Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 471, 2018 г.

В. М. Бабич

ЗАДАЧА О ТОЧЕЧНОМ ИСТОЧНИКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ (ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ АНЗАЦ И ДВОЙСТВЕННОЕ ЕМУ НЕСТАЦИОНАРНОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ)

§1. Введение

Для волнового уравнения с непостоянной скоростью корректна задача Коши. Для соответствующего фундаментального решения известно разложение Адамара, представляющее собой асимптотику по гладкости этой обобщенной функции. Формальное преобразование Фурье по времени разложения Адамара приводит к асимптотическому (большой параметр – частота) разложению задачи о точечном источнике гармонических колебаний [1]. Для уравнений Максвелла в неоднородной среде такой подход к построению высокочастотного разложения затруднителен: неясно как строить соответствующий аналог разложения Адамара. (См. в этой связи статью [2], где авторы находят высокочастотное разложение, работая непосредственно с системой уравнений, описывающей высокочастотный источник электромагнитных колебаний.)

В настоящей статье рассматриваются уравнения Максвелла для неоднородной среды. Для точечного источника высокочастотных колебаний удается построить главный член адамарова разложения, что в свою очередь приводит к формуле для источника колебаний, применимой как вблизи источника, так и при удалении от него.

§2. Точечный источник колебаний импульсного типа

Пусть распространение электромагнитных (э-м) волн в рассматриваемой среде описывается классической системой уравнений Максвелла. Если диэлектрическая проницаемость ε, или магнитная μ, или обе

Ключевые слова: анзац Адамара, точечный источник колебаний, уравнения Максвелла.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 17-01-00529.

они постоянны, то, как известно, систему уравнений э-м поля можно свести к одному векторному уравнению:

$$\frac{1}{v^2(\mathbf{x})}\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

Здесь $v(\mathbf{x})$ скорость распространения э-м колебаний рассматриваемой среде, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ характеризует источники э-м волн.

Пусть $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$. Обратимся к классическим уравнениям Максвелла:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\mathbf{E}, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\ \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{2.3}$$

Здесь $c = \mathrm{const}$ – скорость света в пустоте.

Применим оператор $\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ к первому из уравнений (2.2) и, используя вторую пару уравнений(2.3) и равенство $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, получим:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} + \mathrm{rotrot}\mathbf{H} = \mathrm{rot}\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$v(\mathbf{x}) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.4}$$

Мы пришли к уравнению вида (2.1). Случай $\mu = \mathrm{const}$ тоже приводит к уравнению вида (2.1).

Предположим, что источник колебаний действует лишь при $t \geqslant 0$, т.е. $\mathbf{j}|_{t<0} = 0$ и что ток $\mathbf{j}$ сосредоточен в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Пусть зависимость тока от времени описывается множителем $\chi(t)$:

$$\mathbf{j} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{m}\chi(t), \quad t \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{m}$ постоянный вектор. Для определенности положим $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ – орт оси z. Если $v(\mathbf{x}) = \mathrm{const} > 0$, то уравнение (2.4) – лишь постоянным множителем в правой части равенства отличается от хорошо известного уравнения для центра вращения в эластодинамике (см. например [3]), причем $\frac{1}{v^2}$ играет роль плотности упругой среды, $\mathbf{H}$ – роль вектора смещения, а модуль сдвига $\mu = 1$. Предполагая,что $\mathbf{H}|_{t<0} = 0$, нетрудно найти (см. [3] гл. 3) выражение для $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\left(\mathbf{e}_z \frac{\chi(t - \frac{r}{v})}{cr}\right), \qquad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|. \tag{2.6}$$

Предположим, что $\chi(t) = \delta(t)$ (δ – дельта функция, т.е. источник имеет импульсный характер). В этом случае

$$\mathbf{H} = \frac{2}{cv}\mathrm{rot}\left(\mathbf{e}_z\delta(t^2 - \frac{\mathbf{r}^2}{v^2})\right) = \frac{4}{cv^3}\left(\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right)\delta'(t^2 - \frac{\mathbf{r}^2}{v^2}) \tag{2.7}$$

(Косой крест $\times$ здесь знак векторного произведения). Вернемся к уравнению (2.1). Его мы будем рассматривать, полагая, (см. [3] (глава 3)

$$\mathbf{w}|_{t<0} = 0, \quad \mathbf{f}|_{t<0} = 0, \quad \mathbf{f} = 4\pi\mathrm{rot}(\mathbf{e}_z\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t)). \tag{2.8}$$

