Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 470, 2018 г.

Г. К. Рябов

ОТДЕЛИМОСТЬ КОЛЕЦ ШУРА НАД АБЕЛЕВОЙ ГРУППОЙ ПОРЯДКА $4p$

§1. Введение

Кольцом Шура, или *S-кольцом*, над конечной группой G называется подкольцо целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$, являющееся свободным $\mathbb{Z}$-модулем, натянутым на специальное разбиение группы G; при этом разбиение замкнуто относительно взятия обратного и содержит единичный элемент группы G в качестве одного из классов (точные определения даны в § 2). Элементы разбиения, задающего S-кольцо, принято называть *базисными множествами* S-кольца. Основы теории S-колец заложил Шур [14]; позднее ее развил Виланд [15]. Подробнее об S-кольцах см. [12].

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ – S-кольца над группами G и G' соответственно. *Изоморфизмом (комбинаторным)* из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$ называется биекция $f : G \to G'$ такая, что для каждого базисного множества X S-кольца $\mathcal{A}$ множество $X' = X^f$ является базисным множеством S-кольца $\mathcal{A}'$ и f является изоморфизмом графов Кэли $\mathrm{Cay}(G, X)$ и $\mathrm{Cay}(G', X')$. *Алгебраический изоморфизм* из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$ – это кольцевой изоморфизм между ними, индуцирующий биекцию между базисными множествами S-кольца $\mathcal{A}$ и базисными множествами S-кольца $\mathcal{A}'$. Несложно проверить, что каждый комбинаторный изоморфизм индуцирует алгебраический. Однако, не каждый алгебраический изоморфизм индуцируется комбинаторным (см. [2]).

Пусть $\mathcal{K}$ – класс групп. Будем говорить, что S-кольцо *отделимо* относительно $\mathcal{K}$, если каждый алгебраический изоморфизм из него в S-кольцо над группой из $\mathcal{K}$ индуцируется комбинаторным изоморфизмом. Отделимое S-кольцо определяется с точностью до изоморфизма

Ключевые слова: кольца Шура, графы Кэли, проблема изоморфизма графов Кэли.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-31-00051.

лишь тензором своих структурных констант. Назовем конечную группу *отделимой* относительно $\mathcal{K}$, если каждое S-кольцо над этой группой отделимо относительно $\mathcal{K}$. Обозначим классы циклических и абелевых групп через $\mathcal{K}_C$ и $\mathcal{K}_A$ соответственно, а циклическую группу порядка n – через C_n. В [8] было доказано, что циклические p-группы отделимы относительно $\mathcal{K}_C$. С другой стороны, известны примеры циклических групп, не отделимых относительно $\mathcal{K}_C$ [2]. Из результатов, полученных в [4], следует, что группы C_{p^k} и $C_p \times C_{p^k}$, где $p \in \{2, 3\}$ и $k \geqslant 1$, отделимы относительно $\mathcal{K}_A$. Однако, пока классификация всех отделимых групп далека от полной. В действительности, только упомянутые выше семейства групп являются известными примерами бесконечных семейств отделимых групп.

В данной работе изучаются S-кольца и абелевы группы, отделимые относительно $\mathcal{K}_A$. На протяжении текста статьи мы будем писать для краткости "отделимо" вместо "отделимо относительно $\mathcal{K}_A$". Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Абелева группа порядка $4p$ отделима для каждого простого числа p.*

Пусть G – абелева группа порядка $4p$, где p – простое число. Тогда либо $p = 2$ и $G \cong C_4 \times C_2$, либо $G \cong C_{4p}$, либо $G \cong C_2 \times C_2 \times C_p$. Доказательство теоремы 1 основано на описании всех S-колец над G, которое было получено в [3] для $G \cong C_{4p}$ и в [9] для $G \cong C_2 \times C_2 \times C_p$. Это описание в удобной для нас форме приведено в § 3.

Интерес к отделимым группам обусловлен в том числе и проблемой проверки изоморфизма графов Кэли. Если группа G отделима, то проблема изоморфизма для графов Кэли над G может быть эффективно решена с помощью алгоритма Вейсфейлера–Лемана [5]. В смысле [10] это означает, что WL-размерность класса графов Кэли над G не превосходит 2 (см. также [6, глава 6.2] и [4, глава 8]).

Следствие. *Пусть p – простое число, G – абелева группа порядка $4p$, и $\mathcal{G}$ – класс графов Кэли над G. Тогда WL-размерность класса $\mathcal{G}$ не превосходит 2.*

Доказательство. Следует из [4, предложение 8.1] и теоремы 1. □

Стоит отметить, что проблемы распознавания и изоморфизма для графов Кэли над абелевой группой порядка $4p$, где p – простое число, были решены в [13].

Обозначения

Как обычно, через $\mathbb{Z}$ обозначается кольцо целых чисел.

Проекции множества $X \subseteq A \times B$ на A и B обозначаются через X_A и X_B соответственно.

Множество нетривиальных элементов группы G обозначается через $G^{\#}$.

Пусть $X \subseteq G$. Элемент $\sum\limits_{x \in X} x$ группового кольца $\mathbb{Z}G$ обозначается через $\underline{X}$.

Порядок элемента $g \in G$ обозначается через $|g|$.

Множество $\{x^{-1} : x \in X\}$ обозначается через X^{-1}.

Подгруппа группы G, порожденная X, обозначается через $\langle X \rangle$; также положим $\mathrm{rad}(X) = \{g \in G : \ gX = Xg = X\}$.

Если $m \in \mathbb{Z}$, то множество $\{x^m : x \in X\}$ обозначается через $X^{(m)}$.

Множество ребер графа Кэли $\mathrm{Cay}(G, X)$ обозначается через $R(X)$.

Симметрическая группа множества G обозначается через $\mathrm{Sym}(G)$.

