Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 470, 2018 г.

А. Н. Панов

НОВАЯ ТЕОРИЯ СУПЕРХАРАКТЕРОВ ДЛЯ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП В ОРТОГОНАЛЬНОЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППАХ

§1. Введение. Суперхарактеры унипотентных групп

Понятие теории суперхарактеров конечной группы было введено П. Диаконисом и И. М. Айзексом в работе [1]. Априори каждая группа допускает несколько теорий суперхарактеров. Одним из примеров теории суперхарактеров является теория неприводимых характеров. Поскольку для ряда групп (таких, как унитреугольная группа, силовские подгруппы в ортогональной и симплектической группах, параболические подгруппы и др.) классификация неприводимых характеров (представлений) является чрезвычайно сложной, "дикой", задачей, представляется разумным заменить эту задачу задачей построения теории суперхарахарактеров, дающую наилучшее приближение теории неприводимых характеров.

Дадим определение теории суперхарактеров, следуя работе [1]. Пусть G – конечная группа, $1 \in G$ – единичный элемент. Пусть $\mathfrak{Ch} = \{\chi_1, \ldots, \chi_N\}$ – система комплексных характеров (представлений) группы G.

Определение 1. *Система характеров $\mathfrak{Ch}$ задает теорию суперхарактеров на G, если существует разбиение группы G на систему подмножеств $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_N\}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

S1) *характеры из $\mathfrak{Ch}$ попарно дизъюнктны (ортогональны);*

S2) *каждый характер χ_i постоянен на каждом подмножестве K_j;*

S3) $\{1\} \in \mathcal{K}$.

Ключевые слова: теория суперхарактеров, подгруппа Силова, ортогональная группа, симплектическая группа.

Классификация суперклассов (параграф 2) поддержана грантом РФФИ 16-01-00154-а; построение теории суперхарактеров (параграф 3) поддержано грантом RSF-DFG 16-41-1013.

При этом каждый характер из $\mathfrak{Ch}$ *называют суперхарактером, а каждое подмножество из* $\mathcal{K}$ *– суперклассом. Заметим, что число суперхарактеров равно числу суперклассов. Квадратная таблица* $\{\chi_i(K_j)\}$ *называется* таблицей суперхарактеров.

Для каждого суперхарактера χ_i рассмотрим его носитель X_i (подмножество неприводимых компонент χ_i). Заметим, что условие S3) в определении 1 может быть заменено следующим условием:

S3$'$) Система подмножеств $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_N\}$ является разбиением множества неприводимых характеров $\mathrm{Irr}(G)$; здесь каждый суперхарактер χ_i множителем отличается от характера $\sigma_i = \sum\limits_{\psi \in X_i} \psi(1)\psi$ (см. [1, 9, 10]).

Для унитреугольной группы $\mathrm{UT}(m, \mathbb{F}_q)$ подходящая теория суперхарактеров была построена в серии работ К.Андре [2–4]. Эта теория была обобщена на случай алгебра-групп в упомянутой работе П. Диакониса и И. М. Айзекса [1]. По определению алгебра-группа – это группа вида $G = 1 + J$, где J – ассоциативная конечномерная нильпотентная алгебра. Суперклассами в алгебра-группе G являются классы эквивалентности для отношения эквивалентности: $g \sim g'$ для $g = 1 + x$ и $g' = 1 + x'$, если существуют $a, b \in G$ такие, что $x' = axb$. Это отношение естественно переносится на J^*: по определению $\lambda \sim \lambda'$, если существуют $a, b \in G$ такие, что $\lambda' = a\lambda b$ (здесь $a\lambda b(x) = \lambda(bxa)$).

Зафиксируем нетривиальный характер $t \to \varepsilon^t$ аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ со значением в группе обратимых элементов поля $\mathbb{C}$. Суперхарактерами алгебра-группы являются характеры χ_λ, индуцированные характеры с линейных характеров

$$\xi_\lambda(1 + x) = \varepsilon^{\lambda(x)}$$

правых стабилизаторов линейных форм $\lambda \in J^*$. Множества характеров $\{\chi_\lambda\}$ и классов $\{K(g)\}$, где λ и g пробегают множества представителей классов эквивалентности на J^* и G соответственно, задают теорию суперхарактеров на алгебра-группе G. Для суперхарактеров χ_λ имеет место аналог формулы А. А. Кириллова (см. [1, 10]):

$$\chi_\lambda(1 + x) = \frac{|G\lambda|}{|G\lambda G|} \sum_{\mu \in G\lambda G} \varepsilon^{\mu(x)}.$$

Унипотентная группа, вообще говоря, не является алгебра-группой. Поэтому к ней не применим указанный метод построения теории суперхарактеров. В настоящей работе предлагается новый подход, который гипотетически подходит к широкому классу унипотентных групп. Применение этого подхода для силовских подгрупп ортогональной и симплектической групп позволяет построить теорию суперхарактеров (см. теорему 19), которая немного лучше известной ранее теории, разработанной в работах [5–8].

Изложим коротко основное содержание этого подхода. Пусть U – унипотентная группа, которая является полупрямым произведением $U = U_1U_0$ с нормальной подгруппой U_1. Предположим, что U_0 – алгебра-группа, то есть $U_0 = 1 + \mathfrak{u}_0$, где $\mathfrak{u}_0$ – ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра. Алгебра Ли $\mathfrak{u}$ группы U является суммой двух подалгебр $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 \oplus \mathfrak{u}_1$, где $\mathfrak{u}_0$ – ассоциативная алгебра, а $\mathfrak{u}_1 = \mathrm{Lie}(U_1)$ – идеал в $\mathfrak{u}$. Поскольку U_0 – алгебра-группа, то для любого $a \in U_0$ и $x_0 \in \mathfrak{u}_0$ элементы $\ell_a(x_0) = ax_0$ и $r_a(x_0) = x_0a$ также принадлежат $\mathfrak{u}_0$. Левое и правое действия U_0 на $\mathfrak{u}_0$ можно продолжить до действий на $\mathfrak{u}$ следующим образом

$$\begin{aligned} \ell_a(x) &= \ell_a(x_0) + \mathrm{Ad}_a(x_1), \\ r_a(x) &= r_a(x_0) + x_1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a \in U_0$ и $x = x_0 + x_1, \quad x_0 \in \mathfrak{u}_0, \quad x_1 \in U_1$. Заметим, что левое и правое действия подгруппы U_0 коммутируют, и

$$\ell_a r_a^{-1}(x) = \mathrm{Ad}_a(x), \tag{2}$$

где Ad_a – присоединенный оператор для $a \in U_0$.

