

И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ТРЕХ ОДНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

§1. ВВЕДЕНИЕ

В квантово-механической проблеме нескольких частиц задача о вычислении координатных асимптотик собственных функций абсолютно непрерывного спектра остаётся одной из самых интересных с физической точки зрения и одной из самых сложных с математической. Отсутствие сингулярного непрерывного спектра для очень широкого класса парных взаимодействий во всех размерностях была установлена в известных работах Мура [1] и его последователей [2]. Однако, техника работы Мура не позволяет находить упомянутые выше координатные асимптотики.

В случае трёхмерных частиц такие асимптотики были найдены в работах Меркурьева на основе анализа уравнений Фаддеева. Эти уравнения впервые появились в работе Фаддеева [3] для исследования уравнения Липшманна–Швингера (резольвентного тождества) в случае убывающих потенциалов. Отметим, что в случае одномерных частиц аргументация работы Фаддеева в неизменном виде не работает.

Координатные асимптотики в случае одномерных частиц были впервые описаны в работах Буслаева–Левина, причём как в случае финитных потенциалов [7], так и в случае кулоновского взаимодействия [8]. Это было сделано в рамках весьма тонкого эвристического анализа, предложенного ранее в работах Буслаева–Меркурьева–Саликова [10], который именуется дифракционным подходом. Отметим также, что

Ключевые слова: квантовая задача рассеяния, три одномерные частицы, асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра.

И. Байбулов благодарен Российскому Национальному Фонду за поддержку в рамках гранта РФФ 17-11-01003.

координатные асимптотики, полученные в работе [7], послужили основой для вполне успешного численного анализа задачи рассеяния, проведенного в работе [9]. Тем не менее, недостаточная строгость дифракционного подхода вынуждает искать более строгие пути обоснования найденных асимптотик и, по сути дела, возвращает нас к исходным идеям основополагающей работы Фаддеева.

В качестве первого шага такого обоснования была написана работа [5] авторов, где были строго получены координатные асимптотики предельных значений ядра резольвенты, когда спектральный параметр “садится” на положительную полуось, заполненную точками непрерывного спектра. Это было сделано только в случае финитных парных потенциалов отталкивания и равных масс. Точное определение класса допустимых парных потенциалов будет сформулировано ниже.

Настоящая работа является завершением работы [5] и посвящена извлечению координатных асимптотик собственных функций из найденных ранее асимптотик резольвенты.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В статье [5] на основе уравнений Фаддеева [3], или альтернирующего метода Шварца (под таким названием формулировка метода, которая используется в [5], появилась в [6]), были получены формулы для предельных значений резольвенты оператора Шредингера для трех одномерных частиц с финитным потенциалом отталкивания при посадке спектрального параметра на вещественную положительную полуось. Результат был сформулирован для случая равных масс, однако, как было отмечено в работе [5], в случае разных масс не возникает принципиальных сложностей. Поэтому здесь мы также придерживаемся этого соглашения.

Сформулируем доказанную в работе [5] теорему.

В задаче рассматривается оператор Шредингера, формально определенный как

$$H = -\Delta + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3}^3 v(z_i - z_j), \quad (2.1)$$

$$z_i \in \mathbb{R}, \quad z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$$

здесь Δ – оператор Лапласа в \mathbb{R}^3 , $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – четная непрерывная функция с ограниченным носителем (под этим символом мы одновременно понимаем и оператор умножения на соответствующую функцию).

Теорема формулируется в переменных в конфигурационном пространстве, отвечающем отделенному центру масс, то есть в терминах оператора Шредингера, формально определенного сужением исходного оператора (2.1) на некоторое пространство функций, действующих на поверхности $\Pi = \{z | z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$. (по переменной отвечающей центру масс остается лишь тривиальное свободное движение). В связи с этим здесь и далее через Δ обозначается оператор Лапласа-Бельтрами на этой плоскости. На Π выделяются так называемые координаты Якоби, отвечающие относительному движению частиц в паре, а также относительному движению центра масс пары частиц и третьей частицы

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_k - z_j), \quad y_i = \sqrt{\frac{3}{2}}z_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{sign}(i, j, k) = 1.$$

Потенциал при этом не имеет ограниченного носителя в Π , в чем и состоит основная специфика задачи (см. рис. 1).

Пару координат будем обозначать $z = (x_i, y_i)$, а соответствующие орты k_j, l_j . Это не приведет к неудобствам, так как все дальнейшие рассуждения будут касаться именно координат в конфигурационном пространстве, а не переменной полной волновой функции. Символами z, z', z_i, q мы будем обозначать вектора в конфигурационном пространстве; $|z|$ – модуль вектора, $\hat{z} = \frac{z}{|z|}$ – соответствующий единичный вектор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^2 .

Оператор Лапласа-Бельтрами в координатах Якоби записывается в виде

$$\Delta = \partial_{x_i}^2 + \partial_{y_i}^2.$$

Оператор H принимает вид

$$H = -\Delta + \sum_{i=1}^3 v(x_i). \quad (2.2)$$

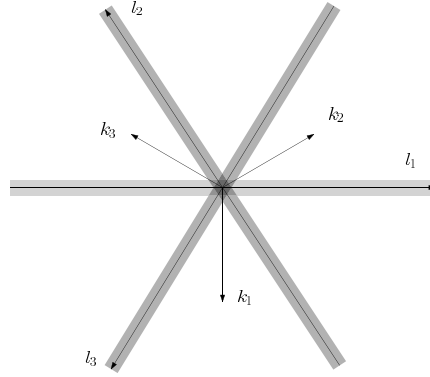


Рис. 1. “Крест” в конфигурационном пространстве, образованный носителями потенциалов.

В рамках принципа предельного поглощения при стационарном подходе к задаче рассеяния изучается существование предельных значений резольвенты

$$R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1}$$

при посадке спектрального параметра на вещественную положительную полуось.

Замечание. Предельные значения понимаются в слабом смысле в рамках метода оснащенного гильбертова пространства. В основное гильбертово пространство \mathcal{H} непрерывно вкладывается некоторое банахово пространство \mathcal{B} , что в свою очередь позволяет вложить \mathcal{H} в сопряженное к \mathcal{B} пространство \mathcal{B}^* и далее доказать, что $R(E \pm i\varepsilon) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ имеет непрерывное продолжение при $\varepsilon \downarrow 0$. Таким образом, обобщённые собственные функции в этом случае трактуются как элементы пространства \mathcal{B}^* , а основным объектом изучения становится действие функционала $(R(E \pm i\varepsilon)\varphi, \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{B}$, при $\varepsilon \downarrow 0$. В нашем случае таким пространством послужит пространство Фурье-образов гельдеровых функций, убывающих на бесконечности, которое будет описано ниже. В импульсном пространстве такие функции вкладываются в L_2 и норма L_2 оценивается через гельдерову, а Фурье-образы лежат в L_2 и имеют ту же норму. Использование такого пространства диктует особенность резольвенты в импульсном пространстве. Подробнее об этом см. [5].