§3. Неоднородная среда

Пусть теперь волновой процесс описывается уравнением (2.1), где $v = v(\mathbf{x}) > 0$ – гладкая $\in C^\infty$ функция точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Мы предположим в соответствии с формулами (2.1)–(2.7), что решение задачи (2.1), (2.8) описывается аналогом анзаца Адамара (см. [4]):

$$\mathbf{w} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{u}_j\psi_j(\gamma) \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_j$ гладкие вектор-функции точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\gamma = t^2 - \tau^2$, τ – эйконал:

$$\tau = \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \frac{ds}{v}, \tag{3.2}$$

$v(\mathbf{x})$ – гладкая $\in C^\infty$ положительная функция точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Функции ψ_j описывают сингулярности $\mathbf{w}$. Пусть в соответствии с §2 ψ_j однородные обобщенные функции степени $j - 2$, а именно:

$$\psi_0(\gamma) = \delta'(\gamma), \psi_1(\gamma) = \delta(\gamma), ..., \psi_p(\gamma) = \frac{\gamma_+^{p-2}}{(p-1)!}, \dots \tag{3.3}$$

Здесь p – целое $\geqslant 2$. При $p \geqslant 2$ $\quad \gamma_+^{p-2} = \gamma^{p-2}$, $\gamma \geqslant 0$ и $\gamma_+^{p-2} = 0$, если $\gamma < 0$. Очевидно $\frac{d\psi_j(\gamma)}{d\gamma} = \psi_{j-1}$.

Подставим $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})\psi_j(\gamma)$ в равенство (2.1). При расчете мы воспользуемся классическим тождеством

$$\nabla \times \nabla \times = \mathrm{rotrot} = \mathrm{graddiv} - \Delta.$$

Мы получим:

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla\times\nabla\times\right)(\mathbf{u}_j\psi_j)=\frac{1}{v^2}\mathbf{u}_j(2\psi_{j-1}+4\gamma\psi_{j-2})+\psi_j\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}_j$$
$$+\nabla\tau^2(\nabla\tau^2\mathbf{u}_j)\psi_{j-1}+\mathrm{div}\mathbf{u}_j(-\nabla\tau^2)\psi_{j-1}$$
$$+\psi_{j-1}\nabla\left((\nabla\tau^2)\mathbf{u}_j\right)+\frac{4\tau}{v^2}\frac{\partial\mathbf{u}_j}{\partial\tau}\psi_{j-1}+\psi_{j-1}\mathbf{u}_j\Delta\tau^2. \qquad (3.4)$$

§4. Рекуррентные формулы

Если (формально) подставить ряд (3.1) в уравнение (2.1), воспользоваться формулами (3.4), а также легко проверяемым равенством

$$\gamma\psi_j(\gamma)=\psi_{j+1}(\gamma)(j-1),$$

и приравнять нулю коэффициенты при ψ_{-2},ψ_{-1} и т.д., то мы получим:

1) коэффициент при ψ_{-2}:

$$\nabla\tau^2(\nabla\tau^2\mathbf{u}_0)=0. \qquad (4.1)$$

Равенство (4.1) означает,что вектор $\mathbf{u}_0$ ортогонален к экстремалям функционала $\int\frac{ds}{v}$, выходящим из точки $\mathbf{x}_0$. Это связано с поперечным характером колебаний.

2) Приравняем нулю коэффициент при ψ_{-1}. Принимая во внимание соотношение (4.1), приходим к равенству:

$$\frac{\mathbf{u}_0}{v^2}(-10)+\mathrm{div}\mathbf{u}_0(-\nabla\tau^2)+\nabla\tau^2(\nabla\tau^2\mathbf{u}_1)+\nabla(\nabla\tau^2\mathbf{u}_0)+\frac{4\tau}{v^2}\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\tau}+\Delta\tau^2\mathbf{u}_0=0. \qquad (4.2)$$

3) Ортогональная к $\nabla\tau^2$ компонента вектора, стоящего в левой части равенства (4.2), должна равняться нулю:

$$\frac{\mathbf{u}_0}{v^2}(-10)+\mathbf{u}_0\Delta\tau^2+\frac{4\tau}{v^2}\left(\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\tau}\right)_\perp=0, \qquad (4.3)$$

где $\left(\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\tau}\right)_\perp$ ортогональная к $\nabla\tau^2$ компонента вектора $\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\tau}$.

