phi(x,T-\xi-\delta)\right]^2 \quad (31)$$

с "большим" N и "малыми" ε, δ. К сожалению, какие-либо оценки качества этих приближений не известны.

• Формальная перестановка $\lim\limits_{N\to\infty}$ и ∂_t в (28) приводит к представлению

$$\Phi(x,t) = \left[\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N(\partial_t C^T f_k^\xi)\right](x,t)$$
$$\overset{(16)}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k^N}{2}\left[u^{\{f_k^\xi\}_-}(x,0,t) + u^{\{f_k^\xi\}_-}(x,0,2T-t)\right].$$

Однако, оправдать ее удается лишь при весьма специальном выборе управлений f_k^ξ. Тем не менее, вместо (30) можно попытаться использовать приближение

$$\Phi(x,t) \approx \sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k^N}{2}\left[u^{\{f_k^\xi\}_-}(x,0,t) + u^{\{f_k^\xi\}_-}(x,0,2T-t)\right], \quad (32)$$

не содержащее параметра ε.

• При численной реализации значения функций, участвующих в процедуре 1–4, вычисляются на конечных наборах $x_1,\dots,x_L$ и $\xi_1,\dots,\xi_M$. Таким образом, в алгоритме задействованы "большие" параметры L, M, N и "малые" ε,δ. Успешная работа алгоритма зависит от того, насколько удачно согласованы эти параметры. Основных проблем две:

1) с ростом N ухудшается обусловленность матрицы Грама (25). Ее наименьшее собственное значение быстро стремится к нулю, что осложняет решение системы (24)–(26);

2) вычисление разрыва в (31) с использованием дискретной сетки требует привлечения дополнительных регуляризационных процедур.

Надо, однако, иметь ввиду, что указанные осложнения типичны и неизбежны при решении сильно некорректных задач. Многомерные обратные задачи – в их числе.

• Отметим, что успешные примеры реализации BC-алгоритмов относятся к задаче с управлением Дирихле: см. [6–9]. Можно ожидать, что в задаче с управлением Неймана наличие производной ∂_t в (28) привнесет дополнительные осложнения.

§4. Тест

Тестом мы называем задачу (1)–(3) с $\rho = 1$. Если не оговорено противное, речь идет именно об этом случае.

Прямая задача. Приведем решение прямой тестовой задачи. Пусть

$$E(x,y,t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2-x^2-y^2}}, & t > \sqrt{x^2+y^2}, \\ 0, & t < \sqrt{x^2+y^2}, \end{cases}$$

есть фундаментальное решение волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Пусть u^f – решение (1)–(3),

$$u^+(x,y,t) := \begin{cases} u^f(x,y,t), & y > 0, \\ u^f(x,-y,t), & y < 0 \end{cases}$$

– его четное продолжение (по y). Для него имеем

$$\begin{aligned} & u^+_{tt} - u^+_{xx} - u^+_{yy} = r \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ & u^+\big|_{t<0} = 0 \end{aligned}$$

с правой частью

$$r(x,y,t) = -2u^f_y(x,0,t)\delta(y) \overset{(3)}{=} -2f(x,t)\delta(y),$$

где $\delta(\,\cdot\,)$ – дельта-функция Дирака. Отсюда $u^+ = E * h$, что легко ведет к представлению

$$\begin{aligned} & u^f(x,y,t) = u^+(x,y,t)\big|_{y \geqslant 0} \\ & = \begin{cases} 0\,, & y > t, \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{t-y} d\tau \int\limits_{x-\sqrt{(t-\tau)^2-y^2}}^{x+\sqrt{(t-\tau)^2-y^2}} \frac{f(\xi,\tau)\,d\xi}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-y^2}}\,, & y < t. \end{cases} \end{aligned} \tag{33}$$

Основное решение. • Обозначим

$$\chi(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

пусть $\psi = \psi(t)$ есть функция, локально суммируемая при $t > 0$. Рассмотрим задачу (1)–(3) с $T = \infty$ и управлением $f = \chi(x)\psi(t)$. Для описания отвечающего ему решения u^f в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ выделим области (зоны)

$$\Pi^t := \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant t\}, \quad D^t := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant t^2\}$$