В работе [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Обозначим $\widehat{H}^{\mu,\theta}$ банахово пространство функций, Фурье-образы которых лежат в*

$$H^{\mu,\theta}(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \|f\|_{\mu,\theta} = \sup_{\eta, \zeta} (1 + |\zeta|^{1+\theta}) \left(|f(\zeta)| + \frac{|f(\zeta + \eta) - f(\zeta)|}{|\eta|^\mu} \right) < \infty \right\}$$

Рассмотрим в указанном банаховом пространстве свободную резольвенту

$$R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$$

И резольвенту

$$R_j(\lambda) = (-\Delta + v_j - \lambda I)^{-1}$$

(v_i – в координатном представлении оператор умножения на $v(x_i)$)

Тогда при $1 > \mu, \theta > 1/2, 0 < c_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq c_2 < \infty$ резольвента $R(\lambda)$ имеет слабый предел в $\widehat{H}^{\mu,\theta}$ при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow +0$, имеющий вид:

$$\begin{aligned} R(E + i0) &= R_0(E + i0) \\ &\times \left(I - \sum_i v_i R_i(E + i0) + \sum_{i \neq j} v_i R_i(E + i0) v_j R_j(E + i0) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i \neq j \neq k} v_i R_i(E + i0) v_j R_j(E + i0) v_k R_k(E + i0) \right) \\ &\quad + R_0(E + i0) A(E + i0) + R_0(E + i0) B(E + i0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $E = \operatorname{Re} \lambda$, A – конечномерный оператор действующий в линейную оболочку функций $\Psi_{\pm}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, носитель которых ограничен носителем потенциалов v_i , и обладающих асимптотическим поведением на бесконечности

$$\Psi_{\pm}^{(i)}(z') \sim \frac{C_A e^{i\sqrt{\lambda}|z'|}}{|z'|^{1/2}}, \quad (2.4)$$

и B – компактный оператор с ядром, удовлетворяющим оценке

$$|B_T(z, z')| \leq \frac{C_B |v(x)| |\phi_{\pm}(x, 0)|}{(1 + |z|)^{3/2} (1 + |z'|)^{1/2}}, \quad (2.5)$$

где $\phi_{\pm}(x, k)$ – решения уравнения

$$-\phi'' + v_i \phi = k^2 \phi,$$

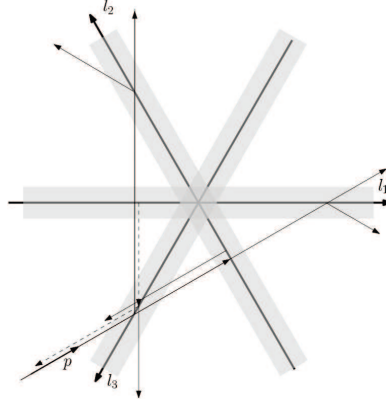


Рис. 2. Пример преотражений в системе.

имеющие вид $s(k)e^{\mp ikx}$ при достаточно больших отрицательных (положительных) x , $s(k)$ – коэффициент прохождения одномерной задачи рассеяния с потенциалом v , а C_A , C_B – некоторые константы.

Отметим здесь, что оператор A в некотором смысле соответствует рассеянию вдоль носителей потенциалов, а оператор B – рассеянию на компактной области.

В части 3 на основе этого представления будут получены асимптотики собственных функций непрерывного спектра. Такие асимптотики уже были получены в [7, 10] в рамках так называемого дифракционного подхода. А именно, было построено семейство решений уравнения Шредингера $\psi(z, q)$, $q \in \mathbb{R}^2$, $q \neq l_j$ с асимптотическим представлением при $|z| \rightarrow \infty$ равномерно по углу \hat{z} при $|(\hat{z}, l_j)| \leq 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$$\psi(z, q) = \psi^p(z, q) + \psi^f(z, q) + g(\hat{z}, q) \frac{e^{i|q||z|}}{\sqrt{2\pi|q||z|}} + O(|z|^{-3/2}) \quad (2.6)$$

где g – некоторая гладкая функция, $\psi^p(z, q)$ – сумма плоских волн, $\psi^f(z, q)$ – сумма волн Френеля, полученных в результате процедуры преотражений луча с волновым вектором q в системе экранов, порожденных носителями потенциалов, имеющих коэффициент отражения и прохождения, соответствующий одномерной задаче рассеяния пары частиц с указанным потенциалом. (рис. 2)

Основным результатом части 3 является доказательство справедливости такого разложения.

§3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА И ЕЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Теорема 3.1. Пусть $\hat{z}, \hat{z}' \in D_\varepsilon := \{\hat{x} \in \mathbb{S}^1 : |\langle \hat{x}, l_j \rangle| \leq 1 - \varepsilon, j = 1, 2, 3\}$, где $0 < \varepsilon < 1$, $E > \delta > 0$. При $|z|, |z'| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика для предельного значения ядра резольвенты оператора Шредингера

$$R(z, z'|E + i0) = \frac{e^{i\sqrt{E}|z|}}{\sqrt{|z|}} \left[\psi^p(z', \sqrt{E}\hat{z}) + \psi^f(z', \sqrt{E}\hat{z}) + g(\hat{z}, \hat{z}'|\sqrt{E}) \frac{e^{i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{2\pi\sqrt{E}|z'|}} \right] \left(1 + O(|z|^{-1/2}) + O(|z'|^{-1/2}) \right), \quad (3.1)$$

причем асимптотика равномерна по \hat{z}, \hat{z}' в D_ε .

При установлении указанных предельных значений (в подходящем пространстве с подходящей топологией), собственные функции абсолютно непрерывного спектра восстанавливаются из ядра резольвенты

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R(z, z'|E \pm i\varepsilon) = \psi^\pm(z, \sqrt{E}\hat{z}') \frac{e^{\pm i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{|z'|}} + o(|z'|^{-1/2}), \quad (3.2)$$

$|z| \rightarrow \infty.$

Докажем это утверждение.

