

Р. А. Лубков, И. И. Некрасов

ЯВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ВНЕШНИЙ КВАДРАТ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

ВВЕДЕНИЕ

Отправной точкой для данной работы является задача описания надгрупп элементарных подгрупп групп Шевалле. Классически, одним из важных шагов в доказательстве так называемого *стандартного описания* таких надгрупп является использование явных уравнений, задающих соответствующую группу Шевалле. В [2] данная задача частично решена для группы типа A_n в представлении со старшим весом ϖ_m ($m \leq n+1$). Однако, техника явных уравнений заменена методами теории представлений, которые обобщают ранее разработанные подходы.

Работы [3,7,8] являются примерами работ по тематике надгрупп, где были получены уравнения на группы Шевалле, используя стабилизацию квадратичной формы. Также в [10] данная техника была развита для стабилизации формы третьей степени.

В данной работе авторы, следуя парадигме только что упомянутых работ, проводят построение нескольких явных систем уравнений, задающих аффинную групповую схему $\Lambda^2 \mathrm{GL}_n$, соответствующую группе типа A_{n-1} в представлении ϖ_2 .

Отметим, что методы теории представлений, применённые к общей внешней степени, используют структурные результаты для плетизма $\mathrm{Sym}^k(\Lambda^m \mathbb{C}^n)$ при произвольных натуральных k, m, n . Тогда как описанный в этой работе способ использует только тот факт, что группа $\Lambda^2 \mathrm{GL}_n$ сохраняет идеал $\mathrm{Plü}$, порожденный соотношениями Плюккера. Последнее геометрически может быть интерпретировано, как стабилизация грассманиана $\mathrm{Gr}_{2,n}$ (как алгебраического многообразия) под

Ключевые слова: полная линейная группа, весовые диаграммы, внешний квадрат.

Теоремы 5–7 выполнены первым автором при поддержке Российского Научного Фонда, грант №17-11-01261.

Теоремы 2–4 выполнены вторым автором при поддержке Российского Научного Фонда, грант №16-11-10200. Также автор благодарен поддержке программы социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”.

действием алгебраической группы $\Lambda^2 \text{GL}_n$. Тем самым метод описанный далее,

- во-первых, более элементарен и прозрачен,
- во-вторых, в более явной форме раскрывает внутреннюю структуру групповой схемы $\Lambda^2 \text{GL}_n$.

Для случая произвольной внешней степени идеал Плюккерových соотношений намного более сложно устроен, поэтому не представляется возможным обобщить результаты данной работы в направлении произвольной степени. Структура идеала Плюккера в случае внешнего квадрата, а также его высшие сизигии, подробно описаны в работе [1].

Работа устроена следующим образом: в параграфе 1 введены основные обозначения, а также собраны все необходимые результаты касательно групповой схемы $\Lambda^2 \text{GL}_n$. В следующем параграфе 2 получен основной результат работы: явно описаны уравнения на схему $\Lambda^2 \text{GL}_n$. Заключительный параграф 3 направлен на разъяснение структуры уравнений в терминах весовых диаграмм и их внутренней геометрии.

§1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Используемые нами обозначения в основном полностью стандартны в общем контексте групп Шевалле и совпадают с обозначениями работ [6–9]. Но для того, чтобы настоящую работу можно было читать независимо, мы напомним все необходимые понятия, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Пусть вначале G – произвольная абстрактная группа. Элементы группы будем обозначать малыми латинскими буквами. Под $[x, y]$ мы всегда будем понимать *левоцентрированный* коммутатор элементов x и y , то есть $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, где $x, y \in G$. Кратные коммутаторы также будут левоцентрированы: $[x, y, z] = [[x, y], z]$. Выражение xyx^{-1} кратко будем записывать ${}^x y$ и называть *левым сопряженным* к y при помощи x . Аналогично, выражение $x^{-1}yx$ будем называть *правым сопряженным* к y при помощи x и обозначать, как y^x .

Пусть $X \subseteq G$ – подмножество группы G , тогда под $\langle X \rangle$ будем понимать подгруппу G , порожденную X . Выражение $H \leq G$ понимается, как H – подгруппа G . Если H – нормальная подгруппа в G , то будем писать $H \triangleleft G$. В случае, если $H \leq G$, запись $\langle X \rangle^H$ означает наименьшую подгруппу G , которая содержит X и нормализуется H . Под $[F, H]$

для двух подгрупп $F, H \leq G$, мы понимаем их взаимный коммутант: $[F, H] = \langle [f, h], \text{ где } f \in F, h \in H \rangle$.