и

$$I^t := \mathbb{R}^2_+ \setminus \left[D^t \cup \Pi^t\right],\ \ II^t := \Pi^t \setminus D^t,\ \ III^t := \Pi^t \cap D^t,\ \ IV^t := D^t \setminus \Pi^t .$$

Из (33) легко следует:

$$u^{\chi\psi}(x,y,t) \\ = \begin{cases} 0, & (x,y) \in I^t, \\ -\int\limits_0^{t-y} \psi(\tau)\, d\tau, & (x,y) \in II^t, \\ -\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{t-\sqrt{x^2+y^2}} \psi(\tau) \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{(t-\tau)^2 - y^2}} + \frac{\pi}{2}\right) d\tau & \\ \quad - \int\limits_{t-\sqrt{x^2+y^2}}^{t-y} \psi(\tau)\, d\tau, & (x,y) \in III^t, \\ -\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{t-\sqrt{x^2+y^2}} \psi(\tau) \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{(t-\tau)^2 - y^2}} + \frac{\pi}{2}\right) d\tau, & (x,y) \in IV^t. \end{cases} \tag{34}$$

• Пусть

$$\theta(t) := \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

В частном случае, когда $\psi = \theta(t)$, интегралы в (34) выражаются через элементарные функции. Определим

$$H(x,y,t) := -\frac{t}{\pi}\arcsin\frac{x}{\sqrt{t^2-y^2}} - \frac{x}{\pi}\ln\left[\frac{t}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{\frac{t^2}{x^2+y^2}-1}\right] + \frac{y}{\pi}\arctan\frac{tx}{y\sqrt{t^2-x^2-y^2}}.$$

Тогда

$$u^{\chi\theta}(x,y,t) = \begin{cases} 0, & (x,y)\in I^t, \\ -(t-y), & (x,y)\in II^t, \\ H(x,y,t) - \frac{t}{2} + \frac{y}{2} & (x,y)\in III^t \cup IV^t = D^t. \end{cases} \tag{35}$$

Это решение мы называем основным и обозначаем

$$u^{\chi\theta}(x,y,t) =: U(x,y,t), \quad x\in\mathbb{R},\ y\geqslant 0,\ t\geqslant 0;$$

по нему определяются все последующие элементы тестовой обратной задачи. Нетрудно проверить, что U непрерывно по пространственным переменным x,y при каждом $t\geqslant 0$.

• Реакция системы (1)–(3) на действие управления $\chi\theta$ есть

$$(R[\chi\theta])(x,t) = u^{\chi\theta}(x,0,t) = U(x,0,t), \quad x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0\,.$$

Для ее описания удобно использовать полярные координаты $x = r\cos\phi$, $t = r\sin\phi$ в плоскости $\{(x,t)\,|\,x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0\}$. Определим зоны

$$I := \left\{(r,\phi)\,\middle|\, r\geqslant 0,\ \frac{3\pi}{4}\leqslant\phi\leqslant\pi\right\},\quad II := \left\{(r,\phi)\,\middle|\, r\geqslant 0,\ 0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$III := \left\{(r,\phi)\middle|\, r\geqslant 0,\ \frac{\pi}{4}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},\quad IV := \left\{(r,\phi)\,\middle|\, r\geqslant 0,\ \frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{3\pi}{4}\right\}$$

и примем

$$G(x,t) := H(x,0,t) := -\frac{t}{\pi}\arcsin\frac{x}{t} - \frac{x}{\pi}\ln\left[\frac{t}{|x|} + \sqrt{\frac{t^2}{x^2}-1}\right].$$

Тогда из (35) получим

$$(R[\chi\theta])(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t)\in I, \\ -t, & (x,t)\in\ II, \\ G(x,t)-\frac{t}{2}, & (x,t)\in III\cup IV, \end{cases} \quad x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0. \tag{36}$$

• В ходе подготовки теста весьма полезен промежуточный контроль вычислений. Имеется ввиду возможность находить решения не только из явных представлений (34)–(36), но и каким-либо альтернативным способом и, затем, сравнивать одни и те же решения, полученные разными способами. Для определенности мы будем говорить о методе сеток для решения задачи (1)–(3) и помечать сеточные решения значком $\tilde{}$. На данном этапе следует сравнить U с $\tilde{U}$ и $R[\chi\theta] = U\big|_{y=0}$ с $\tilde{U}\big|_{y=0}$, вычисляя их значения в узлах общей сетки.