Определение 2. *Пусть $x, x' \in \mathfrak{u}$. Элемент x эквивалентен x', если x' получается из x по цепочке преобразований следующих видов*

1) *$x \to \ell_a(x)$, где $a \in U_0$;*
2) *$x \to \mathrm{Ad}_u(x)$, где $u \in U$.*

В силу (2) можно в 1) заменить ℓ_a на r_a.

Зафиксируем Ad-инвариантное биективное отображение $f : U \to \mathfrak{u}$, $f(1) = 0$. В качестве f можно взять логарифм ln (что потребует серьезных ограничений на характеристику поля; см. ниже определение 12 для силовских подгрупп в ортогональной и симплектической группах). Введем отношение эквивалентности на U следующим образом.

Определение 3. *Два элемента u_1 и u_2 группы U эквивалентны, если элементы $f(u_1)$ и $f(u_2)$ из $\mathfrak{u}$ эквивалентны в смысле определения 2.*

Рассмотрим классы эквивалентности $\{K(u)\}$; гипотетически они являются суперклассами для некоторой теории суперхарактеров.

Определим левое и правое действия U_0 в сопряженном пространстве $\mathfrak{u}^*$ по формулам

$$\ell_a^* \lambda(x) = \lambda(r_a(x)),$$
$$r_a^* \lambda(x) = \lambda(\ell_a(x)).$$

Отношения эквивалентности в $\mathfrak{u}^*$ определяются аналогично определению 2 для $\mathfrak{u}$.

Определение 4. *Пусть $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{u}^*$. Элемент λ эквивалентен λ', если λ' получается из λ по цепочке преобразований следующих видов*

1) $\lambda \to \ell_a^*(\lambda)$, *где* $a \in U_0$;

2) $\lambda \to \mathrm{Ad}_u^*(\lambda)$, *где* $u \in U$.

Как и выше $\ell_a^*(r_a^*)^{-1}\lambda = \mathrm{Ad}_a^*\lambda$; в определении можно ℓ_a^* заменить на r_a^*. Обозначим через $\mathcal{O}(\lambda)$ класс эквивалентности $\lambda \in \mathfrak{u}^*$. В этой работе получена классификация классов эквивалентности в $\mathfrak{u}$, U и $\mathfrak{u}^*$ для силовских подгрупп в ортогональной и симплектической группах (см. теоремы 10, 11, 13).

Гипотеза 5. Существует система характеров конечной унипотентной группы U вида

$$\chi_\lambda(u) = c(\lambda) \sum_{\mu \in \mathcal{O}(\lambda)} \varepsilon^{\mu(f(u))}, \text{ где } c(\lambda) \in \mathbb{C},\ c(\lambda) \neq 0, \tag{3}$$

такая, что вместе с разбиением группы U на классы $\{K(u)\}$, где λ и u пробегают множества представителей классов эквивалентности в $\mathfrak{u}^*$ и U соответственно, задают теорию суперхарактеров группы U.

Замечание 6 (см. [8])**.** Заметим, что формула (3) задает систему ортогональных функций на U (поскольку характеры $\{\varepsilon^{\lambda(x)}\}$ абелевой группы $\mathfrak{u}$ попарно ортогональны). Легко видеть, что функции (3) постоянны на классах $K(u)$. Из $f(1) = 0$ вытекает, что $K(1) = 1$. Таким образом функции (3) всегда удовлетворяют условиям S1, S2, S3. Главный вопрос состоит в существовании констант $c(\lambda)$ таких, что формула (3) задает характер некоторого представления группы U.

§2. Суперклассы ортогональной и симплектической групп

Унитреугольная группа $G = \mathrm{UT}(m, \mathbb{F}_q)$ состоит из верхнетреугольных матриц m-го порядка с единицами по диагонали и элементами из конечного поля $\mathbb{F}_q$. Предположим, что характеристика поля $p > 2$. Алгебра Ли унитреугольной группы $\mathfrak{g} = \mathfrak{ut}(m, \mathbb{F}_q)$ состоит из верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали.

Рассмотрим матрицы

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть m – размерность стандартного представления для алгебр Ли типов B_n, C_n и D_n. То есть $m = 2n+1$ для B_n и $m = 2n$ для C_n и D_n. На алгебре матриц $\mathrm{Mat}(m, \mathbb{F}_q)$ определен инволютивный антиавтоморфизм $X \to X^\dagger$, где $X^\dagger = I_m X^t I_m$ для B_n и D_n, и $X^\dagger = J_{2n} X^t J_{2n}$ для C_n.

Стандартная силовская подгруппа U в ортогональной или симплектической группе состоит из $g \in G$, удовлетворяющих условию $g^\dagger = g^{-1}$. Соответственно, ее алгебра Ли $\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g} : \ x^\dagger = -x\}$.

Для матрицы X обозначим транспонированную относительно побочной диагонали матрицу через X^τ. Алгебра Ли $\mathfrak{u}$ для C_n и D_n состоит из матриц вида

$$\mathfrak{u} = \left\{ \begin{pmatrix} X_0 & X_1 \\ 0 & -X_0^\tau \end{pmatrix} \right\}, \tag{4}$$

где $X_0 \in \mathfrak{ut}(n, \mathbb{F}_q)$, $\ X_1^\tau = X_1$ для C_n и $X_1^\tau = -X_1$ для D_n. Алгебра Ли $\mathfrak{u}$ является суммой двух подалгебр $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_1$, где

$$\mathfrak{u}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & -X_0^\tau \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathfrak{u}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Подалгебра $\mathfrak{u}_1$ является идеалом в $\mathfrak{u}$, а $\mathfrak{u}_0$ изоморфна $\mathfrak{ut}(n, \mathbb{F}_q)$ и, следовательно, имеет естественную структуру ассоциативной алгебры.

Группа U является полупрямым произведением $U = U_1 U_0$, где

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} \right\} \quad \text{и} \quad U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^\tau)^{-1} \end{pmatrix} \right\}, \tag{5}$$

$B^\tau = B$ для C_n и $B^\tau = -B$ для D_n, и $A \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$. Подгруппа U_0 изоморфна $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ и имеет структуру алгебра-группы.