§5. Обыкновенные дифференциальные уравнения вдоль лучей для компонент вектора $\mathbf{u}_0$

Введем в окрестности фиксированного луча систему координат с ортами $\mathbf{s},\mathbf{n},\nu$, где $\mathbf{s}$ – единичный касательный вектор, $\mathbf{n}$ вектор главной нормали, ν вектор бинормали. Векторное равенство (4.3) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для соответствующих компонент вектора $\mathbf{u}_0$. Наши построения во многом аналогичны построениям обычного лучевого метода в теории поперечных упругих волн, распространяющихся из точечного источника колебаний, а также, что естественно, построениям классического лучевого метода в электродинамике.

Итак, пусть

$$\mathbf{u}_0 = u_{0n}\mathbf{n} + u_{0\nu}\nu \tag{5.1}$$

Подставляя равенство (5.1) в (4.3) и, пользуясь классическими формулами Френе,

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = K\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -K\mathbf{s} - T\nu, \quad \frac{d\nu}{ds} = T\mathbf{n} \tag{5.2}$$

(здесь $\mathbf{s}$ длина дуги луча, K его кривизна, T – кручение), получим:

$$\frac{4\tau}{v^2}\left(\frac{du_{0n}}{d\tau} + Tu_\nu v\right) + \frac{(-10)u_{0n}}{v^2} + \Delta\tau^2 u_{0n} = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{4\tau}{v^2}\left(\frac{du_{0\nu}}{d\tau} - Tu_{0n} v\right) + \frac{(-10)u_{0\nu}}{v^2} + \Delta\tau^2 u_{0\nu} = 0 \tag{5.4}$$

§6. Выражение для $|\mathbf{u}_0|$

Найдем сначала аналитическое выражение для $|\mathbf{u}_0| = \sqrt{u_{0n}^2 + u_{0\nu}^2}$. Умножим уравнение (5.3) на u_{0n}, уравнение (5.4) на $u_{0\nu}$ и сложим полученные выражения. В результате мы придем к уравнению для $|\mathbf{u}_0|^2$:

$$\frac{2\tau}{v^2}\frac{d}{d\tau}\mathbf{u}_0^2 + (\Delta\tau^2 - \frac{10}{v^2})\mathbf{u}_0^2 = 0. \tag{6.1}$$

Последнее уравнение удается записать в дивергентной форме:

$$\frac{2\tau}{v^2}\frac{d}{d\tau}\mathbf{u}_0^2 + (\Delta\tau^2 - \frac{10}{v^2})\mathbf{u}_0^2 \equiv 2\tau^5\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\tau^{-4}|\mathbf{u}_0|^2\frac{\partial\tau}{\partial x^i}\right) = 0. \tag{6.2}$$

Здесь $i = 1, 2, 3$. Введем классические лучевые координаты: луч, выходящий из точки $\mathbf{x}_0$, будем характеризовать координатами η_1, η_2, точки на луче – значением $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \int\limits_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \frac{ds}{v}$.

Пусть $\mathbf{v}$ – вектор скорости: $\mathbf{v} = v^2\nabla\tau$. Равенство (6.2) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(Av_i) = 0, \tag{6.3}$$

где v_i компоненты вектора скорости,

$$A = \frac{\mathbf{u}_0^2}{\tau^4 v^2}. \tag{6.4}$$

Хорошо известно, что из (6.3) следует (см. например [3] формулы (4.78), (4.81)), что на каждом луче постоянна функция

$$\left(\frac{\mathbf{u}_0^2}{\tau^4 v^2}\right) vJ, \tag{6.5}$$

где J – геометрическое расхождение:

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_{\mathbf{1}}} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta_{\mathbf{2}}} \right|, \tag{6.6}$$

откуда

$$|\mathbf{u}_0| = \frac{\sqrt{v}\tau^2}{\sqrt{J}} \varphi(\eta_1, \eta_2). \tag{6.7}$$

Функция $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ уравнением (6.3)–(6.4) или (что то же) (6.1) не определяется. Чтобы найти $\varphi(\eta_1, \eta_2)$, надо задать в точке x_0 источник колебаний.

§7. Закон Рытова

Если выполнено равенство (6.1), то закон (Рытова) по которому меняется направление вектора $\mathbf{u}_0$ выводится достаточно стандартно – см. например [3] раздел 4.4.