Доказательство. Анализ асимптотической формулы (2.3) для резольвенты – именно, анализ сходимости повторных интегралов, зашифрованных в ней – даёт возможность вычленить в резольвенте расходящуюся волну: при $|z| \rightarrow \infty$

$$R(z, z'|\lambda) \sim \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z|}}{\sqrt{|z|}} \tilde{\psi}(z', \hat{z}|\lambda). \quad (3.3)$$

Собственно, этот факт и будет устанавливаться далее.

В силу симметрии $R(w, z|\lambda) = \overline{R(z, w|\lambda)}$, мы можем теперь в резольвентном тождестве (в уравнении Липпманна–Швингера)

$$R(z, z'|\lambda) = R_0(z, z'|\lambda) - \int_{\mathbb{R}^2} R_0(z, w|\lambda) V(w) R(w, z'|\lambda) dw \quad (3.4)$$

положить $\lambda = E \pm i0$ и устремить z' к бесконечности, имея также в виду асимптотику свободной резольвенты

$$R_0(z, w|E \pm i0) \sim \frac{e^{\pm i\pi/4} e^{\pm i\sqrt{E}|z-w|}}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{|z-w|}}.$$

Мы приходим тогда к соотношению

$$R(z, z'|E \pm i0) \sim \psi^\pm(z, \widehat{z}'|E) \frac{e^{\pm i\sqrt{E}|z'|}}{\sqrt{|z'|}}, \quad (3.5)$$

причём функция ψ^\pm будет удовлетворять уравнению

$$\psi^\pm(z, \widehat{z}'|E) = \frac{e^{\pm i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} e^{\mp iz \cdot \widehat{z}' \sqrt{E}} - \int_{\mathbb{R}^2} R_0(z, w|E \pm i0) V(w) \psi^\pm(w, \widehat{z}'|E). \quad (3.6)$$

Но это и доказывает тот факт, что ψ^\pm является собственной функцией, а также оправдывает способ её вычленения. \square

Теорема 3.2 (Следствие). *При $E > 0$, справедливо асимптотическое представление для собственной функции непрерывного спектра $\psi(z, q)$*

$$\psi(z, q) = \left[\psi^p(z, q) + \psi^f(z, q) + g(\widehat{z}, q) \frac{e^{i|q|z|}}{\sqrt{2\pi|q||z|}} \right] \left(1 + O(|z|^{-1/2}) \right), \quad (3.7)$$

где $|q| = \sqrt{E}$.

Отметим, что здесь и далее ядро оператора и сам оператор обозначаются одной и той же буквой. Чтобы избежать недопонимания, ядра операторов будут сопровождаться указанием аргументов.

Доказательство теоремы. Сперва приведем наводящие соображения, которые позволяют увидеть структуру асимптотики решения. Пусть λ – спектральный параметр, $\operatorname{Re} \lambda = E$. Асимптотика ядра $R_0(z, z'|\lambda)$ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $|z - z'| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$R_0(z, z'|\lambda) \approx \frac{e^{i\pi/4} e^{i\sqrt{\lambda}|z-z'|}}{2\sqrt{2\pi} |z-z'|^{1/2}} + O(|z-z'|^{-1}). \quad (3.8)$$

Здесь и всюду далее ветвь корня $\sqrt{\lambda}$ выбирается так, чтобы $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0$.

Асимптотика ядра $R_i(z, z'|\lambda)$ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $|z - z'| \rightarrow \infty$, $x \in \operatorname{supp} v_i$ имеет вид

$$R_i(z, z'|\lambda) \approx \phi_{\pm}(x, k_0) \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\lambda}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z-z'|}}{|z-z'|^{1/2}} + O(|z-z'|^{-1}) \quad (3.9)$$

где $\phi_{\pm}(x, k)$ – решения уравнения

$$-\phi'' + v_i\phi = k^2\phi,$$

имеющие вид $s(k)e^{\mp ikx}$ при достаточно больших отрицательных (положительных) x , а

$$k_0 = \frac{\sqrt{\lambda}x'}{|z-z'|} + O(|z-z'|^{-1}). \quad (3.10)$$

Отметим, что выбор решения ϕ_{\pm} определяется знаком проекции z' на орт x_i .

Сперва рассмотрим члены, которые мы назовем "однократными отражениями" в формуле (2.3). Как мы увидим дальше, такое название не случайно и соответствует лучевой интерпретации в рамках дифракционного подхода работы [7]. Отметим, что все выражения пишутся с точностью до круговой волны с гладкой амплитудой, которая иногда будет опускаться.

Чтобы законно воспользоваться асимптотическим выражением для ядер операторов R_0 , R_i необходимо обеспечить $\sqrt{\lambda}|z-z'| \gg 1$, более того оценка должна быть равномерной по переменной интегрирования. Этого можно добиться, вырезав малые угловые δ окрестности направлений вдоль прямой $x_i = 0$. Такую асимптотическую область мы и зафиксируем. Направления в угловой окрестности носителей требует отдельного рассмотрения и изучения оператора A из теоремы 2.1.

Рассмотрим члены типа $R_0 v_i R_i$. Ядро такого оператора при больших z, z' (\hat{z}, \hat{z}' фиксированы), устроено следующим образом

$$R_0 v_i R_i(z, z'|\lambda) \underset{z, z' \rightarrow \infty}{\approx} \int_{\text{supp } v_i \times \mathbb{R}} C^2 \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|z-z_i|+|z_i-z'|)}}{\sqrt{|z-z_i||z_i-z'|}} \frac{f_{\pm}(x_i, k_0)}{\sqrt[4]{\lambda}} dz_i \quad (3.11)$$

здесь $C = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}}$, $f_{\pm}(x_i, k_0) = \phi_{\pm}(x_i, k_0)v(x_i)$. Для сокращения записи, мы пишем лишь главные вклады в асимптотику, причем вклады, имеющие вид круговой волны с гладкой амплитудой мы также будем опускать.

Пользуясь стабилизацией модуля

$$|z - z_i| = |z| - \left(\frac{z}{|z|} \cdot z_i\right) + O(|z|^{-1}) = |z| - x_i l_x - y_i l_y + O(|z|^{-1}), \quad (3.12)$$

напишем главный член формального асимптотического разложения

$$R_0 v_i R_i(z, z' | \lambda) \approx \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z|}}{\sqrt{|z|}} \times C^2 \underbrace{\iint_{\substack{x_i \in \text{supp } v, \\ y_i \in \mathbb{R}}} dz_i \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|z' - z_i| - \langle \frac{z}{|z|}, z_i \rangle)} f_{\pm}(x_i, k_0)}{\sqrt{|z' - z_i|} \sqrt[4]{\lambda}}}_{\psi^{(i)}(z', \sqrt{\lambda} \hat{z})} \quad (3.13)$$

Здесь мы ввели обозначение $\psi^{(i)}$ для множителя при расходящейся круговой волне, которая, как будет далее продемонстрировано, отвечает вкладу плоских волн, получившихся в результате взаимодействия исходной плоской волны с экраном l_i , в асимптотику собственной функции.