Группа правых сдвигов группы G обозначается через G_{right}.

Для заданных множества $\Delta \subseteq \mathrm{Sym}(G)$ и секции $S = U/L$ группы G положим

$$\Delta^S = \{f^S : \ f \in \Delta, \ S^f = S\},$$

где $S^f = S$ означает, что f переставляет смежные классы по L в U, и f^S обозначает подстановку на множестве S, индуцированную f.

Если группа K действует на множестве X, то множество всех орбит группы K на X обозначается через $\mathrm{Orb}(K, X)$.

Циклическая группа порядка n обозначается через C_n.

§2. Предварительные сведения

В данном параграфе мы используем обозначения и терминологию из работы [4], где содержится большая часть материала параграфа.

2.1. Определения. Пусть G – конечная группа и $\mathbb{Z}G$ – целочисленное групповое кольцо. Обозначим единицу группы G через e. Подкольцо $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}G$ называется *S-кольцом* над G, если существует разбиение $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ группы G такое, что:

(1) $\{e\} \in \mathcal{S}$,

(2) если $X \in \mathcal{S}$, то $X^{-1} \in \mathcal{S}$,

(3) $\mathcal{A} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\underline{X} : \ X \in \mathcal{S}\}$.

Элементы множества $\mathcal{S}$ называются *базисными множествами*, а число $|\mathcal{S}|$ – *рангом* S-кольца $\mathcal{A}$. Если $X, Y, Z \in \mathcal{S}$, то число различных

представлений элемента $z \in Z$ в виде $z = xy$, где $x \in X$ и $y \in Y$, обозначается через $c^Z_{X,Y}$. Заметим, что если X и Y – базисные множества, то $\underline{X}\ \underline{Y} = \sum_{Z \in \mathcal{S}(\mathcal{A})} c^Z_{X,Y} \underline{Z}$. Следовательно, числа $c^Z_{X,Y}$ являются структурными константами S-кольца $\mathcal{A}$ относительно базиса $\{\underline{X} : \ X \in \mathcal{S}\}$.

Множество $X \subseteq G$ называется $\mathcal{A}$-*множеством*, если $\underline{X} \in \mathcal{A}$. Подгруппа $H \leqslant G$ называется $\mathcal{A}$-*подгруппой*, если H является $\mathcal{A}$-множеством. Легко проверить, что группы $\langle X \rangle$ и $\mathrm{rad}(X)$ являются $\mathcal{A}$-подгруппами для каждого $\mathcal{A}$-множества X. Пусть $L \trianglelefteq U \leqslant G$. Секция U/L называется $\mathcal{A}$-*секцией*, если U и L являются $\mathcal{A}$-подгруппами. Если $S = U/L$ – $\mathcal{A}$-секция, то модуль

$$\mathcal{A}_S = Span_{\mathbb{Z}} \{\underline{X}^\pi : \ X \in \mathcal{S}(\mathcal{A}),\ X \subseteq U\},$$

где $\pi : U \to U/L$ – естественный эпиморфизм, является S-кольцом над S.

Пусть $K \leqslant \mathrm{Aut}(G)$. Тогда множество $\mathrm{Orb}(K, G)$ образует разбиение группы G, которое задает S-кольцо $\mathcal{A}$ над G. В этом случае $\mathcal{A}$ называется *циклотомическим* и обозначается через $\mathrm{Cyc}(K, G)$.

2.2. Изоморфизмы S-колец. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ – S-кольца над группами G и G' соответственно. Если существует изоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, то будем писать $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$. Группа $\mathrm{Iso}(\mathcal{A})$ всех изоморфизмов из $\mathcal{A}$ на себя содержит нормальную подгруппу

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \{f \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A}) : R(X)^f = R(X) \text{ для каждого } X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})\}.$$

Эта подгруппа называется *группой автоморфизмов* S-кольца $\mathcal{A}$. Заметим, что $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \geqslant G_{\mathrm{right}}$. Если S – $\mathcal{A}$-секция, то, очевидно, $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})^S \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_S)$.

Алгебраический изоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$ – это, по сути, кольцевой изоморфизм между ними. Однако, мы определим алгебраический изоморфизм S-колец следующим, более удобным для нас образом. Назовем биекцию $\varphi : \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{A}')$ *алгебраическим изоморфизмом* из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, если

$$c^Z_{X,Y} = c^{Z^\varphi}_{X^\varphi, Y^\varphi}$$

для всех $X, Y, Z \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Отображение $\underline{X} \to \underline{X}^\varphi$ продолжается по линейности до кольцевого изоморфизма S-колец $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$. Если существует алгебраический изоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, то будем писать $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Alg}} \mathcal{A}'$. Каждый комбинаторный изоморфизм f сохраняет структурные константы и, следовательно, индуцирует алгебраический изоморфизм φ_f.

Пусть $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ – алгебраический изоморфизм. Легко видеть, что φ продолжается до биекции между $\mathcal{A}$- и $\mathcal{A}'$-множествами и, следовательно, между $\mathcal{A}$- и $\mathcal{A}'$-секциями. Образы $\mathcal{A}$-множества X и $\mathcal{A}$-секции S под действием алгебраического изоморфизма φ обозначаются через X^φ и S^φ соответственно. Если S – $\mathcal{A}$-секция, то φ индуцирует алгебраический изоморфизм $\varphi_S : \mathcal{A}_S \to \mathcal{A}'_{S'}$, где $S' = S^\varphi$. Упомянутая выше биекция между $\mathcal{A}$- и $\mathcal{A}'$-множествами, в действительности, является изоморфизмом соответствующих решеток. Поэтому

$$\langle X^\varphi \rangle = \langle X \rangle^\varphi \text{ и } \operatorname{rad}(X^\varphi) = \operatorname{rad}(X)^\varphi$$

для каждого $\mathcal{A}$-множества X. Поскольку $c^{\{e\}}_{X,Y} = \delta_{Y,X^{-1}}|X|$ и $|X| = c^{\{e\}}_{X,X^{-1}}$, где $X, Y \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $\delta_{Y,X^{-1}}$ – символ Кронекера, мы заключаем, что $(X^{-1})^\varphi = (X^\varphi)^{-1}$ и $|X| = |X^\varphi|$ для каждого $\mathcal{A}$-множества X. В частности, $|G| = |G'|$.