В случае B_n алгебра Ли $\mathfrak{u}$ состоит из матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 0 & 0 & -X_1^\tau \\ 0 & 0 & -X_0^\tau \end{pmatrix} \right\} \tag{6}$$

где $X_0 \in \mathfrak{ut}(n, \mathbb{F}_q)$, X_1 – столбец $n \times 1$, X_2 – матрица $n \times n$ и $X_2^\tau = -X_2$. Как и выше, алгебра Ли $\mathfrak{u}$ является суммой двух подалгебр $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{u}_1$, где

$$\mathfrak{u}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} X_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X_0^\tau \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{u}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_1 & X_2 \\ 0 & 0 & -X_1^\tau \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Подалгебра $\mathfrak{u}_1$ является идеалом в $\mathfrak{u}$, а $\mathfrak{u}_0$ изоморфна $\mathfrak{ut}(n, \mathbb{F}_q)$ и, следовательно, имеет естественную структуру ассоциативной алгебры.

Группа U разлагается в полупрямое произведение $U = U_1 U_0$, где

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} E & v & -\frac{1}{2}vv^\tau + B \\ 0 & 1 & -v^\tau \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \right\} \quad \text{и} \quad U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (A^\tau)^{-1} \end{pmatrix} \right\}, \tag{7}$$

$B^\tau = -B$ и v – n-столбец. Подгруппа U_0 изоморфна $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ и имеет структуру алгебра-группы.

Определим левое и правое действия подгруппы U_0 на $\mathfrak{u}$, следуя формуле (1). Для C_n и D_n, $a = \mathrm{diag}(A, (A^\tau)^{-1})$ и $x \in \mathfrak{u}$ имеем

$$\ell_a(x) = \ell_a(x_0) + \mathrm{Ad}_a(x_1) = \begin{pmatrix} AX_0 & AX_1A^\tau \\ 0 & -X_0^\tau A^\tau \end{pmatrix}.$$

$$r_a(x) = r_a(x_0) + x_1 = \begin{pmatrix} X_0A & X_1 \\ 0 & -A^\tau X_0^\tau \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\ell_a(x) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 & X_1 \\ 0 & -X_0^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^\tau \end{pmatrix} = a_1 x a_1^\dagger, \text{ где } a_1 = \mathrm{diag}(A, E);$$

$$r_a(x) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 & X_1 \\ 0 & -X_0^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = a_2 x a_2^\dagger, \text{ где } a_2 = \mathrm{diag}(E, A^\tau).$$

Для B_n, $\quad a = \mathrm{diag}(A, 1, (A^\tau)^{-1})$, и $x \in \mathfrak{u}$ имеем

$$\ell_a(x) = \ell_a(x_0) + \mathrm{Ad}_a(x_1) = \begin{pmatrix} AX_0 & AX_1 & AX_2A^\tau \\ 0 & 0 & -X_1^\tau A^\tau \\ 0 & 0 & -X_0^\tau A^\tau \end{pmatrix},$$

$$r_a(x) = r_a(x) = r_a(x_0) + x_1 = \begin{pmatrix} X_0A & X_1 & X_2 \\ 0 & 0 & -X_1^\tau \\ 0 & 0 & -A^\tau X_0^\tau \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\ell_a(x) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 0 & 0 & -X_1^\tau \\ 0 & 0 & -X_0^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A^\tau \end{pmatrix} = a_1 x a_1^\dagger,$$

где $a_1 = \mathrm{diag}(A, 1, E)$;

$$r_a(x) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 0 & 0 & -X_1^\tau \\ 0 & 0 & -X_0^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = a_2 x a_2^\dagger,$$

где $a_2 = \mathrm{diag}(E, 1, A^\tau)$.

Обозначим через G° подгруппу в $G = \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$, порожденную подгруппой U и матрицами $\mathrm{diag}(A_1, A_2)$ в случае C_n и D_n (соответственно, $\mathrm{diag}(A_1, 1, A_2)$ в случае B_n).

Замечание. Элементы $x, x' \in \mathfrak{u}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $g \in G^\circ$ такой, что $x' = gxg^\dagger$.

В упомянутых работах [5–8] рассматривается немного более грубое отношение эквивалентности: $x \sim x'$, если существует $g \in G$ такой, что $x' = gxg^\dagger$.

Обозначим через H° подгруппу в $G = \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$, порожденную подгруппой U_1 и матрицами $\mathrm{diag}(A_1, E)$ в случае C_n и D_n (соответственно, $\mathrm{diag}(A_1, 1, E)$ в случае B_n).

Дадим описание подгрупп G° и H°.

Предложение 7. 1) *В случае* B_n

$$G^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & A_5 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{и} \quad H^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 & A_4' \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \right\}, \qquad (8)$$

где $A_0, A_5 \in \mathrm{UT}(n-1, \mathbb{F}_q)$, A_1, A_2, A_4 *произвольные матрицы размеров* $(n-1) \times 3$, $(n-1) \times (n-1)$, $3 \times (n-1)$ *соответственно,* A_4' *– произвольная* $3 \times n$ *матрица с нулевой последней строкой,* E *– единичная*

$n \times n$-матрица, A_3 *– 3×3 матрица вида*

$$\begin{pmatrix} 1 & c & -\frac{1}{2}c^2 \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{F}_q. \tag{9}$$

2) *В случае* C_n *подгруппа* G° *совпадает с* G *и* $H^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right\}$.

3) *В случае* D_n

$$G^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{и} \quad H^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right\}, \tag{10}$$

где $A_0, A_2 \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ *и* A_1 *– произвольная $n \times n$-матрица вида*

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & * & \cdots & * \\ 0 & -c & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{F}_q. \tag{11}$$

Доказательство. Проведем доказательство для подгруппы H° (для G° аналогично).

Случай C_n. Подгруппа H° порождается матрицами вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, где $A \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$, и $\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}$, где $B^\tau = B$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & AB \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

также принадлежит H°. Легко показать, что линейное подпространство натянутое на матрицы вида AB, где $A \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ и $B^\tau = B$, совпадает с $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}_q)$. Что доказывает утверждение 2).