Аналогично раскладывая второй модуль, рассматривая асимптотику (удаляя точку наблюдения z'), мы вновь можем воспользоваться разложением модуля разности в фазе, и в результате имеем

$$\psi^{(i)} = C^2 \int dx_i \frac{f_{\pm}(x_i, k_0)}{\sqrt[4]{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}(l_x x_i - l'_x x_i)} \times \underbrace{\int dy_i e^{-i\sqrt{\lambda}(l_y y_i - l'_y y_i)} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z'|}}{\sqrt{|z'|}}}_{2\pi \delta(l'_y - l_y) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} + O(|z'|^{-1/2}),$$

где $l_x = -\sin \omega$, $l_y = \cos \omega$, $l'_x = -\sin \sigma$, $l'_y = \cos \sigma$, а $l = (l_x, l_y) = -\hat{z}$, $l' = (l'_x, l'_y) = \hat{z}'$ (см. рис. 3). При этом выбор знака \pm соответствует выбору знака проекции на орт k_i вектора z' . $\delta(l'_y - l_y)$ – дельта-функция Дирака на окружности. Выполняя замену переменных в обобщенной функции, получаем

$$\delta(l'_y - l_y) = \delta(\cos \omega - \cos \sigma) = \frac{1}{|\sin \sigma|} (\delta(l' - l) + \delta(l' - \tau_i l)),$$

где τ_i – оператор отражения вектора относительно l_i .

Оставшийся интеграл по x_i распадается на два. Пусть направления векторов такие, как указано на рис. 3. Заметим, что выбор одной или

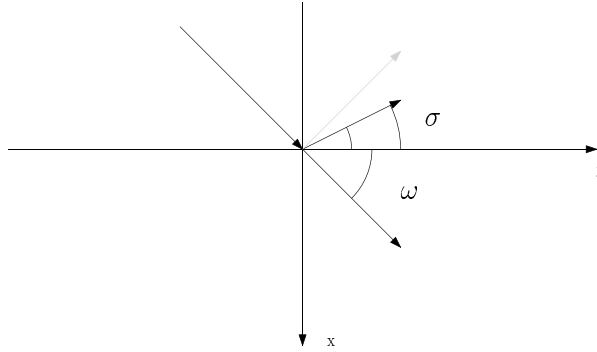


Рис. 3. Угловые переменные.

второй дельта-функции выбирает проекцию на ось x (вертикальное направления): $l'_x = l_x$ либо $l'_x = -l_x$, а следовательно и функции ϕ_{\pm} . Заметим также, что в интеграл по x_i входят $\sqrt{\lambda}l_x$ лишь попарно, и такое произведение имеет смысл проекции волнового вектора на ось x в системе с энергией λ . В частности, согласно (3.10),

$$k_0 = \sqrt{\lambda}l_x + O(|z'|^{-1}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi^{(i)} &= 2\pi C^2 \int dx_i \frac{f_{\pm}(x_i, k_0)}{\sqrt[4]{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}(l_x x_i - l'_x x_i)} \\ &\times \frac{1}{-\sin \omega} (\delta(l' - l) + \delta(l' - \tau_i l)) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z'|}}{\sqrt{|z'|}} + O(|z'|^{-1/2}) \\ &= 2\pi C^2 \left(\int dx_i \frac{f_+(x_i, \sqrt{\lambda}l_x)}{-\sqrt{\lambda}l_x} \delta(l' - l) \right. \\ &\left. + \int dx_i \frac{f_-(x_i, -\sqrt{\lambda}l_x)}{-\sqrt{\lambda}l_x} e^{i\sqrt{\lambda}(2l_x x_i)} \delta(l' - \tau_i l) \right) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z'|}}{\sqrt{\sqrt{\lambda}|z'|}} \\ &\quad + O(|z'|^{-1/2}) \end{aligned}$$

Назовем коэффициентами прохождения и отражения соответственно следующие величины

$$\tilde{s}(k) = -\frac{e^{i\pi/4}}{-2\sqrt{2\pi}k} \int dx \phi_+(x, k) v(x), \quad (3.14)$$

$$\tilde{r}(-k) = -\frac{e^{i\pi/4}}{-2\sqrt{2\pi}k} \int dx \phi_-(x, -k) v(x) e^{i2kx}. \quad (3.15)$$

Знак минус внесен для того, чтобы нивелировать эффект альтернации знаков в выражении для полной резольвенты 2.3.

Мы получили набор вкладов в старший член асимптотики ядра R порядка $|z'|^{-1/2}$

$$\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z'|}}{\sqrt{\lambda^{1/2}|z'|}} 2\pi \left(\tilde{s}(\sqrt{\lambda} \frac{x}{|z'|}) \delta(\hat{z}' - \hat{z}) + \tilde{r}(-\sqrt{\lambda} \frac{x}{|z'|}) \delta(\hat{z}' - \tau_i \hat{z}) + f(\hat{z}', \lambda) \right), \quad (3.16)$$

Отмечая слабо-асимптотическое равенство

$$\frac{e^{i|q||r|}}{\sqrt{|q||r|}} \delta(\hat{r} - \hat{q}) \underset{|r| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} (\chi_+(\langle q, r \rangle) e^{i\langle q, r \rangle} + \chi_+(-\langle q, r \rangle) e^{-i\langle q, r \rangle}), \quad (3.17)$$

здесь $\chi_+(x)$ – характеристическая функция интервала $(0, +\infty)$, мы можем провести соответствие между вкладами типа плоских волн и расходящихся круговых волн с сингулярной амплитудой.

В работах [7, 10] плоские волны, порожденные всевозможными взаимодействиями исходной падающей плоской волны с волновым вектором $-\sqrt{\lambda}(\hat{z}, k_i)$ с системой экранов l_1, l_2, l_3 с коэффициентами отражения и прохождения \tilde{r}, \tilde{s} , давали вклад только в "областях света", то есть те области, куда может пройти падающий луч. Каждое взаимодействие порождает вклад в асимптотику до тех пор, пока луч не уйдет из системы экранов. Известно, что число таких взаимодействий в рассматриваемой системе равно трем, и вообще говоря конечно для произвольной системы экранов. Это отражено в теореме 2.1, где главные вклады в резольвенту дают "однократные", "двукратные" и "трехкратные" взаимодействия. При этом возникают скачки амплитуды – переходы между областями "света" от разных вкладов, имеющих общий волновой вектор, но разные пути. В упомянутых работах были подробно описаны случаи, в которых возможно их возникновение, а скачок амплитуды заменялся на функции Френеля умноженные на плоскую волну – волны Френеля. Появление волн Френеля оказывалось возможным лишь при членах, отвечающих "трехкратному

взаимодействию". Мы продемонстрируем, что и в интегральной форме возникают волны Френеля, что и будет завершать доказательство теоремы, поскольку будет проведено полное соответствие с дифракционным подходом.