Лемма 2.1. [8, лемма 2.1] *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ – S-кольца над группами G и G' соответственно. Пусть $\mathcal{B}$ – S-кольцо, порожденное $\mathcal{A}$ и элементом $\xi \in \mathbb{Z}G$, а $\mathcal{B}'$ – S-кольцо, порожденное $\mathcal{A}'$ и элементом $\xi' \in \mathbb{Z}G'$. Тогда для заданного алгебраического изоморфизма $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ найдется не более одного алгебраического изоморфизма $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, продолжающего φ и такого, что $\xi^\psi = \xi'$.*

Заметим, что для каждой группы G S-кольцо ранга 2 над G и $\mathbb{Z}G$ отделимы относительно класса всех групп. В первом случае каждое базисное множество одноэлементно и, значит, каждый алгебраический изоморфизм естественным образом индуцируется изоморфизмом. Во втором случае существует единственный алгебраический изоморфизм из S-кольца ранга 2 над G в S-кольцо ранга 2 над заданной группой, который индуцируется любым изоморфизмом.

Изоморфизм Кэли из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$ – это изоморфизм групп $f : G \to G'$ такой, что $\mathcal{S}(\mathcal{A})^f = \mathcal{S}(\mathcal{A}')$. Если существует изоморфизм Кэли из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, то будем писать $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}'$. Каждый изоморфизм Кэли является (комбинаторным) изоморфизмом, однако, обратное утверждение неверно.

2.3. Теоремы о мультипликаторах. Множества $X, Y \subseteq G$ называются *рационально сопряженными*, если существует $m \in \mathbb{Z}$, взаимно простое с $|G|$ и такое, что $Y = X^{(m)}$. Следующие два утверждения известны как теоремы Шура о мультипликаторах (см. [15, теорема 23.9]).

Лемма 2.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – S-кольцо над абелевой группой G. Тогда $X^{(m)} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ для каждого $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и каждого $m \in \mathbb{Z}$, взаимно простого с $|G|$. Другими словами, каждый центральный элемент $\mathrm{Aut}(G)$ является изоморфизмом Кэли из $\mathcal{A}$ на себя.*

Лемма 2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ – S-кольцо над абелевой группой G, число p – простой делитель порядка группы G, и $H = \{g \in G : g^p = e\}$. Тогда для каждого $\mathcal{A}$-множества X, множество $X^{[p]} = \{x^p : x \in X,\ |X \cap Hx| \not\equiv 0 \mod p\}$ является $\mathcal{A}$-множеством.*

2.4. Сплетение и тензорное произведение. Пусть $\mathcal{A}$ – S-кольцо над группой G и U/L – $\mathcal{A}$-секция. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ является *U/L-сплетением*, если $L \trianglelefteq G$ и $L \leqslant \mathrm{rad}(X)$ для каждого базисного множества X вне U. В случае, когда явное указание секции U/L не важно, будем говорить, что $\mathcal{A}$ является *обобщенным сплетением*. Назовем U/L-сплетение *нетривиальным* или *собственным*, если $e \neq L$ и $U \neq G$. Если $U = L$, то $\mathcal{A}$ называется *сплетением* S-колец $\mathcal{A}_L$ и $\mathcal{A}_{G/L}$ и обозначается $\mathcal{A} = \mathcal{A}_L \wr \mathcal{A}_{G/L}$.

Лемма 2.4. [4, лемма 4.4] *Пусть $\mathcal{A}$ – U/L-сплетение над абелевой группой G. Предположим, что $\mathcal{A}_U$ и $\mathcal{A}_{G/L}$ отделимы и $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_U)^{U/L} = \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_{U/L})$. Тогда $\mathcal{A}$ отделимо. В частности, сплетение двух отделимых S-колец отделимо.*

Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – S-кольца над группами G_1 и G_2 соответственно, то подкольцо $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ кольца $\mathbb{Z}G_1 \otimes \mathbb{Z}G_2 = \mathbb{Z}G$, где $G = G_1 \times G_2$, является S-кольцом над группой G таким, что

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{X_1 \times X_2 : X_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_1),\ X_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_2)\}.$$

Это S-кольцо называется *тензорным произведением* S-колец $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Лемма 2.5. [9, лемма 2.3] *Пусть $\mathcal{A}$ – S-кольцо над абелевой группой $G = G_1 \times G_2$. Предположим, что G_1 и G_2 являются $\mathcal{A}$-подгруппами. Тогда*

(1) *$X_{G_i} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ для всех $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $i = 1, 2$;*

(2) *$\mathcal{A} \geqslant \mathcal{A}_{G_1} \otimes \mathcal{A}_{G_2}$, и равенство достигается, если $\mathcal{A}_{G_i} = \mathbb{Z}G_i$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$.*

Лемма 2.6. *Тензорное произведение двух отделимых S-колец отделимо.*

Доказательство. Следует из [1, теорема 1.20]. □

2.5. Подпрямое произведение. Пусть $U = \langle u \rangle$ и $V = \langle v \rangle$ – циклические группы и $|U|$ делит $|V|$. Тогда V содержит единственную подгруппу W индекса $|U|$. Пусть $\pi : V \to V/W$ – естественный эпиморфизм и $\psi : U \to V/W$ – изоморфизм. Мы можем построить подпрямое произведение $A(U, V, \psi)$ групп U и V следующим образом:

$$A(U, V, \psi) = \{(x, y) \in U \times V | x^{\psi} = y^{\pi}\}.$$

Из определения $A(U, V, \psi)$ следует, что

$$|A(U, V, \psi)| = |V|. \tag{1}$$

Назовем подпрямое произведение двух групп *нетривиальным*, если оно не совпадает с их прямым произведением.