Случай D_n. Рассматривается аналогично. Легко показать, что линейное подпространство, натянутое на матрицы вида AB, где $A \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ и $B^\tau = -B$, совпадает с подпространством матриц вида (11). Что доказывает утверждение 3).

Случай B_n. Для любых двух n-столбцов v_1 и v_2 рассмотрим матрицу

$$M(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} E & v_1 & -\frac{1}{2}v_1 v_2^\tau \\ 0 & 1 & -v_2^\tau \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Группа H° порождается матрицами $\mathrm{diag}(A, 1, E)$, где $A \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$, матрицами $M(v, v)$, где v – n-столбец, и

$$F(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $B^\tau = -B$. Аналогично случаю D_n показывается, что матрицы вида $F(B)$, где B – матрица (11), принадлежат H°.

Из равенства

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \cdot M(v, v) \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = M(Av, v)$$

заключаем, что подгруппа H° содержит все матрицы вида $M(v_1, v_2)$ для любых столбцов

$$v_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{pmatrix} \text{ таких, что } \beta_n = \beta'_n \neq 0.$$

Для любых n-столбцов v_1, v_2, d_1, d_2 имеет место равенство

$$M(v_1, v_2)M(d_1, d_2) = M(v_1 + d_1, v_2 + d_2)F(B_0), \tag{13}$$

где $B_0 = \frac{1}{2}(-v_1 d_2^\tau + d_1 v_2^\tau)$.

Из равенства (13) вытекает, что H° содержит все матрицы вида $F(B)$, где $B = (b_{ij})$ – произвольная $n \times n$-матрица с $b_{n1} = 0$. Наконец, используя (13), можно показать, что H° содержит содержит все матрицы вида $M(v_1, v_2)$, где $\beta_n = \beta'_n$. Отсюда вытекает утверждение 1). $\square$

Дадим описание классов эквивалентности в $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{u}^*$ (см. определения 2 и 4). Упорядочим множество целых чисел отрезка $[-n, n]$ следующим образом

$$1 \prec \ldots \prec n \prec 0 \prec -n \prec \ldots \prec -1.$$

Обозначим через Δ^+ множество, состоящее из следующих пар целых чисел из $[-n, n]$:
для B_n

$$\Delta^+ = \{(i, j) : 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \prec j \prec -i\},$$

для C_n

$$\Delta^+ = \{(i, j) : 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \prec j \preccurlyeq -i,\ j \neq 0\},$$

для D_n
$$\Delta^+ = \{(i,j) : 1 \leqslant i \leqslant n,\, i \prec j \prec -i,\, j \neq 0\}.$$
Элементы множества Δ^+ будем называть *положительными корнями*, а Δ^+ – *множеством положительных корней.*

Для любого корня $\alpha = (i,j) \in \Delta^+$ будем называть i *номером строки* (обозначение $i = \mathrm{row}(\alpha)$) и j *номером столбца* (обозначение $j = \mathrm{col}(\alpha)$).

Определение 8. *Подмножество $\mathcal{D} \subset \Delta^+$ будем называть базисным, если выполнены следующие условия:*

1) *в каждой строке и каждом столбце есть не более одного корня из $\mathcal{D}$.*

2) *Если корень $(i,-j)$, где $i,j > 0$, принадлежит $\mathcal{D}$, то в j-ой строке нет корней из $\mathcal{D}$.*

Другое название – подмножество типа расстановки ладей.

Определение 9. *Подмножество $\mathcal{D} \subset \Delta^+$ будем называть квазибазисным, если выполнены следующие условия:*

1) *в каждом столбце есть не более одного корня из $\mathcal{D}$;*

2) *в каждой строке есть не более одного корня из $\mathcal{D}$, за исключением случая B_n, D_n и пар корней вида (i,n) и $(i,-n)$.*

3) *Если корень $(i,-j)$, где $i,j > 0$, принадлежит $\mathcal{D}$, то в j-ой строке нет корней из $\mathcal{D}$.*

Всякое базисное подмножество является квазибазисным. В случае C_n определения базисного и квазибазисного подмножеств совпадают. Для любого положительного корня $\alpha = (i,j)$ обозначим $\alpha' = (-j,-i)$ (согласно определению, α' не является положительным корнем). Для любой матрицы $x = (x_\alpha) \in \mathfrak{u}$ элементы x_α и $x_{\alpha'}$ отличаются знаком $x_\alpha = \epsilon(\alpha)x_{\alpha'}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет стандартный базис $\{E_{ij} : 1 \leqslant i < j \leqslant m\}$. Алгебра Ли $\mathfrak{u}$ также имеет стандартный базис $\{\mathcal{E}_\alpha = E_\alpha + \epsilon(\alpha)E_{\alpha'}\}$. По паре $(\mathcal{D},\phi)$, где $\mathcal{D}$ – квазибазисное подмножество в Δ^+ и ϕ – отображение $D \to \mathbb{F}_q^*$, построим элемент
$$x_{\mathcal{D},\phi} = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} \phi(\alpha)\mathcal{E}_\alpha.$$

Теорема 10. 1) *Любой элемент $x \in \mathfrak{u}$ эквивалентен некоторому элементу $x_{\mathcal{D},\phi}$.* 2) *Пара $(\mathcal{D},\phi)$ определяется по x однозначно.*

Доказательство. 1) Создавая последовательно преобразованиями вида $x \to gxg^{\dagger}, \quad g \in G^{\circ}$, нули в матрице x, можно привести ее к виду $x_{\mathcal{D},\phi}$.

2) Покажем, что $(\mathcal{D},\phi)$ однозначно определяется по x. Пусть элементы $x_{\mathcal{D},\phi}$ и $x_{\mathcal{D}',\phi'}$ эквивалентны.

Каждому положительному корню (i,j) сопоставим подматрицу $\mathrm{Mat}_{ij}(x)$ матрицы x с системой строк и столбцов $\{k : \ i \preccurlyeq k \preccurlyeq j\}$. Легко видеть, что если $x \sim x'$, то подматрицы $\mathrm{Mat}_{ij}(x)$ и $\mathrm{Mat}_{ij}(x')$ имеют одинаковые ранги.