Рассматривая следующую итерацию $R_0 v_i R_i v_j R_j$, мы на первый взгляд можем формально подставить вместо интеграла по z_i его асимптотику по z_j и снова получить новый набор переотражений, однако этому препятствует то, что z_j пробегает всю область интегрирования, и более того разность $|z_i - z_j|$ имеет всевозможные значения, а значит асимптотика R_i перестает быть справедливой. В рамках все тех же наводящих соображений, мы отложим этот вопрос, представив, что вид ядер справедлив также и в конечной области. Тогда интеграл по z_j разбивается в этом случае на два, поскольку асимптотика ядра может иметь ту или иную форму в зависимости от знака проекции z_j на орт k_j .

$$\begin{aligned} R_0 v_i R_i v_j R_j(z, z' | \lambda) &\approx -e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi} C^2 \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z|}}{\sqrt{|z|}} \\ &\times \left(\tilde{s}(\sqrt{\lambda} l_x) \iint_{\substack{x_j \in \text{supp } v, \\ y_j \in \mathbb{R}_+}} dz_j \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z'| - \langle \hat{z}, z_j \rangle)}}{\sqrt{|z' - z_j|}} \frac{f_{\pm}(x_j, k_0)}{\sqrt[4]{\lambda}} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{r}(-\sqrt{\lambda} l_x) \iint_{\substack{x_j \in \text{supp } v, \\ y_j \in \mathbb{R}_-}} dz_j \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z'| - \langle \tau_i \hat{z}, z_j \rangle)}}{\sqrt{|z' - z_j|}} \frac{f_{\pm}(x_j, k_0)}{\sqrt[4]{\lambda}} \right) \end{aligned}$$

С геометрической точки зрения это означает возникновение непроходимой части экрана и областей света и тени. Переходную область описывает следующая простая лемма.

Лемма 3.3. Пусть $k > 0$, $z' = (x', y')$, $|z'| \rightarrow \infty$ и отношение $x'/y' = -\tan \sigma$ постоянно, x ограничено, а $\omega \in (-\pi + \delta, 0 - \delta)$. Тогда справедливы следующие асимптотические представления

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\{y \cos \omega + \sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}\}}}{((y-y')^2 + (x-x')^2)^{1/4}} dy \\
&= \frac{e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi}}{-\sin \omega k} \sum_{\pm} \chi_{+}(\mp x') e^{ik\langle z', \widehat{q}_{\pm} \rangle \pm ikx \sin \omega} + O(|z'|^{-3/2}), \\
& \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ik\{y \cos \omega + \sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}\}}}{((y-y')^2 + (x-x')^2)^{1/4}} dy \\
&= \frac{e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi}}{-k \sin \omega} \sum_{\pm} \chi_{+}(\mp x') e^{ik\langle z', \widehat{q}_{\pm} \rangle \pm ikx \sin \omega} \\
&\quad \times F \left(-\sqrt{\frac{\sin \omega}{kx'} (k^2 |z'|^2 - \langle z', k\widehat{q}_{\pm} \rangle^2)} \right) + O(|z'|^{-3/2}) \quad (3.18)
\end{aligned}$$

где $q_{+} = (-\sin \omega, \cos \omega)$, $\widehat{q}_{-} = (\sin \omega, \cos \omega)$, F – функция Френеля:

$$\begin{aligned}
F(q) &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^q e^{iy^2} dy \\
F(q) &\xrightarrow{q \rightarrow \infty} 1
\end{aligned}$$

Доказательство леммы. Доказательство леммы опирается на метод стационарной фазы: поскольку фаза

$$\Phi(y) = y \cos \omega + \sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}$$

в показателе экспоненты растет при росте z' , подынтегральное выражение сильно осциллирует. Найдем точку стационарной фазы

$$\partial_y \Phi(y_{cr}) = 0$$

$$y_{cr} - y' = -\cos \omega \sqrt{(y_{cr} - y')^2 + (x - x')^2} \quad (3.19)$$

Разрешая уравнение относительно y_{cr} , получим два корня

$$y_{cr} = y' \pm \frac{x - x'}{\tan \omega}.$$

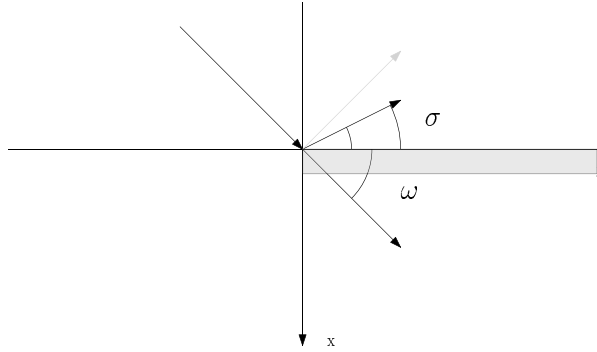


Рис. 4. К отражению от полуоси.

Отметим, что поскольку $\sqrt{(y - y')^2 + (x - x')^2} > 0$, так как это модуль вектора, то величина $(y_{cr} - y') / \cos \omega$ должна быть отрицательна (см. уравнение 3.19). Так как $\sin \omega < 0$, x ограничен, то выбор корня определяется так, чтобы $(y_{cr} - y') / \cos \omega < 0$, то есть определяется знаком x' . Тем самым возможны два вклада: один для корня со знаком $+$, когда $x' < 0$, и другой – для корня со знаком $-$ при $x' > 0$. Имея ввиду такой выбор знака, сосчитаем вклад от стационарной точки.