§3. S-кольца над абелевой группой порядка $4p$

Пусть p – простое число. Положим $E_1 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $E_2 = \langle c \rangle$, и $P = \langle z \rangle$, где $|a| = |b| = 2$, $|c| = 4$, и $|z| = p$. Пусть $E \in \{E_1, E_2\}$ и $G = E \times P$. Эти обозначения сохраняются до конца статьи. На протяжении данной главы $\mathcal{A}$ – S-кольцо над G.

Лемма 3.1. *Если $p = 2$ и $E = E_1$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\mathcal{A} = \mathbb{Z}G$;

(2) $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$;

(3) *$\mathcal{A}$ является тензорным произведением двух S-колец над собственными подгруппами группы G;*

(4) *$\mathcal{A}$ является сплетением двух S-колец над собственными подгруппами группы G.*

Доказательство. Из компьютерного вычисления с использованием пакета COCO2P (см. [11]) следует, что с точностью до изоморфизма Кэли имеется ровно девять S-колец над G. Для каждого из этих девяти S-колец утверждение леммы проверяется непосредственно. □

С этого момента до конца параграфа мы считаем, что $p \geqslant 3$.

Лемма 3.2. *Если E или P не является $\mathcal{A}$-подгруппой, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$;

(2) *$\mathcal{A}$ – собственное U/L-сплетение для некоторой $\mathcal{A}$-секции U/L такой, что $|U/L| \leqslant 2$;*

(3) $E = E_1$ *и* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_H \otimes \mathcal{A}_L$, *где* H – $\mathcal{A}$-*подгруппа порядка* 2, L – $\mathcal{A}$-*подгруппа порядка* $2p$, *и* $G = H \times L$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ – S-кольцо над G и H – максимальная $\mathcal{A}$-подгруппа в E. Предположим, что $H \neq E$. Тогда в силу [9, лемма 6.2] выполняется одно из следующих утверждений: (1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_H \wr \mathcal{A}_{G/H}$, где $\mathrm{rk}(\mathcal{A}_{G/H}) = 2$; (2) $\mathcal{A}$ является U/L-сплетением, где $P \leqslant L < G$ и $U = HL$. В первом случае утверждение 1 леммы выполняется, если H тривиальна, и утверждение 2 леммы выполняется, если H нетривиальна. Во втором случае утверждение 2 леммы выполняется, если $U < G$. Предположим, что $U = G$. Тогда $|H| = 2$ и $G = H \times L$. Из этого следует, что $E = E_1 \cong C_2 \times C_2$. Ясно, что $\mathcal{A}_H = \mathbb{Z}H$. Следовательно, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_H \otimes \mathcal{A}_L$ по утверждению 2 леммы 2.5, и утверждение 3 леммы выполняется.

Случай, когда P не является $\mathcal{A}$-подгруппой, двойственен к случаю, когда E не является $\mathcal{A}$-подгруппой, в смысле теории двойственности S-колец над абелевыми группами, см. [7, глава 2.2]. Таким образом, если P не является $\mathcal{A}$-подгруппой, то утверждение леммы следует из [7, теорема 2.4, утверждение 2 теоремы 2.5]. □

Далее до конца этой главы будем считать, что E и P являются $\mathcal{A}$-подгруппами.

Лемма 3.3. *Если* $X, Y \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ *и* $X_E = Y_E$, *то* X *и* Y *рационально сопряжены.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 2.2, так как группа $1 \times \mathrm{Aut}(P)$ содержится в центре группы $\mathrm{Aut}(G)$ и $\mathrm{Aut}(P)$ действует транзитивно на $P^{\#}$. □

Из [7, теорема 5.1] следует, что $\mathcal{A}_P = \mathrm{Cyc}(K, P)$ для некоторой $K \leqslant \mathrm{Aut}(P)$. Поскольку $|P| = p$, группа $\mathrm{Aut}(P)$ циклическая и, следовательно, K тоже циклическая. Пусть θ – элемент, порождающий группу K. Легко проверяется, что либо $\mathcal{A}_E = \mathbb{Z}E$, либо $\mathcal{A}_E = \mathbb{Z}C_2 \wr \mathbb{Z}C_2$, либо $\mathrm{rk}(\mathcal{A}_E) = 2$. Если $E = E_2$ и $\mathrm{rk}(\mathcal{A}_E) = 2$, то $\mathcal{A}_E$ не является циклотомическим, потому что в этом случае $E^{\#} \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_E)$ и $E^{\#}$ содержит элементы порядков 2 и 4. В остальных случаях прямая проверка показывает, что $\mathcal{A}_E \cong_{\mathrm{Cay}} \mathrm{Cyc}(\langle\sigma\rangle, E)$, где $\sigma \in \mathrm{Aut}(E)$ либо тривиален, либо совпадает с одним из автоморфизмов, представленных в таблице 1.

E	σ	$\lvert\sigma\rvert$	$\mathcal{A}_E$
E_1	$\sigma_1 : (a,b) \to (b,ab)$	3	$\mathrm{rk}(\mathcal{A}_E) = 2$
E_1	$\sigma_2 : (a,b) \to (b,a)$	2	$\mathbb{Z}C_2 \wr \mathbb{Z}C_2$
E_2	$\sigma_3 : c \to c^{-1}$	2	$\mathbb{Z}C_2 \wr \mathbb{Z}C_2$

Таблица 1

Предположим, что $|\sigma|$ делит $|K|$. Обозначим подгруппу индекса $|\sigma|$ группы K через M. Положим

$$\psi : \sigma^i \to M\theta^i,\ i = 0, \ldots, |\sigma| - 1.$$

Ясно, что ψ – изоморфизм из $\langle\sigma\rangle$ в K/M.