Предположим, что $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ – базисные подмножества. Из совпадения рангов вытекает, что $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. Каждому корню $\alpha = (i,j) \in \mathcal{D}$ сопоставим подмножество $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}$, состоящее из $(k,m) \in \mathcal{D}$, где $k \succcurlyeq i$ и $m \preccurlyeq j$. Для $\alpha \in \mathcal{D}$ рассмотрим минор M_α матрицы x с системой строк $\mathrm{row}(\mathcal{D}_\alpha)$ и столбцов $\mathrm{col}(\mathcal{D}_\alpha)$. Нетрудно видеть, что из эквивалентности $x_{\mathcal{D},\phi}$ и $x_{\mathcal{D},\phi'}$ вытекает, то $M_\alpha(x_{\mathcal{D},\phi}) = M_\alpha(x_{\mathcal{D},\phi'})$. Отсюда $\phi = \phi'$.

Предположим, что квазибазисное подмножество $\mathcal{D}$ не является базисным. В этом случае $\mathfrak{u}$ типа B_n или D_n, и $\mathcal{D}$ содержит пару корней $\beta_1 = (i,n)$ и $\beta_2 = (i,-n)$. Для случая D_n рассуждения аналогичны случаю базисного подмножества.

Рассмотрим случай B_n. Из совпадения рангов подматриц вида Mat_{ij} вытекает, что $\mathcal{D} \setminus \{\beta_2\} = \mathcal{D}' \setminus \{\beta_2\}$. Если корень $\alpha \in \mathcal{D} \setminus \{\beta_2\}$, то рассмотрим подсистему корней $\mathcal{D}_\alpha \in \mathcal{D}$, состоящую из $(k,m) \in \mathcal{D}\setminus\{\beta_2\}$, где $k \succcurlyeq i$ и $m \preccurlyeq j$. По подмножеству $\mathcal{D}_\alpha$ определим, как и выше, минор M_α. Из $M_\alpha(x_{\mathcal{D},\phi}) = M_\alpha(x_{\mathcal{D},\phi'})$ вытекает $\phi(\alpha) = \phi'(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathcal{D} \setminus \{\beta_2\}$.

Осталось показать, что $\beta_2 \in \mathcal{D}'$ и $\phi(\beta_2) = \phi'(\beta_2)$. Сопоставим корню β_1 систему корней $\widetilde{\mathcal{D}}_{\beta_1}$, которая совпадает с $\mathcal{D}_{\beta_1}$, если не существует корня $(k,0), \quad i < k \leqslant n$, в $\mathcal{D}$; если такой корень существует, то $\widetilde{\mathcal{D}}_{\beta_1} = \mathcal{D}_{\beta_1} \cup (k,0)$. Как и выше строится минор $\widetilde{M}_{\beta_1}$.

Корню $\beta_0 = (i,0)$ сопоставим подсистему $\widetilde{\mathcal{D}}_{\beta_0}$, которая совпадает с

$$(\mathcal{D}_{\beta_1} \setminus \{\beta_1\}) \cup \{\beta_0\},$$

если не существует корня $(k,0), \quad i < k \leqslant n$, в $\mathcal{D}$; если такой корень существует, то $\widetilde{\mathcal{D}}_{\beta_0} = \mathcal{D}_{\beta_1} \cup \{(k,-n)\}$. Как и выше строится минор $\widetilde{M}_{\beta_0}$.

Положим $\widetilde{\mathcal{D}}_{\beta_2} = \mathcal{D}_{\beta_2} \setminus \{\beta_1\}$ и рассмотрим соответствующий минор $\widetilde{M}_{\beta_2}$. Можно показать, что многочлен

$$I = \widetilde{M}_{\beta_1}\widetilde{M}_{\beta_2} + \frac{1}{2}\widetilde{M}^2_{\beta_0}$$

постоянен на классе эквивалентности элемента $x = x_{\mathcal{D},\phi}$. Так как $x \sim x'$, где $x' = x_{\mathcal{D}',\phi'}$, то $I(x) = I(x')$. Заметим, что $\widetilde{M}_{\beta_0}(x) = \widetilde{M}_{\beta_0}(x') = 0$, и $\widetilde{M}_{\beta_1}(x) = \widetilde{M}_{\beta_1}(x') \neq 0$. Поэтому $\widetilde{M}_{\beta_2}(x) = \widetilde{M}_{\beta_2}(x') \neq 0$.

Отсюда $\beta_2 \in \mathcal{D}'$ и значения ϕ и ϕ' на корне β_2 совпадают. $\square$

Сопряженное пространство $\mathfrak{g}^*$ имеет двойственный базис $\{E_{ij}^* : 1 \leqslant i < j \leqslant m\}$. Сопряженное пространство $\mathfrak{u}^*$ имеет базис $\{E_\alpha^* + \epsilon(\alpha)E_{\alpha'}^*\}$. Паре $(\mathcal{D}, \phi)$ сопоставим элемент

$$\lambda_{\mathcal{D},\phi} = \sum_{\alpha\in\mathcal{D}} \phi(\alpha) \left(E_\alpha^* + \epsilon(\alpha)E_{\alpha'}^*\right).$$

Теорема 11. 1) *Любой элемент $\lambda \in \mathfrak{u}$ эквивалентен некоторому элементу $\lambda_{\mathcal{D},\phi}$.*

2) *Пара $(\mathcal{D}, \phi)$ определяется по λ однозначно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10. $\square$

Перейдем к отношению эквивалентности на группе U. В качестве отображения f из определения 3 будем рассматривать отображение Спрингера.

Определение 12. *Отображение $f : G \to \mathfrak{g}$ называют отображением Спрингера, если f биекция и удовлетворяет условиям*:

1) $f(U) = \mathfrak{u}$,

2) *существуют $a_2, a_3, \ldots$ из поля $\mathbb{F}_q$ такие, что $f(1 + x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.*

Примерами отображения Спрингера являются:

1) логарифмическое отображение $\ln(1+x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{x^i}{i}$ (при строгих ограничениях на характеристику поля);

2) отображение Кэли $f(1 + x) = \frac{2x}{x+2}$ (для $\operatorname{char}\mathbb{F}_q \neq 2$).

Обозначим $u_{\mathcal{D},\phi} = f^{-1}(x_{\mathcal{D},\phi})$. Из теоремы 10 вытекает классификация классов эквивалентности на U.