Заметим также, что стационарную точку можно записать в виде (пользуясь обозначениями введенными ранее):

$$y_{cr} = |z'| \cos \sigma \pm \frac{x + |z'| \sin \sigma}{\tan \omega} = \frac{|z'|}{\sin \omega} \sin(\omega \pm \sigma) \pm \frac{x}{\tan \omega}. \quad (3.20)$$

В случае $\sin(\omega \pm \sigma) > 0$, y_{cr} попадает в область интегрирования и можно сосчитать вклад стационарной точки, разложив фазу в показателе экспоненты:

$$\Phi(y_{cr}) = y' \cos \omega \pm (x - x')(-\sin \omega),$$

$$\Phi''(y_{cr}) = \pm \frac{-\sin^3 \omega}{x - x'},$$

$$\Phi''(y_{cr}) > 0 \text{ для любого значения } \chi_+(x'),$$

$$\Phi(y) \approx \frac{\Phi''(y_{cr})}{2} (y - y_{cr})^2 + \Phi(y_{cr}).$$

Сосчитаем амплитуду в стационарной точке:

$$\frac{1}{((y_{cr} - y')^2 + (x - x')^2)^{1/4}} = \sqrt{\frac{-\cos \omega}{y_{cr} - y'}} = \sqrt{\pm \frac{-\sin \omega}{x - x'}}.$$

В итоге получим интеграл типа:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ik\{\frac{\Phi''(y_{cr})}{2}(y-y_{cr})^2 + \Phi(y_{cr})\}}}{((y_{cr} - y')^2 + (x - x')^2)^{1/4}} dy. \quad (3.21)$$

Выполняя сдвиг и замену переменных, пользуясь обозначениями, введенными в формулировке леммы, а также пренебрегая x в пределах интегрирования, получим старший член в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ik\{y \cos \omega + \sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}\}}}{((y - y')^2 + (x - x')^2)^{1/4}} dy \\ &= \frac{e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi}}{-\sin \omega k} \sum_{\pm} e^{ik\langle z', \widehat{q}_{\pm} \rangle \pm ik \sin \omega x} F \left(-\sqrt{\frac{\sin \omega}{kx'}} (k^2 |z'|^2 - \langle z', k\widehat{q}_{\pm} \rangle^2) \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

В случае $\sin(\omega \pm \sigma) < 0$, перейдем к дополнению интеграла (к интегралу по $(0, \infty)$, то есть добавим и вычтем полный интеграл по оси) в который y_{cr} уже будет входить, проделаем эту же процедуру, и получим такой же ответ. Для случая, когда область интегрирования – вся ось, очевидно выполняется то же, но ответ упрощается (отсутствует функция Френеля). \square

Сопоставляя выражения с (3.18), убеждаемся, что получаем ту же структуру в точности: плоская волна с прошедшим или отраженным волновым вектором, умноженная на коэффициент прохождения или отражения. При этом появляется возможность описать не только итерацию $R_0 v_i R_i v_j R_j$, а в случае необходимости и следующие альтернирующие итерации. Как видно, функция Френеля описывает скачок в окрестности направлений отраженной и прошедшей волны и зависит от $|z'|^{1/2} \sin(\sigma \pm \omega)$, то есть в окрестности $\sigma \pm \alpha \sim |z'|^{-1/2}$. Вне этих окрестностей стационарная точка уходит на одну из бесконечностей при $|z'| \rightarrow \infty$.

Как уже упоминалось ранее, в ходе всех этих рассуждений делалось довольно много неосторожных предположений, неоправданных переходов. Более строгое доказательство опирается на использование

метода многомерной стационарной фазы, но теряет простоту и наглядный геометрический вид. Для общности будем рассматривать "трехкратное взаимодействие", поскольку умение обращаться с интегралом такого типа позволит нам обращаться и с "многократными" взаимодействиями. Хотя в 2.3 входят лишь "трехкратные" взаимодействия, в случае частиц разных масс в это выражение будут входить члены, отвечающие большему числу взаимодействий, которые не приведут к принципиальным усложнениям. Случай же "двукратного" взаимодействия оказывается еще проще.

Прежде всего отметим, что использование выражения для ядра резольвенты (3.9) можно оправдать тем, что вне окрестности направлений ухода, основной вклад дают именно области, далекие от центра, что позволяет использовать асимптотику ядра. При этом ядро "двухчастичной" резольвенты $R_i(z, z'|\lambda)$ проще всего рассматривать как свертку

$$R_i(z, z'|\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\xi r(x, x'|\xi) r_0(y, y'|\lambda - \xi)$$

где r – резольвента одномерной задачи с потенциалом $v(x)$, r_0 – соответствующая свободная резольвента, и γ – контур интегрирования вокруг положительной полуоси в стандартном отрицательном направлении, отделяющий точку $\lambda = E + i0$ от положительной полуоси.

Свободная резольвента r_0 для случая $\text{Im } k > 0$ дается равенством

$$r_0(y, y'|k^2) = \frac{i}{2k} e^{ik|y-y'|}.$$

Резольвента $r(x, x'|k^2)$ равна

$$\frac{\phi_+(x)\phi_-(x')}{W}, \quad x < x' \quad \text{и} \quad \frac{\phi_-(x)\phi_+(x')}{W}, \quad x > x',$$

здесь $W = W[\phi_+, \phi_-] = 2iks(k)$ – Якобиан решений. Пусть $x < x'$. Тогда

$$R_i(z, z'|\lambda) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} dk^2 \phi_+(x, \sqrt{\lambda - k^2}) \phi_-(x', \sqrt{\lambda - k^2}) \times \frac{1}{4s(\sqrt{\lambda - k^2})\sqrt{\lambda - k^2}k} e^{ik|y-y'|},$$

где ветвь корня $\sqrt{\lambda - k^2}$ выбирается с положительной мнимой частью. Поскольку основной вклад дает окрестность точки $k_0 = \sqrt{\lambda}$, то структура фазы сохраняется и в конечных областях, а значит и вклад стационарных точек. Тем не менее в конечных областях иную структуру имеет амплитуда при осциллирующей экспоненте, однако так как интеграл в ограниченной области соответствует рассеянию на компактной области, то наш ответ будет отличаться лишь на расходящуюся круговую волну с гладкой амплитудой.

Во-вторых, поскольку все интегралы следует понимать как условно сходящиеся, то в исходной постановке, конечно, интеграл-свертка ядер является повторным, а не кратным. Однако, выделяя окрестности точек стационарной фазы, мы можем перейти именно к кратному интегралу в окрестности этих точек.