Лемма 3.4. *Если $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_E \otimes \mathcal{A}_P$, то $\mathcal{A}_E \cong_{\mathrm{Cay}} \mathrm{Cyc}(\langle\sigma\rangle, E)$, $|\sigma|$ делит $|K|$ и $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathrm{Cyc}(A(\langle\sigma\rangle, K, \psi), G)$, где $\sigma \in \mathrm{Aut}(E)$ – один из автоморфизмов, представленных в таблице* 1.

Доказательство. Если $\mathcal{A}_E = \mathbb{Z}E$, то $\mathcal{A} = \mathcal{A}_E \otimes \mathcal{A}_P$ по утверждению 2 леммы 2.5, и мы получаем противоречие с предположением леммы. Значит,

$$\mathcal{A}_E = \mathbb{Z}C_2 \wr \mathbb{Z}C_2 \text{ или } \mathrm{rk}(\mathcal{A}_E) = 2.$$

Докажем, что $\mathcal{A} = \mathrm{Cyc}(A', G)$ для некоторой $A' \leqslant \mathrm{Aut}(G)$. Если $E = E_1$, то это следует из [9, стр.15–16]. Пусть $E = E_2$. Заметим, что $\mathcal{A}$ не может быть собственным обобщенным сплетением двух S-колец, потому что E и P являются $\mathcal{A}$-подгруппами. Поскольку $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_E \otimes \mathcal{A}_P$, мы заключаем по [3, теорема 4.1,теорема 4.2], что $\mathcal{A} = \mathrm{Cyc}(A', G)$ для некоторой $A' \leqslant \mathrm{Aut}(G)$.

Ясно, что $\mathcal{A}_E$ циклотомическое. Мы можем считать, что $\mathcal{A}_E = \mathrm{Cyc}(\langle\sigma\rangle, E)$, где $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. В силу того, что $\mathcal{A}_E = \mathrm{Cyc}((A')^E, E)$, $\mathcal{A}_P = \mathrm{Cyc}((A')^P, P)$, и $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_E \otimes \mathcal{A}_P$, группа A' является нетривиальным подпрямым произведением групп $\langle\sigma\rangle$ и K. Если $|K|$ не делится на $|\sigma|$, то не существует нетривиальных подпрямых произведений групп $\langle\sigma\rangle$ и K, так как $|\sigma| \in \{2, 3\}$. Значит, $|\sigma|$ делит $|K|$. Если $|\sigma| = 2$, то $A(\langle\sigma\rangle, K, \psi)$ – единственное нетривиальное подпрямое произведение групп $\langle\sigma\rangle$ и K. Поэтому $A' = A(\langle\sigma\rangle, K, \psi)$, и утверждение леммы выполняется.

Предположим, что $|\sigma| = 3$. Тогда $\sigma = \sigma_1$, $E = E_1$, и $\mathrm{rk}(\mathcal{A}_E) = 2$. В этом случае имеется ровно два нетривиальных подпрямых произведения групп $\langle\sigma\rangle$ и K:

$$A(\langle\sigma\rangle, K, \psi) \text{ и } A(\langle\sigma\rangle, K, \xi),$$

где $\xi : \sigma^i \to M\theta^{-i},\ i = 0, 1, 2$. Следовательно,

$$A^{'} \in \{A(\langle\sigma\rangle, K, \psi), A(\langle\sigma\rangle, K, \xi)\}.$$

Прямая проверка показывает, что для каждой инволюции $\tau \in \mathrm{Aut}(E)$, автоморфизм $\tau \times 1 \in \mathrm{Aut}(E) \times \mathrm{Aut}(P)$ является изоморфизмом Кэли из $A(\langle\sigma\rangle, K, \psi)$ в $A(\langle\sigma\rangle, K, \xi)$. Таким образом, $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathrm{Cyc}(A(\langle\sigma\rangle, K, \psi), G)$, и утверждение леммы выполняется. □

Для заданной группы $K \leqslant \mathrm{Aut}(P)$ положим $\mathcal{A}_i(K) = \mathrm{Cyc}(A(\langle\sigma_i\rangle, K, \psi), G)$, где $i \in \{1, 2, 3\}$ и σ_i из таблицы 1. Если $K_1, K_2 \leqslant \mathrm{Aut}(P)$ и $K_1 \neq K_2$, то $\mathrm{Cyc}(K_1, P) \ncong_{\mathrm{Alg}} \mathrm{Cyc}(K_2, P)$ и, значит, $\mathcal{A}_i(K_1) \ncong_{\mathrm{Alg}} \mathcal{A}_j(K_2)$ для всех $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Лемма 3.5. *Пусть $K \leqslant \mathrm{Aut}(P)$. Тогда $\mathcal{A}_i(K) \ncong_{\mathrm{Alg}} \mathcal{A}_j(K)$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Заметим, что для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ группа E – единственная $\mathcal{A}_i(K)$-подгруппа порядка 4,

$$\mathrm{rk}(\mathcal{A}_1(K)_E) = 2 \quad \text{и} \quad \mathrm{rk}(\mathcal{A}_2(K)_E) = \mathrm{rk}(\mathcal{A}_3(K)_E) = 3.$$