Источники. • Отметим, что при независящем от x управлении $f = \theta(t)$ задача (1)–(3) имеет простое решение $u^\theta(x,y,t) = -(t-y)\theta(t-y)$.

Фиксируем $a > 0$. Управление

$$f_a(x,t) \;:=\; [\chi(a-x) + \chi(x+a) - 1]\,\theta(t)\,,$$

действующее с конечного интервала $[-a,a]$ оси x, мы называем *источником конечной апертуры*, а величину $2a$ – его *апертурой*. По линейности соответствия “управление $\mapsto$ волна” имеем:

$$\begin{aligned} U_a(x,y,t) &:= u^{f_a}(x,y,t) = u^{\chi\theta}(a-x,y,t) + u^{\chi\theta}(x+a,y,t) - u^\theta(x,y,t)\\ &= U(a-x,y,t) + U(x+a,y,t) + (t-y)\theta(t-y),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R},\;\; y \geqslant 0,\;\; t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Вместе с основным решением U, решение U_a выражается через элементарную функцию H: см. (35). При каждом $t > 0$ волна $U_a(\,\cdot\,,\cdot\,,t)$ локализована в области $\Omega^t[\sigma]$, где $\sigma = [-a,a] \subset \mathbb{R}_x$ (см. (6)).

Реакция системы

$$\begin{aligned} (Rf_a)\,(x,t) &= U_a(x,0,t) = U(a-x,0,t) + U(x+a,0,t) + t\\ &= (R[\chi\theta])\,(a-x,t) + (R\,[\chi\theta])\,(x+a,t) + t, \quad x \in \mathbb{R},\;\; t \geqslant 0 \end{aligned}$$

также выражается через элементарные функции: см. (36).

Для контроля вычислений можно сравнить U_a, $U_a\big|_{y=0}$ с $\tilde{U}_a$, $\tilde{U}_a\big|_{y=0}$ при различных x, y, t.

• Фиксируем $\delta > 0$. Управление

$$f_a^\delta(x,t) \;:=\; [\chi(a-x) + \chi(x+a) - 1]\,[\theta(t) - \theta(t-2\delta)]\;,$$

действующее с интервала $[-a,a]$ в течение $0 \leqslant t \leqslant 2\delta$, мы называем *импульсным источником* длительности 2δ. По линейности соответствия "управление $\mapsto$ волна" имеем:

$$U_a^\delta(x,y,t) := u^{f_a^\delta}(x,y,t) = U_a(x,y,t) - U_a(x,y,t-2\delta),$$
$$x \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0,\ t \geqslant 0,$$

где $U_a(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t-2\delta)$ понимается в соответствии с Соглашением, принятым в начале раздела 2. Это решение также выражается через элементарные функции. При каждом $t>0$ волна $U_a^\delta(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t)$ локализована в области $\Omega^t[\sigma]$, но ее форма сложнее чем у $U_a(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t)$.

Реакция системы на импульсный источник есть

$$\begin{aligned}\left(Rf_a^\delta\right)(x,t) &= U_a^\delta(x,0,t) = U_a(x,0,t) - U_a(x,0,t-2\delta)\\ &= (R\,f_a)\,(x,t) - (R\,f_a)\,(x,t-2\delta), \quad x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0,\end{aligned}$$

также выражается через элементарные функции: см. (36).

Для контроля вычислений полезно сравнить $U_a^\delta,\, U_a^\delta\big|_{y=0}$ с $\tilde U_a^\delta,\, \tilde U_a^\delta\big|_{y=0}$ при различных x,y,t.