Компоненты вектора $\mathbf{u}_0$ на плоскости n, ν можно задать, положив при должном θ

$$u_{0n} = |\mathbf{u}_0| \cos\theta, u_{0\nu} = |\mathbf{u}_0| \sin\theta. \tag{7.1}$$

Подставляя (7.1) в (5.4) и (5.5) и, пользуясь равенством (6.1), придем к закону Рытова:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = Tv. \tag{7.2}$$

§8. Нахождение в первом приближении продольной компоненты вектора w

Вернемся к равенству (4.2). Мы приравнивали нулю ортогональную $\nabla\tau$ компоненту вектора, стоящего в левой части равенства (4.2). Теперь мы приравняем нулю его продольную составляющую, т.е. его компоненту вдоль $\nabla\tau$. На этом пути мы сразу найдем продольную составляющую вектора $\mathbf{u}_1$. Этот результат определяет в первом приближении продольную составляющую вектора $\mathbf{w}$, так как продольная составляющая вектора $\mathbf{u}_0$ равна нулю. Мы придем к равенству:

$$\mathrm{div}\mathbf{u}_0(-\nabla\tau^2) + \frac{4\tau}{v}(-K\tau\nabla\tau) + \nabla\tau^2(\nabla\tau^2\mathbf{u}_1) = 0. \tag{8.1}$$

Из (8.1) находится продольная, т.е. параллельная $\nabla\tau$, компонента $\mathbf{u}_{1\tau}$ вектора $\mathbf{u}_1$.

Естественно предположить, что $\mathbf{u}_1$ несингулярно при $x = x_0$, т.е. в источнике колебаний. Для этого достаточно, чтобы при $x = x_0$ равнялись нулю $\mathbf{u}_{0n}$ и $\mathrm{div}\mathbf{u}_0$, что мы и будем предполагать.

Построение дальнейших приближений сталкивается с существенными трудностями: для $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ и т.д. получаются выражения, имеющие сингулярности при $x = x_0$. Эти трудности автор не смог преодолеть.

§9. Формулы для высокочастотных точечных источников э-м колебаний

Предположим, что, как и в работе [1], формальное преобразование Фурье по t $(-\infty < t, +\infty)$ полученного выражения для $\mathbf{w}$ дает искомую высокочастотную асимптотику э-м поля, создаваемого соответствующим точечным источником колебаний.

Мы имеем (формально) при $\mathbf{w}|_{t<0} = 0$, а при $t \geqslant 0$

$$\mathbf{w} \approx \mathbf{u}_0\delta'(t^2 - \tau^2) + \mathbf{u}_{1\tau}\delta(t^2 - \tau^2). \tag{9.1}$$

Преобразуем по Фурье это приближенное выражение для $\mathbf{w}$. Интегралы Фурье по t понимаются так, как это принято в теории обобщенных функций. Мы получим при $\omega \to +\infty$ следующую (эвристическую) асимптотическую формулу:

$$v \sim \mathbf{u}_0 f_{-\frac{3}{2}}(\omega, \tau) + \mathbf{u}_{1\tau} f_{-\frac{1}{2}}(\omega, \tau), \tag{9.2}$$

где, как и в работе [1],

$$f_p(\omega, \tau) = i\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pi p i}\left(\frac{2\tau}{\omega}\right)^p H_p^{(1)}(\omega\tau). \tag{9.3}$$

Здесь $H_p^{(1)}(\omega\tau)$ – соответствующая функция Ханкеля.

Список литературы

1. В. М. Бабич, *О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике колебаний в неоднородной среде.* — Журнал вычислительной математики и математической физики **5**, No 5 (1965), 949–952.
2. Wangtao Lu, Jianliang Qian, Robert Burridge, *Babich-like ansatz for three-dimensional point-source Maxwell's equations in an inhomogeneous medium at high frequencies.* — Multiscale Model. Simul. **14**, No 3 (2016), 1089–1122.
3. В. М. Бабич, А. П. Киселев, *Упругие волны. Высокочастотная теория.* СПб. БХВ-Петербург, 2014.
4. Р. Курант, *Уравнения с частными производными.* Мир, Москва, 1964.

Babich V. M. The point-source of electromagnetic waves in the case of nonhomogeneous media (High-frequency ansatz and dual to him singular solution).

The Maxwell equations for nonhomogeneous media is considered. The formula (in the first approximation) for non-stationary point source of waves is found. The Fourier transform by t of this expression leads to short wave asymptotic formula for wave field of high frequency point source of electromagnetic oscillations. The large parameter is the frequency.

С.Петербургское отделение
Математического института
им. В. А.Стеклова РАН,
Наб. р. Фонтанки д. 27,
191023 С.Петербург, Россия
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 2 июля 2018 г.