Поэтому $\mathcal{A}_1(K) \ncong_{\mathrm{Alg}} \mathcal{A}_2(K)$ и $\mathcal{A}_1(K) \ncong_{\mathrm{Alg}} \mathcal{A}_3(K)$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{'}$ – S-кольца над группами $G = E_1 \times P$ и $G^{'} = E_2 \times P$ соответственно, $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}_2(K)$, и $\mathcal{A}^{'} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}_3(K)$. Предположим, что $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Alg}} \mathcal{A}^{'}$ и $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{'}$ – алгебраический изоморфизм. Тогда E_1^{φ} и P^{φ} – $\mathcal{A}^{'}$-подгруппы порядков 4 и p соответственно. Следовательно, $E_1^{\varphi} = E_2$ и $P^{\varphi} = P$. Пусть $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ такое, что $X \not\subseteq E_1$ и $X_{E_1} = \{a, b\}$. Тогда $X = aX_1 \cup bX_2$, где $X_1, X_2 \subseteq P$. Из утверждения 1 леммы 2.5 следует, что $X_P = X_1 \cup X_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_P)$. В силу леммы 2.2, множество $Y = X_P^{(2)}$ является базисным множеством S-кольца $\mathcal{A}_P$. Ясно, что

$$\underline{X}^2 = \underline{X_1}^2 + \underline{X_2}^2 + 2ab\underline{X_1}\ \underline{X_2}.$$

Поэтому

$$c_{X,X}^{Y} \text{ нечетное.} \tag{2}$$

Заметим, что $\langle X\rangle = G$. Значит, $\langle X^{\varphi}\rangle = G^{'}$ по свойствам алгебраического изоморфизма и, следовательно, $X^{\varphi} = cX_1^{'} \cup c^{-1}X_2^{'}$, где $X_1^{'}, X_2^{'} \subseteq P$.

Легко видеть, что

$$(\underline{X}^{\varphi})^2 = 2\underline{X_1}'\ \underline{X_2}' + c^2((\underline{X_1}')^2 + (\underline{X_2}')^2).$$

Из этого вытекает, что для каждого $Y' \in \mathcal{S}(\mathcal{A}'_P)$, число $c^{Y'}_{X^{\varphi},X^{\varphi}}$ является четным. С другой стороны, $(Y)^{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathcal{A}'_P)$ и (2) влечет, что $c^{Y^{\varphi}}_{X^{\varphi},X^{\varphi}} = c^{Y}_{X,X}$ нечетное, противоречие. Таким образом, $\mathcal{A} \not\cong_{\mathrm{Alg}} \mathcal{A}'$ и лемма доказана. □

Пусть $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}_i(K)$ для некоторых $K \leqslant \mathrm{Aut}(P)$ и $i \in \{1,2,3\}$. Из описания автоморфизмов σ_i, данного в таблице 1, следует, что группа $\langle\sigma_i\rangle$ имеет единственную регулярную орбиту $O \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_E)$. Следуя [9], будем говорить, что $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ *старшее* базисное множество, если X лежит вне $E \cup P$ и $X_E = O$. Старшие базисные множества существуют. Действительно, если $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ такое, что $gx \in X$, где $g \in O$ и $x \in P^{\#}$, то X лежит вне $E \cup P$ и $X_E = O$ по утверждению 1 леммы 2.5. Значит, X старшее.

Лемма 3.6. *Предположим, что $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}_i(K)$ для некоторых $K \leqslant \mathrm{Aut}(P)$ и $i \in \{1,2,3\}$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *базисное множество X S-кольца $\mathcal{A}$ старшее тогда и только тогда, когда $\langle X\rangle = G$;*

(2) *если $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ старшее, то $\mathcal{A} = \langle\underline{X}\rangle$.*

Доказательство. Пусть $O \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_E)$ – регулярная орбита группы $\langle\sigma_i\rangle$. Прямая проверка показывает, что $\langle Y\rangle = E$ для $Y \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_E)$ тогда и только тогда, когда $Y = O$. Значит, $\langle X\rangle = G$ для $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда X старшее, и утверждение 1 леммы доказано.

Пусть теперь X – старшее базисное множество S-кольца $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} = \langle\underline{X}\rangle$. Докажем, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Ясно, что $\mathcal{A} \geqslant \mathcal{B}$. С одной стороны, X является объединением некоторых базисных множеств S-кольца $\mathcal{B}$, потому что $\underline{X} \in \mathcal{B}$. С другой стороны, X содержится в некотором базисном множестве S-кольца $\mathcal{B}$, так как $\mathcal{A} \geqslant \mathcal{B}$. Таким образом, $X \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$.

Из леммы 3.4 следует, что: (1) $|xE \cap X| = 1$; (2) $|xP \cap X| = |K|/3$ при $i = 1$ и $|xP \cap X| = |K|/2$ при $i \in \{2,3\}$. Следовательно, $O = X^{[p]}$ и $X^{[2]}$ – $\mathcal{B}$-множества по лемме 2.3. Из этого вытекает, что $E = \langle O\rangle$ и $P = \langle X^{[2]}\rangle$ – $\mathcal{B}$-подгруппы. Утверждение 1 леммы 2.5 влечет, что $X_E, X_P \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$, а потому

$$\mathcal{B}_E = \mathcal{A}_E \text{ и } \mathcal{B}_P = \mathcal{A}_P. \tag{3}$$

Поскольку $X \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ и $X \neq X_E \times X_P$, мы получаем, что $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}_E \otimes \mathcal{B}_P$. Значит, лемма 3.4 выполняется для $\mathcal{B}$. Множество X также является старшим базисным множеством S-кольца $\mathcal{B}$. Пусть $Y \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$ лежит вне $E \cup P$. Если Y старшее, то $Y = X^{(m)}$ для некоторого m, взаимно простого с $|G|$, по лемме 3.3. Следовательно, $Y \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ по лемме 2.2. Если Y не старшее, то $Y = Y_E \times Y_P$. В силу (3), мы заключаем, что $Y \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Таким образом, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, и утверждение 2 леммы доказано. □

§4. Доказательство теоремы 1

В данном параграфе сохраняются все обозначения, введенные в предыдущем параграфе. Мы начинаем доказательство с леммы, из которой следует, что каждая собственная секция группы G отделима.