Рассмотрим асимптотику интеграла – свертку ядер $R_0 v_i R_i v_j R_j v_k R_k$, $i \neq j \neq k$, методом многомерной стационарной фазы как интеграл по y_i, y_j, y_k , с интегралами по x_i, x_j, x_k в качестве внешних, с уже выделенным множителем расходящейся круговой волны:

$$\begin{aligned}
& R_0 v_i R_i v_j R_j v_k R_k(z, z' | \lambda) \\
& \underset{z, z' \rightarrow \infty}{\approx} \iiint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2} C^4 \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|z-z_i|+|z_i-z_j|+|z_j-z_k|+|z_k-z'|)}}{\sqrt{|z-z_i||z_i-z_j||z_j-z_k||z_k-z'|}} \\
& \quad \times \frac{f_{\pm}(x_i)f_{\pm}(x_j)f_{\pm}(x_k)}{(\sqrt{\lambda})^3} dz_i dz_j dz_k. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Точка стационарной фазы в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases}
\langle \nabla_{z_i} (\langle -\hat{z}, z_i \rangle + |z_i - z_j|), l_i \rangle = \left\langle \frac{z - z_i}{|z - z_i|} - \frac{z_i - z_j}{|z_i - z_j|}, l_i \right\rangle = 0, \\
\langle \nabla_{z_j} (|z_j - z_i| + |z_j - z_k|), l_j \rangle = \left\langle \frac{z_i - z_j}{|z_i - z_j|} - \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|}, l_j \right\rangle = 0, \\
\langle \nabla_{z_k} (|z_k - z_j| + |z_k - z'|), l_k \rangle = \left\langle \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} - \frac{z_k - z'}{|z_k - z'|}, l_k \right\rangle = 0.
\end{cases} \quad (3.24)$$

и имеет всю ту же явную геометрическую интерпретацию: путь, по которому один лучей с направлением $-\hat{z}$, приходящий с бесконечности, может добраться в точку z' путем отражений или прохождений сквозь экраны – сечения носителя потенциалов v_i, v_j, v_k при фиксированном x_i, x_j, x_k . Разрешимость такого уравнения для случая двойного интеграла продемонстрирована на рис. 5.

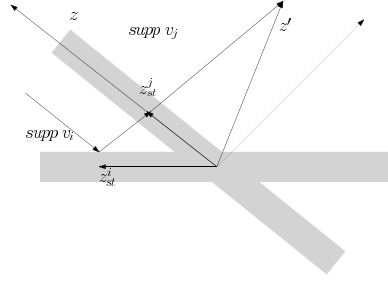


Рис. 5. К вкладу стационарной точки в двойном интеграле.

В случае, если $-\widehat{z}'$ лежит вне малой окрестности направления, разделяющего области света и тени, то стационарная точка вновь лежит далеко от центра (удаляется от центра с ростом $|z'|$), а значит сузив интегрирование на окрестность стационарной точки, можно перейти к повторному интегралу, где z_j – большой параметр для внутреннего интеграла, а значит справедливы построения леммы 3.3 и следствия из нее. Поэтому основной интерес представляют окрестности направлений, разделяющих области света и тени. Тогда стационарная точка лежит в конечной области.

Пусть $y_{cr}^i, y_{cr}^j, y_{cr}^k$ – решение уравнений (3.24) при фиксированных x_i, x_j, x_k , и $z_{cr}^i = (x_i, y_{cr}^i), z_{cr}^j = (x_j, y_{cr}^j), z_{cr}^k = (x_k, y_{cr}^k)$. Рассмотрим интегралы по y_i, y_j, y_k в малой окрестности этих точек (вне этих точек возможно интегрирование по частям, что даст вклад лишь в поправку). В качестве параметра малости можно взять $1/|z|$.

В этой окрестности справедливы разложения фазы:

$$\langle -\widehat{z}, z_i \rangle = \langle -\widehat{z}, z_i - z_{cr}^i \rangle + \langle -\widehat{z}, z_{cr}^i \rangle \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} |z_i - z_j| &\approx \left\langle z_{cr}^j, \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|} \right\rangle - \left\langle z_{cr}^i, \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|} \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, z_j - z_{cr}^j \right\rangle - \left\langle \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, z_i - z_{cr}^i \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2|z_{cr}^j - z_{cr}^i|} \left(|z_i - z_{cr}^i - (z_j - z_{cr}^j)|^2 \right) \end{aligned}$$

$$- \left\langle \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, z_i - z_{cr}^i - (z_j - z_{cr}^j) \right\rangle^2 \right), \quad (3.26)$$

и аналогично для $|z_j - z_k|$.

$$\begin{aligned} |z_k - z'| &\approx |z' - z_{cr}^k| - \left\langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z_k - z_{cr}^k \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2|z' - z_{cr}^k|} \left(|z_k - z_{cr}^k|^2 - \left\langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z_k - z_{cr}^k \right\rangle^2 \right) \\ &= \left\langle z', \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|} \right\rangle - \left\langle z_{cr}^k, \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|} \right\rangle - \left\langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z_k - z_{cr}^k \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2|z' - z_{cr}^k|} \left(|z_k - z_{cr}^k|^2 - \left\langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z_k - z_{cr}^k \right\rangle^2 \right). \quad (3.27) \end{aligned}$$

Вектора вида $z_{cr}^j - z_{cr}^i$ имеют направления, совпадающие с отраженным или прошедшим лучом на предыдущем шаге, а $z_j - z_{cr}^j$ пропорциональны l_j , а потому при суммировании фаз, сокращаются следующие вклады:

$$\left\langle \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, z_j - z_{cr}^j \right\rangle - \left\langle \frac{z_{cr}^k - z_{cr}^j}{|z_{cr}^k - z_{cr}^j|}, z_j - z_{cr}^j \right\rangle = 0.$$

А во вкладах

$$\left\langle z_{cr}^j, \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|} \right\rangle - \left\langle z_{cr}^j, \frac{z_{cr}^k - z_{cr}^j}{|z_{cr}^k - z_{cr}^j|} \right\rangle$$

остаются лишь члены содержащие x_j , умноженные на проекцию единичного вектора на k_j , которые либо удваиваются, либо также сокращаются, как это было раньше, что даст вклад в интеграл по x_i , который будет являться множителем-коэффициентом прохождения или отражения. Другие вклады, содержащие x_i , можно считать малыми, поскольку они всегда умножаются вместе с малым параметром.

Не сократится лишь $\left\langle z', \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|} \right\rangle$, который и будет фазой плоской волны.