• Фиксируем $a>0$ и $\delta>0$; пусть $\eta\geqslant\delta$ и $\zeta\in\mathbb{R}$. Об управлении

$$\begin{aligned}f_{\zeta\eta}(x,t) \;&:=\; f_a^\delta(x-\zeta,t-\eta)\\ &= [\chi(\zeta+a-x)+\chi(x-\zeta+a)-1]\,[\theta(t-\eta+\delta)-\theta(t-\eta-\delta)]\end{aligned}$$

будем говорить как об импульсном источнике с центром в (ζ,η). Ему отвечают волна

$$U_{\zeta\eta}(x,y,t) := u^{f_{\zeta\eta}}(x,y,t) = U_a^\delta(x-\zeta,y,t-\eta+\delta), \quad x\in\mathbb{R},\ y\geqslant 0,\ t\geqslant 0,$$

и реакция

$$(Rf_{\zeta\eta})\,(x,t) = U_{\zeta\eta}(x,0,t) = U_a^\delta(x-\zeta,0,t-\eta+\delta), \quad x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0\,,$$

выражающиеся через элементарные функции H и G соответственно.

При контроле $U_{\zeta\eta},\, U_{\zeta\eta}\big|_{y=0}$ сравниваются с $\tilde U_{\zeta\eta},\, \tilde U_{\zeta\eta}\big|_{y=0}$ при различных x,y,t.

Произведения волн. Приведем два способа нахождения скалярных произведений волн, отвечающих импульсным источникам. Для простоты рассматриваются источники одинаковой апертуры $2a$ и длительности 2δ с центрами (ζ,η) и (ζ',η') соответственно, причем $\delta\leqslant\eta,\eta'\leqslant T-\delta$.

• Источник $f_{\zeta\eta}$ действует с сегмента $\sigma^\zeta := [\zeta-a,\zeta+a]$ и включается в момент $t=\eta-\delta$. В силу (6) инициированная им волна $u^{f_{\zeta\eta}} = U_{\zeta\eta}$ в финальный момент $t=T$ локализована в соответствующей окрестности сегмента:

$$\operatorname{supp} u^{f_{\zeta\eta}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T) \,\subset\, \Omega^{T-\eta+\delta}[\sigma^\zeta].$$

Вполне аналогично для второго источника $f_{\zeta'\eta'}$ имеем

$$\operatorname{supp} u^{f_{\zeta'\eta'}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T) \,\subset\, \Omega^{T-\eta'+\delta}[\sigma^{\zeta'}].$$

Как следствие, согласно (8) получаем

$$(u^{f_{\zeta\eta}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T), u^{f_{\zeta'\eta'}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T))_{\mathscr{H}^T} = \int\limits_{\Omega_{\zeta\eta\zeta'\eta'}} U_{\zeta\eta}(x,y,T)U_{\zeta'\eta'}(x,y,T)\,dx\,dy, \tag{37}$$

где $\Omega_{\zeta\eta\zeta'\eta'} := \Omega^{T-\eta+\delta}[\sigma^\zeta] \cap \Omega^{T-\eta'+\delta}[\sigma^{\zeta'}]$. Произведение $U_{\zeta\eta}U_{\zeta'\eta'}$ под интегралом можно выразить через элементарные функции, но соответствующие выражения слишком громоздки. Кроме того, область $\Omega_{\zeta\eta\zeta'\eta'}$ может иметь весьма сложную форму. В силу сказанного, представляется целесообразным вычислять интеграл по значениям $U_{\zeta\eta}$ и $U_{\zeta'\eta'}$ на сетке в $\mathbb{R}^2_+$.

• Второй способ состоит в нахождении скалярного произведения по данным обратной задачи, т.е. через реакцию: используется представление (15). Отметим, что при его выводе предполагалось, что управления f и g действуют с общего сегмента σ. Полагая

$$\sigma \,=\, [\min\{\zeta,\zeta'\} - a, \max\{\zeta,\zeta'\} + a]\ ,$$

так что $\sigma^\zeta, \sigma^{\zeta'} \,\subset\, \sigma$, мы обеспечиваем это условие для импульсных источников.