Лемма 4.1. *Группы $C_2 \times C_2$, C_p, и C_{2p}, где p – простое число, отделимы.*

Доказательство. Группы $C_2 \times C_2$, C_p, и C_4 отделимы по [4, теорема 1], [8, теорема 1.3], и [4, лемма 5.5] соответственно. Предположим, что $p \neq 2$. Пусть $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 = C_2$ и $H_2 = C_p$, и $\mathcal{C}$ – S-кольцо над H. Если $\mathcal{C}$ циклотомическое, то H_1 и H_2 являются $\mathcal{C}$-подгруппами. Ясно, что $\mathcal{C}_{H_1} = \mathbb{Z}H_1$ и, следовательно, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{H_1} \otimes \mathcal{C}_{H_2}$ по утверждению 2 леммы 2.5. Теперь применяя [3, теорема 4.1, теорема 4.2] к H и $\mathcal{C}$, мы получаем, что выполняется одно из следующих утверждений: (1) $\mathrm{rk}(\mathcal{C}) = 2$; (2) $\mathcal{C} = \mathbb{Z}H$; (3) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{H_i} \wr \mathcal{C}_{H/H_i}$, $i \in \{1, 2\}$; (4) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{H_1} \otimes \mathcal{C}_{H_2}$. В первом и втором случаях $\mathcal{C}$, очевидно, отделимо. В третьем случае $\mathcal{C}$ отделимо по лемме 2.4. В четвертом случае $\mathcal{C}$ отделимо по лемме 2.6. Таким образом, $H = C_{2p}$ отделима, и лемма доказана. □

Пусть $\mathcal{A}$ – S-кольцо над G. Докажем, что $\mathcal{A}$ отделимо. Если $p = 2$, то либо $G \cong C_8$, либо $G \cong C_2 \times C_4$, либо $G \cong C_2^3$. В первом случае $\mathcal{A}$ отделимо по [4, лемма 5.5]. Во втором случае $\mathcal{A}$ отделимо по [4, теорема 1]. В третьем случае $\mathcal{A}$ отделимо по лемме 3.1, лемме 4.1, лемме 2.4, и лемме 2.6.

Пусть теперь $p \geqslant 3$. Из леммы 3.2 и леммы 3.4 следует, что либо для $\mathcal{A}$ выполняется одно из утверждений леммы 3.2, либо $\mathcal{A} = \mathcal{A}_E \otimes \mathcal{A}_P$, либо $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}_i(K)$ для некоторых $K \leqslant \mathrm{Aut}(P)$ и $i \in \{1, 2, 3\}$. Если $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$, то, очевидно, $\mathcal{A}$ отделимо. Предположим, что для $\mathcal{A}$ выполняется утверждение 2 леммы 3.2. В этом случае $\mathcal{A}$ является собственным U/L-сплетением для некоторой $\mathcal{A}$-секции U/L такой, что $|U/L| \leqslant 2$. Проверим, что для $\mathcal{A}$ выполняются все условия леммы 2.4.

Из леммы 4.1 вытекает, что S-кольца $\mathcal{A}_U$ и $\mathcal{A}_{G/L}$ отделимы. С одной стороны, $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_U)^{U/L} \leqslant \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_{U/L})$. С другой стороны, поскольку $|U/L| \leqslant 2$, мы получаем, что

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_U)^{U/L} \geqslant (U_{\mathrm{right}})^{U/L} = (U/L)_{\mathrm{right}} = \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_{U/L}).$$

Таким образом, $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_U)^{U/L} = \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_{U/L})$ и $\mathcal{A}$ отделимо по лемме 2.4. Если для $\mathcal{A}$ выполнено утверждение 3 леммы 3.2 или $\mathcal{A} = \mathcal{A}_E \otimes \mathcal{A}_P$, то $\mathcal{A}$ отделимо по лемме 4.1 и лемме 2.6.

Отстается рассмотреть случай, когда $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}_i(K) = \mathrm{Cyc}(A(\langle\sigma_i\rangle, K, \psi), G)$ для некоторых $K \leqslant \mathrm{Aut}(P)$ и $i \in \{1, 2, 3\}$. В этом случае $\mathcal{A}_P = \mathrm{Cyc}(K, P)$ и $\mathcal{A}_E \neq \mathbb{Z}E$. Каждое базисное множество S-кольца $\mathcal{A}_P$ имеет мощность $|K|$, потому что K действует полурегулярно на $P^{\#}$. Из (1) следует, что $|A(\langle\sigma_i\rangle, K, \psi)| = |K|$, а потому каждое базисное множество S-кольца $\mathcal{A}$ имеет мощность не больше, чем $|K|$.

Пусть $\mathcal{A}'$ – S-кольцо над абелевой группой G' и $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ – алгебраический изоморфизм.