Теорема 13. 1) *Любой элемент $u \in U$ эквивалентен некоторому элементу $u_{\mathcal{D},\phi}$.*

2) *Пара $(\mathcal{D}, \phi)$ определяется по u однозначно.*

§3. Суперхарактеры ортогональной и симплектической групп

В случае C_n и D_n группа G° является алгебра-группой и построение теории суперхарактеров для группы U не отличается от подхода в статье [8].

В случае B_n группа G° не является алгебра-группой. Рассмотрим подгруппу S, состоящую из матриц $\mathrm{diag}(E, M, E)$, где M – матрица вида (9). Группа G° является полупрямым произведением $G^\circ = SG^\diamond$, где $G^\diamond$ – подгруппа в G°, состоящая из матриц вида (8) с $A_3 = E$. Подгруппа $G^\diamond$ является алгебра-группой $G^\diamond = 1 + \mathfrak{g}^\diamond$, где $\mathfrak{g}^\diamond$ – алгебра Ли группы $G^\diamond$.

Группа U также является полупрямым произведением $U = SU^\diamond$, где $U^\diamond = U \cap G^\diamond$. Алгебра Ли $\mathfrak{u}$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{u} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u}^\diamond$, где $\mathfrak{s}$ – одномерная подалгебра Ли, натянутая на вектор $\mathcal{E}_{n,0}$.

Положим $H^\diamond = G^\diamond \cap H^\circ$. Подгруппа $H^\diamond$ является алгебра-группой и $H^\circ = SH^\diamond$. Легко видеть, что в каждом из случаев B_n, C_n, D_n имеет место $G^\circ = UH^\diamond$ (см. [8, лемма 6.6]).

Для любой линейной формы $\eta \in (\mathfrak{g}^\diamond)^*$ рассмотрим следующие ассоциативные подалгебры в $\mathfrak{g}^\diamond$:

1) $r_\eta^\diamond = \{x \in \mathfrak{g}^\diamond : \ \eta(xy) = 0 \ \text{ для любого } y \in \mathfrak{h}^\diamond\}$;
2) $\ell_\eta^\diamond = \{x \in \mathfrak{g}^\diamond : \ \eta(y^\dagger x) = 0 \ \text{ для любого } y \in \mathfrak{h}^\diamond\}$;
3) $\mathfrak{g}_\eta^\diamond = r_\eta^\diamond \cap \ell_\eta^\diamond$.

Так как $(r_\eta^\diamond)\dagger = \ell_\eta^\diamond$, то $(\mathfrak{g}_\eta^\diamond)^\dagger = \mathfrak{g}_\eta^\diamond$. Подгруппа G° содержит алгебра-подгруппы $R_\eta^\diamond = 1 + r_\eta^\diamond$, $\quad L_\eta^\diamond = 1 + \ell_\eta^\diamond$ и $G_\eta^\diamond = 1 + \mathfrak{g}_\eta^\diamond$.

Лемма 14 ([8, лемма 6.3]). *$\eta(xy) = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}_\eta^\diamond$.*

Доказательство. Представим x в виде $x = x' + x''$, где $x'_{ij} = 0$ для $1 \preccurlyeq j \preccurlyeq 0$, и $x''_{ij} = 0$ для $0 \prec j \preccurlyeq -1$. Представим y в виде $y = y' + y''$, где $y'_{ij} = 0$ для $0 \prec i \preccurlyeq -1$, и $y''_{ij} = 0$ для $1 \preccurlyeq i \preccurlyeq 0$. Тогда $x' \in (\mathfrak{h}^\diamond)^\dagger$, $y' \in \mathfrak{h}^\diamond$, $x'y' = 0$, $\quad x''y'' = 0$. Из $xy = x'y + xy'$ вытекает, что $\eta(xy) = 0$. $\square$

Пусть $\lambda \in (\mathfrak{u}^\diamond)^*$ и $\eta \in \mathfrak{g}^\diamond$ такие, что $\eta^\dagger = -\eta$ и ограничение η на $\mathfrak{u}^\diamond$ совпадает с λ. Определим

$$\mathfrak{u}_\lambda^\diamond = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_\eta^\diamond \quad \text{и} \quad U_\lambda^\diamond = U \cap G_\eta^\diamond.$$

Для $x \in \mathfrak{u}^\diamond$ имеем

$$\eta(y^\dagger x) = -\eta^\dagger(y^\dagger x) = -\eta((y^\dagger x)^\dagger) = -\eta(x^\dagger y) = \eta(xy). \qquad (14)$$

Откуда вытекает, что $\mathfrak{u} \cap r_\eta^\diamond = \mathfrak{u} \cap \ell_\eta^\diamond = \mathfrak{u}_\lambda^\diamond$.

Из леммы 14 вытекает, что ограничение λ на алгебру Ли $\mathfrak{u}_\lambda^\diamond$ является ее характером со значением в поле $\mathbb{F}_q$.

Пусть $\pi^\diamond$ – естественная проекция $(\mathfrak{u}^\diamond)^* \to (\mathfrak{u}_\lambda^\diamond)^*$. Следующее утверждение вытекает из работы [8]. Для удобства читателя мы приведем его с полным доказательством.

Лемма 15. *Для любого* $\lambda \in (\mathfrak{u}^\diamond)^*$ *слой* $(\pi^\diamond)^{-1}\pi^\diamond(\lambda)$ *равен* $H^\diamond \centerdot \lambda$.

Доказательство. *Пункт* 1. Пусть $\eta \in (\mathfrak{g}^\diamond)^*$ и P – естественная проекция $(\mathfrak{g}^\diamond)^* \to (r_\eta^\diamond)^*$. Покажем, что $P^{-1}P(\eta) = H^\diamond\eta$ (здесь $h\eta(x) = \eta(xh)$ – левое действие $h \in H^\diamond$ на η). Действительно, $P^{-1}P(\eta) = \eta + (r_\eta^\diamond)^\perp$. Из определения $r_\eta^\diamond$ вытекает, что

$$r_\eta^\diamond = \{x \in \mathfrak{g}^\diamond : \quad y\eta(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathfrak{h}^\diamond\} = (\mathfrak{h}^\diamond\eta)^\perp.$$

Отсюда $(r_\eta^\diamond)^\perp = \mathfrak{h}^\diamond\eta$ и $P^{-1}P(\eta) = \eta + \mathfrak{h}^\diamond\eta = (1 + \mathfrak{h}^\diamond)\eta = H^\diamond\eta$.