Нечетное продолжение $f^-_{\zeta\eta} := S^T f_{\zeta\eta}$ импульсного источника имеет вид

$$f^-_{\zeta\eta}(x,t) \,=\, f_{\zeta\eta}(x,t) - f_{\zeta\eta}(x, t-2(T-\eta)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T\,,$$

откуда

$$u^{f^-_{\zeta\eta}}(x,y,t) \,=\, U_{\zeta\eta}(x,y,t) - U_{\zeta\eta}(x,y,t-2(T-\eta)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T,$$

и, соответственно,

$$u^{f^-_{\zeta\eta}}(x,0,t) = \left(R^{2T} f^-_{\zeta\eta}\right)(x,t) = U_{\zeta\eta}(x,0,t) - U_{\zeta\eta}(x,0,t-2(T-\eta))\,.$$

Внутренний интеграл в (15) в нашем случае имеет вид

$$\int\limits_t^{2T} f^-_{\zeta'\eta'}(x,s)\,ds = \chi_{\sigma^{\zeta'}}(x)\lambda^{\eta'}(t), \quad x\in\mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant 2T\,, \tag{38}$$

где

$$\chi_{\sigma^{\zeta'}}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \sigma^{\zeta'}, \\ 0, & x \notin \sigma^{\zeta'} \end{cases}$$

есть характеристическая функция сегмента $\sigma^{\zeta'}$, а $\lambda^{\eta'}$ – кусочно-линейная функция вида

$$\lambda^{\eta'}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \eta' - \delta, \\ -t + \eta' - \delta, & \eta' - \delta \leqslant t \leqslant \eta' + \delta, \\ -2\delta, & \eta' + \delta \leqslant t \leqslant 2T - \eta' - \delta, \\ t - 2T + \eta' - \delta, & 2T - \eta' - \delta \leqslant t \leqslant 2T - \eta' + \delta, \\ 0, & 2T - \eta' + \delta \leqslant t \leqslant 2T. \end{cases}$$

Подставляя (4) и (38) в (15), получаем

$$\begin{aligned} &(u^{f_{\zeta\eta}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T), u^{f_{\zeta'\eta'}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T))_{\mathscr{H}^T} \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{\sigma^{\zeta'} \times [0,2T]} [U_{\zeta\eta}(x,0,t) - U_{\zeta\eta}(x,0,t-2(T-\eta))]\, \lambda^{\eta'}(t)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{39}$$

Так как реакция на управления в обратной задаче предполагается известной, представление (39) можно использовать для ее решения. Оно играет ключевую роль.

• При подготовке теста рекомендуется вычислить произведения волн для различных значений параметров $a, \delta, \eta, \zeta, \eta', \zeta'$, обоими способами – по (37) и по (39), и сравнить результаты.

Система Грама. • Численная реализация процедуры **Шаг 1-Шаг 4** использует систему управлений, моделирующую полные системы управлений f_k^ξ в подпространствах $\mathscr{F}^{T,\,\xi}$. В качестве таковых предлагаются импульсные источники конечной апертуры. Приведем их описание.

Сегмент $\sigma = [\alpha, \beta]$ длины $L = \beta - \alpha$, на котором задаются данные обратной задачи, разбивается на I равных частей

$$\sigma_i = [x_{i-1}, x_i]: \;\; x_0 = \alpha,\, x_i = x_{i-1} + \frac{L}{I}, \quad i = 1, \ldots, I,$$

длины $\frac{L}{I}$ с центрами $\zeta_i = x_{i-1} + \frac{L}{2I}$. В использовавшихся ранее обозначениях имеем $\sigma_i = \sigma^{\zeta_i}$ и $a = \frac{L}{2I}$.

Временной интервал $[0,T]$ разбивается на J сегментов

$$[\xi_j,\xi_{j-1}]:\ \xi_0=T,\ \xi_j=\xi_{j-1}-\frac{T}{J},\quad j=1,\ldots,J,$$

длины $\frac{T}{J}$ с центрами $\eta_j=\xi_{j-1}-\frac{T}{2J}$, что соответствует $\delta=\frac{T}{2J}$. Отметим, что сегменты и их центры пронумерованы от $t=T$ к $t=0$.