Выполним в интегралах замену:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i &= h_i(y_i, y_j) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2|z_{cr}^j - z_{cr}^i|} (|z_i - z_{cr}^i - (z_j - z_{cr}^j)|^2 - \left\langle \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, z_i - z_{cr}^i - (z_j - z_{cr}^j) \right\rangle^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_j &= h_j(y_j, y_k) \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2|z_{cr}^k - z_{cr}^j|} (|z_j - z_{cr}^j - (z_k - z_{cr}^k)|^2 - \langle \frac{z_{cr}^k - z_{cr}^j}{|z_{cr}^k - z_{cr}^j|}, z_j - z_{cr}^j - (z_k - z_{cr}^k) \rangle^2)}, \\
 \tilde{y}_k &= h_k(y_k, z') \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2|z' - z_{cr}^k|} (|z_k - z_{cr}^k|^2 - \langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z_k - z_{cr}^k \rangle^2)}.
 \end{aligned}$$

Область интегрирования по y_i останется всей осью, а по y_j, y_k нижний предел интегрирования изменится:

$$h_j(0, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 h_k(0, z') &= \sqrt{\frac{1}{2|z' - z_{cr}^k|} (|z_{cr}^k|^2 - \langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z_{cr}^k \rangle^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2|z' - z_{cr}^k|} (|z' - z_{cr}^k|^2 - 2\langle z', z' - z_{cr}^k \rangle + |z'|^2 - \langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z_{cr}^k \rangle^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2|z' - z_{cr}^k|} (|z_{cr}^k - z'|^2 + |z'|^2 - \langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z' \rangle^2)} - |z_{cr}^k - z'|^2 \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2|z'|} (|z'|^2 - \langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z' \rangle^2)}.
 \end{aligned}$$

Якобиан замены имеет вид

$$\frac{D(\tilde{y}_i, \tilde{y}_j, \tilde{y}_k)}{D(y_i, y_j, y_k)} = \begin{vmatrix} \partial_{y_i} h_i & \partial_{y_j} h_i & 0 \\ 0 & \partial_{y_j} h_j & \partial_{y_k} h_k \\ 0 & 0 & \partial_{y_k} h_k \end{vmatrix} = \partial_{y_i} h_i \cdot \partial_{y_j} h_j \cdot \partial_{y_k} h_k$$

Амплитуда в интеграле вместе с якобианом заменяются на значение в точке стационарной фазы. Сосчитаем к примеру $\partial_{y_i} h_i$ в этой точке:

$$\partial_{y_i} h_i = \frac{|z_i - z_{cr}^i - (z_j - z_{cr}^j)| - \langle \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, l_i \rangle \langle \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, z_i - z_{cr}^i - (z_j - z_{cr}^j) \rangle}{\sqrt{2}|z_{cr}^j - z_{cr}^i|^{1/2} \sqrt{|z_i - z_{cr}^i - (z_j - z_{cr}^j)|^2 - \langle \frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, z_i - z_{cr}^i - (z_j - z_{cr}^j) \rangle^2}} \quad (3.28)$$

$$\partial_{y_i} h_i|_{(z_i, z_j) \rightarrow (z_{cr}^i, z_{cr}^j)} = \frac{\sin^* \left(\frac{z_{cr}^j - z_{cr}^i}{|z_{cr}^j - z_{cr}^i|}, l_i \right)}{\sqrt{2} |z_{cr}^j - z_{cr}^i|^{1/2}}, \quad (3.29)$$

где под $\sin^*(\cdot, \cdot)$ подразумевается синус угла между парой векторов. Корень модуля разности стационарных точек сокращается с таким же корнем в амплитуде.

И аналогично с остальными производными. Собирая все вместе, получим несколько вкладов от различных стационарных точек, соответствующих "пути" луча. Поскольку мы не преследуем комбинаторное описание вкладов, которое было дано в [7], [10], выпишем лишь один из вкладов, отвечающий например "пути" луча, отразившегося от i -го экрана, затем прошедшего без отражения через экраны j, k :

$$\begin{aligned} & R_0 v_i R_i v_j R_j v_k R_k(z, z' | \lambda) \\ & \underset{z, z' \rightarrow \infty}{\approx} C(\sqrt{2\pi} e^{i\pi/4})^3 \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z|}}{|z|} \tilde{r}(-\langle \hat{z}, k_i \rangle) \tilde{s}(\langle \tau_i \hat{z}, k_j \rangle) \tilde{s}(\langle \tau_i \hat{z}, k_k \rangle) F(0) \\ & \times F \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{2|z'|}} \left(|z'|^2 - \left\langle \frac{z' - z_{cr}^k}{|z' - z_{cr}^k|}, z' \right\rangle^2 \right) \right) e^{i\sqrt{\lambda} \langle z', \tau_i \hat{z} \rangle}. \quad (3.30) \end{aligned}$$

На этом мы завершим доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Mourre, Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. — Commun. Math. Phys. **78** (1981), 391–408.
2. P. Perry, I. M. Sigal, B. Simon, Spectral analysis of N-body Schrödinger operators. — Ann. Math. **114** (1981), 519–567.
3. Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*. — Тр. МИАН СССР **69** (1963), 3–122.
4. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*. М., Наука (1985).
5. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Задача рассеяния нескольких одномерных квантовых частиц. Структура и асимптотика предельных значений ядра резольвенты*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **461** (2017), 14–51.
6. A. M. Budylin, V. S. Buslaev, Reflection operator and their applications to asymptotic investigations of semiclassical integral equations. — Adv. Soviet Math., AMS, Providence **7** (1991), 107–157.
7. V. S. Buslaev, S. B. Levin, Asymptotic Behavior of the Eigenfunctions of the Many-particle Shrodinger Operator. I. One-dimensional Particles. — Amer. Math. Soc. Transl. **225**, No. 2 (2008), 55–71.

8. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, *Асимптотическое поведение собственных функций трехчастичного оператора Шредингера. II Одномерные заряженные частицы.* — Алгебра и анализ **22**, No. 3 (2010), 60–79.
9. V. S. Buslaev, S. B. Levin, P. Neittaannmäki, T. Ojala, *New approach to numerical computation of the eigenfunctions of the continuous spectrum of three-particle Schrödinger operator. I One-dimensional particles, short-range pair potentials.* — J. Phys. A: Math.Theor. **43** (2010), 285205.
10. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц.* — Проблемы мат. физики, ЛГУ, **9** (1979), 14–30.

Baibulov I. V., Budylin A. M., Levin S. B. The absolutely continuous spectrum eigenfunctions asymptotics of the three one-dimensional quantum particles scattering problem.

The structure of the absolutely continuous spectrum eigenfunctions asymptotics of the three one-dimensional quantum particles scattering problem is described in the work for the case of finite repulsive pair potentials.

Физический факультет
С.-Петербургский государственный университет
E-mail: molezz@bk.ru

Поступило 1 ноября 2018 г.

Физический факультет
С.-Петербургский государственный университет
E-mail: a.budylin@spbu.ru

Физический факультет
С.-Петербургский государственный университет
E-mail: s.levin@spbu.ru