Пункт 2. Пусть Π – естественная проекция $(\mathfrak{g}^\diamond)^* \to (\mathfrak{u}^\diamond)^*$. Пусть $\eta^\dagger = -\eta$ и $\lambda = \Pi(\eta)$. Покажем, что $\Pi(H^\diamond\eta) = H^\diamond \centerdot \lambda$.

Действительно, для $h = 1 + y \in H^\diamond$ и $x \in \mathfrak{u}^\diamond$ получаем $h \centerdot \lambda(x) = (h\lambda h^\dagger)(x) = \lambda(h^\dagger x h) = \lambda((1+y)^\dagger x(1+y)) = \lambda(x) + \lambda(y^\dagger x + xy) + \lambda(y^\dagger xy)$.

Заметим, что $y^\dagger xy = 0$ для любых $x \in \mathfrak{g}$ и $y \in \mathfrak{h}^\diamond$. Применяя равенство (14), получаем $h \centerdot \lambda(x) = \eta(x) + 2\eta(xy) = (1 + 2y)\eta(x)$. Отсюда $H^\diamond \centerdot \lambda = \Pi(H^\diamond\eta)$, что доказывает утверждение пункта 2.

Пункт 3. Так как $\mathfrak{u}_\lambda^\diamond = \mathfrak{u}^\diamond \cap r_\lambda^\diamond$, то

$$(\pi^\diamond)^{-1}\pi^\diamond(\lambda) = \Pi(P^{-1}P(\eta)) = \Pi(H^\diamond\eta) = H^\diamond \centerdot \lambda. \qquad \square$$

Пусть $\lambda = \lambda_{\mathcal{D},\phi}$ и $\eta = \eta_{\mathcal{D},\phi}$ – элемент $(\mathfrak{g})^*$ такой, что $\Pi(\eta) = \lambda$ и $\eta^\dagger = -\eta$.

Лемма 16. *Пусть* λ *и* η *как и выше определены по* $\mathcal{D}, \phi$. *Тогда* $\mathfrak{s}\mathfrak{g}_\lambda^\diamond \subset \mathfrak{g}_\lambda^\diamond$ *и* $\mathfrak{g}_\lambda^\diamond\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}_\lambda^\diamond$.

Доказательство. Пусть $\eta \in (\mathfrak{g}^\diamond)^*$ и $\Pi(\eta) = \lambda$. Для любого $\alpha = (i,j) \in \Delta^+$, где $1 \leqslant i < n$ и $i \prec j$, определим подалгебру $r_\alpha^\diamond$, состоящую из матриц $x \in \mathfrak{g}^\diamond$, удовлетворяющих условиям:

1) если $1 \leqslant j < n$, то $x_{ik} = 0$ для всех $i < k < j$;

2) если $j \in \{n, 0, -n\}$, то $x_{ik} = 0$ для всех $i < k < n$;

3) если $-n < j \leqslant -1$, то $x_{ik} = 0$ для всех $i \prec k \prec -n$ и $x_{-j,k} = 0$ для всех $-j \prec k \prec -n$.

Легко видеть, что подалгебра $r_\alpha^\diamond$ инвариантна относительно левого и правого умножения на $\mathfrak{s}$. Подалгебра $r_\eta^\diamond$ совпадает с пересечением подалгебр $r_\alpha^\diamond$ по всем $\alpha \in \mathcal{D}$. Тогда подалгебра $r_\eta^\diamond$ также инвариантна относительно левого и правого умножения на $\mathfrak{s}$. $\square$

Определим подалгебру $\mathfrak{u}_\lambda$ в каждом из перечисленных случаев отдельно.

1) $\mathcal{D}$ не имеет корней вида $(i,0)$ и (i,n). В этом случае положим $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{g}_\lambda^\diamond$ и $G_\lambda = SG_\lambda^\diamond$. Обозначим $\mathfrak{u}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u}_\lambda^\diamond$. Положим $U_\lambda = G_\lambda \cap U = SU_\lambda^\diamond$.

2) $\mathcal{D}$ содержит $(i,0)$ или (i,n). В этом случае положим $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda^\diamond$, $\mathfrak{u}_\lambda = \mathfrak{u}_\lambda^\diamond$ и $G_\lambda = U_\lambda^\diamond$.

Ассоциативная подалгебра $\mathfrak{h}^\diamond$ является идеалом в ассоциативной алгебре $\mathfrak{g}$. Поэтому $\mathfrak{h}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{h}^\diamond$ – ассоциативная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда подгруппа $H_\lambda = G_\lambda H = 1 + \mathfrak{h}_\lambda$ является алгебра-подгруппой в G.

Пусть π – естественная проекция $\mathfrak{u}^* \to \mathfrak{u}_\lambda^*$.

Лемма 17. 1) *Для любого* $\lambda = \lambda_{\mathcal{D},\phi}$ *слой* $\pi^{-1}\pi(\lambda)$ *совпадает с* $H_\lambda \centerdot \lambda$.

2) *Формула*

$$\xi_\lambda(u) = \varepsilon^{\lambda(f(u))} \tag{15}$$

задает характер подгруппы U_λ.

Доказательство. *Пункт* 1. $\mathcal{D}$ не имеет корней вида $(i,0)$ и (i,n). Тогда $\eta(\mathfrak{s}x) = \eta(x\mathfrak{s}) = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Из леммы 14 вытекает, что $\xi_\lambda(g) = \varepsilon^{\lambda(f(g))}$ – характер подгруппы G_λ; что доказывает утверждение 2).

Прямыми вычислениями показывается, что $h\eta h^\dagger(x) = \eta(x)$ для любого $x \in \mathfrak{u}_\lambda$ и $h \in H_\lambda$. Из леммы 15 вытекает утверждение 1).