Полная система управлений во внешнем пространстве $\mathscr{F}^T$ моделируется системой источников

$$\begin{aligned}&f_{ij}(x,t)=[\chi(x-x_{i-1})-\chi(x-x_i)]\,[\theta(t-\xi_j)-\theta(t-\xi_{j-1})]\,,\\&x\in\sigma,\ 0\leqslant t\leqslant T;\quad i=1,\ldots,I,\ j=1,\ldots,J,\end{aligned}\tag{40}$$

(в прежних обозначениях: $f_{ij}=f_{\zeta_i,\eta_j}$).

Полная система управлений в подпространствах $\mathscr{F}^{T,\,\xi}$, $\xi=\xi_1,\ldots,\xi_J$ моделируется подсистемами

$$f_{ij}^{\xi_p}\ =\ f_{ij},\quad i=1,\ldots,I,\ j=1,\ldots,p;\ \ p=1,\ldots,J,$$

системы (40).

• Обозначим $U_{ij}=U_{\zeta_i\eta_j}$. Матрицу Грама системы источников (40) найдем согласно (39):

$$\begin{aligned}G_{ij\ kl}&:=(u^{f_{ij}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T),u^{f_{kl}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,T))_{\mathscr{H}^T}\\&=\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma^{\zeta_k}\times[0,2T]}[U_{ij}(x,0,t)-U_{ij}(x,0,t-2(T-\eta_j))]\,\lambda^{\eta_l}(t)\,dx\,dt\\&=\frac{1}{2}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}dx\int\limits_0^{2T}[U_{ij}(x,0,t)-U_{ij}(x,0,t-2(T-\eta_j))]\,\lambda^{\eta_l}(t)\,dt,\\&\quad i,k=1,\ldots,I,\ \ j,l=1,\ldots,J.\end{aligned}$$

Источникам в подпространствах $\mathscr{F}^{T,\,\xi_p}$ отвечают усеченные матрицы

$$G_{ij\ kl}^{\xi_p}\ =\ G_{ij\ kl},\quad p=1,\ldots,J;\ \ i,k=1,\ldots,I,\ \ j,l=1,\ldots,p,$$

входящие в систему Грама (26). Правые части в (26) суть

$$\begin{aligned}\beta_{ij}^{\xi_p}&=\int\limits_{\sigma^{\zeta_i}\times[T-\xi_p,T]}(T-t)\,f_{ij}^{\xi_p}(x,t)\,dx\,dt=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx\int\limits_{\xi_j}^{\xi_{j-1}}(T-t)\,dt\\&=\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\left[(T-\xi_j)^2-(T-\xi_{j-1})^2\right]=\frac{LT^2}{2IJ^2}(2j-1).\end{aligned}$$

• Далее, по процедуре **Шаг 1–Шаг 4**, для всех ξ_p $(p = 1, \dots, J)$ составляются системы Грама

$$\sum_{\substack{k=1,\dots,I;\\ l=1,\dots,J}} G^{\xi_p}_{ij\;kl} \alpha^{\xi_p}_{kl} = \beta^{\xi_p}_{ij}, \quad i = 1, \dots, I, \;\; j = 1, \dots, p, \tag{41}$$

и находятся их решения $\alpha^{\xi_p}_{kl}$, $k = 1, \dots, I$, $l = 1, \dots, p$. По ним, согласно (32), определяются функции

$$\Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_j) \approx \sum_{\substack{k=1,\dots,I;\\ l=1,\dots,J}} \frac{\alpha^{\xi_p}_{kl}}{2} \left[U_{kl}(\zeta_i, 0, \eta_j) + U_{kl}(\zeta_i, 0, 2T - \eta_j)\right],$$
$$i = 1, \dots, I, \;\; j = 1, \dots, J.$$

Наконец, используя амплитудную формулу (31), определяем искомую функцию ρ на сетке (ζ_i, ξ_p) в области $B^T[\sigma]$:

$$\rho(x, y)\big|_{x=\zeta_i,\, y=\xi_p} \approx \rho(\zeta_i, 0) \left[\Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_p) - \Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_{p+1})\right]^2,$$
$$i = 1, \dots, I, \;\; p = 1, \dots, J.$$

В нашем тесте $\rho \equiv 1$ и, в случае успешной работы алгоритма, равенство

$$1 \approx \left[\Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_p) - \Phi^{\xi_p}(\zeta_i, \eta_{p+1})\right]^2, \quad i = 1, \dots, I, \;\; p = 1, \dots, J.$$

должно выполняться с приемлемой точностью.