Лемма 4.2. *$\mathcal{A}' \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}$.*

Доказательство. Ясно, что $|G'| = 4p$, $E' = E^{\varphi}$ – $\mathcal{A}'$-подгруппа порядка 4, и $P' = P^{\varphi}$ – $\mathcal{A}'$-подгруппа порядка p. Из свойств алгебраического изоморфизма следует, что каждое базисное множество S-кольца $\mathcal{A}'_{P'}$ имеет мощность $|K|$. Поскольку $\mathcal{A}_E \neq \mathbb{Z}E$, то $\mathcal{A}'_{E'} \neq \mathbb{Z}E'$. Предположим, что $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'_{E'} \otimes \mathcal{A}'_{P'}$. Тогда существует $Z' \in \mathcal{S}(\mathcal{A}')$ такое, что $|Z'| \geqslant 2|K|$, так как $\mathcal{A}'_{E'} \neq \mathbb{Z}E'$. Заметим, что $(Z')^{\varphi^{-1}} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $|(Z')^{\varphi^{-1}}| \geqslant 2|K|$ ввиду свойств алгебраического изоморфизма. Мы приходим к противоречию, потому что каждое базисное множество S-кольца $\mathcal{A}$ имеет мощность не больше, чем $|K|$. Таким образом, $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}_{E'} \otimes \mathcal{A}_{P'}$. Значит, $\mathcal{A}' \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}_j(K)$ для некоторого $j \in \{1, 2, 3\}$ по лемме 3.4. Если $i \neq j$, то $\mathcal{A}' \ncong_{\mathrm{Alg}} \mathcal{A}$ по лемме 3.5, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $i = j$ и $\mathcal{A}' \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}$. □

Лемма 4.3. *Алгебраический изоморфизм φ индуцируется изоморфизмом Кэли.*

Доказательство. В силу леммы 4.2, существует изоморфизм Кэли f из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$. Пусть $X \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ – старшее базисное множество. Тогда $\langle X\rangle = G$ по утверждению 1 леммы 3.6. Значит, $\langle X^{\varphi}\rangle = G'$ и $\langle X^{f}\rangle = G'$ по свойствам алгебраического изоморфизма. Ввиду утверждения 1

леммы 3.6, множества X^φ и X^f являются старшими базисными множествами S-кольца $\mathcal{A}'$. Из леммы 3.3 вытекает, что X^φ и X^f рационально сопряжены. Следовательно, существует изоморфизм Кэли f_1 из $\mathcal{A}'$ на себя такой, что $X^{ff_1} = X^\varphi$. Изоморфизм Кэли ff_1 из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$ индуцирует алгебраический изоморфизм φ_{ff_1}, и $X^{\varphi_{ff_1}} = X^{ff_1} = X^\varphi$. Заметим, что $\mathcal{A} = \langle \underline{X} \rangle$ и $\mathcal{A}' = \langle \underline{X}^\varphi \rangle$ по утверждению 2 леммы 3.6. Таким образом, $\varphi = \varphi_{ff_1}$ по лемме 2.1. □

Мы доказали, что если $\mathcal{A} \cong_{\mathrm{Cay}} \mathcal{A}_i(K)$ для некоторых $K \leqslant \mathrm{Aut}(P)$ и $i \in \{1, 2, 3\}$, то каждый алгебраический изоморфизм S-кольца $\mathcal{A}$ индуцируется изоморфизмом Кэли. Значит, в этом случае $\mathcal{A}$ отделимо, и доказательство теоремы 1 завершено.

Список литературы

1. С. А. Евдокимов, *Шуровость и отделимость ассоциативных схем*, Дис. на соиск. учен. ст. докт. физ.-мат. наук, СПбГУ, СПб. (2004).
2. С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, *Об одном семействе колец Шура над конечной циклической группой.* — Алгебра и анализ, **13**, No. 3 (2001), 139–154.
3. С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, *Шуровость S-колец над циклической группой и обобщенное сплетение групп перестановок.* — Алгебра и анализ, **24**, No. 3 (2012), 84–127.
4. Г. К. Рябов, *Об отделимости колец Шура над абелевыми p-группами.* — Алгебра и логика, **57**, No. 1 (2018), 73–101.
5. Б. Ю. Вейсфейлер, А. А. Леман, *Приведение графа к каноническому виду и возникающая при этом алгебра.* — Научно-техн. информ. Сб. ВИНИТИ, **2**, No. 9 (1968), 12–16.
6. S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *Permutation group approach to association schemes.* — Eur. J. Comb., **30** (2009), 1456–1476.
7. S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *Schur rings over a product of Galois rings.* — Beitr. Algebra Geom., **55**, No. 1 (2014), 105–138.
8. S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *On separability problem for circulant S-rings.* — Алгебра и анализ, **28**, No. 1 (2016), 32–51.
9. S. Evdokimov, I. Kovács, I. Ponomarenko, *On schurity of finite abelian groups.* — Commun. Algebra, **44**, No. 1 (2016), 101–117.
10. S. Kiefer, I. Ponomarenko, P. Schweitzer, *The Weisfeiler-Leman dimension of planar graphs is at most* 3, arXiv:1708.07354 [cs.DM] (2017), 1–34.
11. M. Klin, C. Pech, S. Reichard, COCO2P – a GAP package, 0.14, 07.02.2015, http://www.math.tu-dresden.de/ pech/COCO2P.
12. M. Muzychuk, I. Ponomarenko, *Schur rings.* — Eur. J. Comb., **30** (2009), 1526–1539.
13. R. Nedela, I. Ponomarenko, *Recognizing and testing isomorphism of Cayley graphs over an abelian group of order* $4p$ *in polynomial time*, arXiv:1706.06145 [math.CO] (2017), 1–22.

14. I. Schur, *Zur Theorie der einfach transitiven Permutationgruppen.* — S.-B. Preus. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., **18**, No. 20 (1933), 598–623.
15. H. Wielandt, *Finite permutation groups.* — Academic Press, New York – London (1964).

Ryabov G. K. Separability of Schur rings over an abelian group of order $4p$.

An S-ring (a Schur ring) is said to be *separable* with respect to a class of groups $\mathcal{K}$ if every its algebraic isomorphism to an S-ring over a group from $\mathcal{K}$ is induced by a combinatorial isomorphism. We prove that every Schur ring over an abelian group G of order $4p$, where p is a prime, is separable with respect to the class of abelian groups. This implies that the Weisfeiler–Leman dimension of the class of Cayley graphs over G is at most 2.

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2, г. Новосибирск,
630090, Россия
E-mail: gric2ryabov@gmail.com

Поступило 01 мая 2018