Пункт 2. $\mathcal{D}$ содержит один из корней вида $(i,0)$ или (i,n). Обозначим этот корень из $\mathcal{D}$ через γ. Если $\gamma = (i,0)$, то положим $z = E_{-n,-i}$; если $\gamma = (i,-n)$, то положим $z = E_{0,-i}$. В каждом из случаев $z \in \mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{h}_\lambda$ и $\eta(\mathcal{E}_{n0}z) = \pm\phi(\gamma) \neq 0$. Элемент $h_t = 1 + tz$ содержится в H_λ для любого $t \in \mathbb{F}_q$. Непосредственно показывается, что $h_t\eta h_t^\dagger(x) = \eta(x)$ для любого $x \in \mathfrak{u}^\diamond$ и $h_t\eta h_t^\dagger(\mathcal{E}_{n0}) = \eta(\mathcal{E}_{n0}) \pm 2\phi(\gamma)$. Поэтому $\Pi^{-1}\Pi(\eta)$ содержится в $H_\lambda \centerdot \lambda$. Из леммы 15 вытекает утверждение 1). Утверждение 2) вытекает из леммы 14. $\square$

По линейной форме $\lambda = \lambda_{D,\phi}$ определим линейный характер подгруппы U_λ по формуле

$$\xi_\lambda(u) = \varepsilon^{\lambda(f(u))}.$$

Рассмотрим индуцированный характер

$$\chi_\lambda = \mathrm{Ind}(\xi_\lambda, U_\lambda, U).$$

Теорема 18. *Если* $\lambda = \lambda_{D,\phi}$, *то*

$$\chi_\lambda(u) = \frac{|H_\lambda \centerdot \lambda|}{|G^\circ \centerdot \lambda|} \sum_{\mu \in G^\circ \centerdot \lambda} \varepsilon^{\mu(f(u))}.$$

Доказательство. Пусть $\dot{\xi}_\lambda$ функция на группе U, равная ξ_λ на U_λ и нулю вне U_λ. По определению

$$\chi_\lambda(u) = \frac{1}{|U_\lambda|} \sum_{v \in U} \dot{\xi}_\lambda(vuv^{-1}).$$

Применяя лемму 17, для любого $x \in \mathfrak{u}$ получаем

$$\sum_{\mu \in \pi^{-1}\pi(\lambda)} \varepsilon^{\mu(x)} = \varepsilon^{\lambda(x)} \cdot \sum_{\nu \in \mathfrak{u}_\lambda^\perp} \varepsilon^{\nu(x)} = \begin{cases} \frac{|U|}{|U_\lambda|} \cdot \varepsilon^{\lambda(x)}, & \text{если} \quad x \in \mathfrak{u}_\lambda; \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \mathfrak{u}_\lambda. \end{cases}$$

Отсюда

$$\dot{\xi}_\lambda(u) = \frac{|U_\lambda|}{|U|} \sum_{\mu \in \pi^{-1}\pi(\lambda)} \varepsilon^{\mu(f(u))} = \frac{|U_\lambda|}{|U|} \sum_{\mu \in H_\lambda \centerdot \lambda} \varepsilon^{\mu(f(u))}.$$

Тогда

$$\chi_\lambda(u) = \frac{1}{|U|} \cdot \sum_{\mu \in H_\lambda \centerdot \lambda,\ v \in U} \varepsilon^{\mu(vf(u)v^{-1})} = \frac{|H_\lambda \centerdot \lambda|}{|U| \cdot |H_\lambda|} \sum_{h \in H_\lambda,\ v \in U} \varepsilon^{h \centerdot \lambda(vf(u)v^{-1})}$$
$$= \frac{|H_\lambda \centerdot \lambda|}{|U| \cdot |H_\lambda|} \sum_{h \in H_\lambda,\ v \in U} \varepsilon^{\lambda(hvf(u)v^\dagger h^\dagger)}.$$

Так как $G^\circ = UH_\lambda$, то

$$\chi_\lambda(u) = \frac{|H_\lambda \centerdot \lambda| \cdot |U \cap H_\lambda|}{|U| \cdot |H_\lambda|} \sum_{g \in G^\circ} \varepsilon^{\lambda(gf(u)g^\dagger)} = \frac{|H_\lambda \centerdot \lambda|}{|G^\circ|} \sum_{g \in G^\circ} \varepsilon^{\lambda(gf(u)g^\dagger)}$$
$$= \frac{|H_\lambda \centerdot \lambda|}{|G^\circ \centerdot \lambda|} \sum_{\mu \in G^\circ \centerdot \lambda} \varepsilon^{\mu(f(u))}. \qquad \square$$

Теорема 19. *Пусть U – силовская подгруппа ортогональной или симплектической группы. Система характеров χ_λ, и разбиение группы U на классы $\{K(u)\}$, где λ и u пробегают множества представителей классов эквивалентности $\lambda_{\mathcal{D},\phi} \in \mathfrak{u}^*$ и $u_{\mathcal{D},\phi} \in U$, задают теорию суперхарактеров группы U.*

Доказательство. Доказательство вытекает из замечания 6, теорем 13 и 18. □

Список литературы

1. P. Diaconis, I. M. Isaacs, *Supercharacters and superclasses for algebra groups.*— Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 2359–2392.
2. C. A. M. André, *Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group.* — J. Algebra **176** (1995), 959–1000.
3. C. A. M. André, *Basic character table of the unitriangular group.* — J. Algebra **241** (2001), 437–471.
4. C. A. M. André, *Hecke algebra for the basic representations of the unitriangular group.* — Proc. Amer. Math. Soc. **132**, no. 4 (2003), 987–996.
5. C. A. M. André, A. M. Neto, *Supercharacters of the finite the Sylow subgroup of the finite symplectic and orthogonal groups.* — Pacific Math. Journal **239** (2009), 201–230.
6. C. A. M. André, A. M. Neto, *A supercharacter theory for the Sylow p-subgroups of the finite symplectic and orthogonal groups.* — J. Algebra **322** (2009), 1273–1294.
7. C. A. M. André, J. P. Freitas, A. M. Neto, *A supercharacter theory for involutive algebra groups.* — J. Algebra **430** (2015), 159–190.
8. S. Andrews, *Supercharacters of unipotent groups defined by involutions.* — J. Algebra **425** (2015), 1–30.
9. А. Н. Панов, *Теория суперхарактеров для групп обратимых элементов приведенных алгебр.* — Алгебра и анализ **27** (2015), 242–259.
10. А. Н. Панов, *Суперхарактеры унипотентных и разрешимых групп.* — Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. прил. Тем. Обзоры **136** (2017), 31–55.

Panov A. N. New supercharacter theory for Sylow subgroups in orthogonal and symplectic groups.

Using new approach the supercharacter theory is constructed for the Sylow subgroups in orthogonal and symplectic groups.

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С. П. Королева
E-mail: apanov@list.ru

Поступило 17 января 2018 г.