• Отметим еще один способ контроля вычислений. После того, как система (41) решена и постоянные $\alpha^{\xi_p}_{kl}$ найдены, можно проверить равенство (21), которое в данном случае имеет вид

$$1^{\xi_p}(x, y) \approx \sum_{\substack{k=1,\dots,I;\\ l=1,\dots,J}} \alpha^{\xi_p}_{kl}\, U_{kl}(x, y, T), \quad (x, y) \in B^T[\sigma],$$

и должно выполняться с удовлетворительной точностью.

• В алгоритме полезно предусмотреть возможность регулировать амплитуду источников: использовать управления Af_{ij} вместо f_{ij}. Из физических соображений резонно использовать “короткие импульсы единичной мощности” $f = \frac{IJ}{LT} f_{ij}$ (J велико), создающие волны u^f с резким передним фронтом. В этом случае можно ожидать, что амплитудная формула, которая основана на геометрической оптике, будет давать удовлетворительные приближения.

• Несложные изменения позволят приготовить тест с $\rho = 1$, использующий источники других профилей $f = \chi\psi$: см. (34).

Список литературы

1. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), R1–R45.
2. M. I. Belishev, *How to see waves under the Earth surface (the BC-method for geophysicists).* — In: Ill-Posed and Inverse Problems. S. I. Kabanikhin and V. G. Romanov (Eds). VSP, 2002, pp. 55–72.
3. M. I. Belishev, *Dynamical Inverse Problem for the Equation* $u_{tt} - \Delta u - \nabla\rho \cdot \nabla u = 0$ *(the BC-Method).* — CUBO A Math. J. **10**, No, 2 (2008), 17–33.
4. M. I. Belishev, *Boundary Control Method. — Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, Vol. 1, pp. 142–146. DOI: 10.1007/978-3-540-70529-1.
5. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий (BC-метод).* — Усп. Мат. Наук **72** (2017), вып. 4, 3–66.
6. M. I. Belishev, V. Yu. Gotlib, *Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **7**, No. 3 (1999), 221–240.
7. M. I. Belishev, I. B. Ivanov, I. V. Kubyshkin, V. S. Semenov, *Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **24** (2016), Issue 2, 159–180.
8. M. V. De Hoop, P. Kepley, L. Oksanen, *Recovery of a smooth metric via wave field and coordinate transformation reconstruction.* — SIAM J. Appl. Math. **78**, No. 4 (2018), 1931–1953.
9. I. B. Ivanov, M. I. Belishev, V. S. Semenov, *The reconstruction of sound speed in the Marmousi model by the boundary control method.* `arXiv: 1609.07586v1 [physics.geo-ph] 24 Sept 2016.`
10. L. Oksanen, *Solving an inverse obstacle problem for the wave equation by using the boundary control method.* — Inverse Problems **29** (2013), No. 3, 035004; doi:10.1088/0266-5611/29/3/035004

Belishev M. I., Karazeeva N. A. Simplest test for two-dimensional dynamical inverse problem (the BC-method).

A dynamical system

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u - \nabla \ln\rho \cdot \nabla u = 0 && \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+ \times (0,T),\\ &u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 && \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+,\\ &u_y|_{y=0} = f && \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned}$$

is under consideration, where $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$; $\rho = \rho(x,y)$ is a smooth positive function; $f = f(x,t)$ is a boundary control; $u = u^f(x,y,t)$ is a solution. With the system one associates a *response operator* $R : f \mapsto u^f|_{y=0}$. The inverse problem is to recover the function ρ via the response operator. The short presentation of the local version of the BC-method, which recovers ρ via the data given on a part of the boundary, is provided.

If ρ is constant, the forward problem is solved in explicit form. In the paper, the corresponding representations for the solutions and response operator are derived. The way to use them for testing the BC-algorithm, which solves the inverse problem, is outlined. The goal of the paper is to extend the circle of the BC-method users, which are interested in numerical realization of methods for solving inverse problems.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru
E-mail: karazeev@pdmi.ras.ru

Поступило 19 октября 2018 г.