Также нам пригодятся некоторые элементарные обозначения из теории колец. Предположим, что R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Под идеалом I кольца R мы всегда будем понимать *двусторонний* идеал и обозначать это, как $I \trianglelefteq R$. Как обычно, запись R^* означает мультипликативную группу кольца R , состоящую из всех *двусторонне обратимых* элементов $x \in R$, для которых существует элемент $y \in R$, такой, что $xy = 1 = yx$. Мультипликативная группа матриц размера $n \times n$ над кольцом R называется полной линейной группой и обозначается $\text{GL}_n(R) = \text{M}(n, R)^*$. Для любой матрицы $a \in \text{GL}_n(R)$ элемент, стоящий на месте (i, j) , обозначается $a_{i,j}$, где $1 \leq i, j \leq n$.

Через $[n]$ мы будем обозначать множество $\{1, 2, \dots, n\}$, а через $\Lambda^m[n]$ внешнюю степень множества $[n]$, элементы которого суть неупорядоченные¹ множества мощности m :

$$\Lambda^m[n] = \{(i_1, i_2, \dots, i_m) \mid i_j \in [n], i_j \neq i_l\}.$$

Если $I = \{i_1 < \dots < i_v\} \in \Lambda^v[n]$, $J = \{j_1 < \dots < j_u\} \in \Lambda^u[n]$, тогда через $\text{sgn}(I, J)$ будем обозначать знак перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_v, j_1, \dots, j_u)$.

Также для матрицы $a \in \text{GL}_n(R)$ и подмножеств I, J в $\Lambda^m[n]$, через $M_I^J(a)$ мы будем обозначать минор матрицы a , отвечающий строкам с номерами из множества I и столбцам с номерами из множества J .

1.1. Внешняя степень полной линейной группы. В данном параграфе мы опишем внешний квадрат полной линейной группы, детали приведены в [2, 11].

На протяжении всей работы мы фиксируем ранг n базовой полной линейной группы GL_n , и считаем кольцо R коммутативным.

Рассмотрим стандартное действие группы $\text{GL}_n(R)$ на правом R -модуле R^n с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$. Далее определим внешний квадрат R -модуля $R^n - \Lambda^2(R^n)$ – как модуль, базис которого составляют внешние произведения $e_i \wedge e_j$ для $1 \leq i < j \leq n$; дополнительно полагаем $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ для произвольных $i \neq j$. Ранг данного модуля равен биномиальному коэффициенту $\binom{n}{2}$, который в дальнейшем мы обозначим через N .

¹В дальнейшем, для удобства, мы будем их упорядочивать по возрастанию.

Зададим действие группы $\mathrm{GL}_n(R)$ на модуле $\Lambda^2(R^n)$. Для этого сначала определим действие на базисных элементах по правилу

$$g(e_i \wedge e_j) := (ge_i) \wedge (ge_j) \text{ для произвольной } g \in \mathrm{GL}_n(R) \\ \text{и любых } 1 \leq i \neq j \leq n,$$

а затем продолжим по линейности на все элементы модуля $\Lambda^2(R^n)$. Тем самым, мы определили подгруппу в $\mathrm{GL}_N(R)$, обозначаемую в дальнейшем $\Lambda^2(\mathrm{GL}_n(R))$.

Альтернативно, рассмотрим гомоморфизм Бине–Коши

$$\Lambda^2 : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(R),$$

сопоставляющий матрице $x \in \mathrm{GL}_n(R)$ матрицу $\Lambda^2(x) \in \mathrm{GL}_N(R)$, элементами которой являются все миноры второго порядка матрицы x . Тогда группа $\Lambda^2(\mathrm{GL}_n(R))$ есть образ полной линейной группы под действием гомоморфизма Бине–Коши. Из последнего описания внешнего квадрата видно, что естественно индексировать элементы матрицы $\Lambda^2(x)$ парами элементов множества $\Lambda^2[n]$:

$$(\Lambda^2(x))_{I,J} = (\Lambda^2(x))_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)} = M_{i_1, i_2}^{j_1, j_2}(x) = x_{i_1, j_1} \cdot x_{i_2, j_2} - x_{i_1, j_2} \cdot x_{i_2, j_1}.$$

Последние рассуждения могут быть проведены для произвольной внешней m -ой степени (мы считаем, что $m \leq n$). Таким образом корректно определена абстрактная группа $\Lambda^m(\mathrm{GL}_n(R))$ для произвольного коммутативного кольца R . В общем случае, данная группа не является группой точек никакой алгебраической группы. Поэтому через $\Lambda^m \mathrm{GL}_n$ мы обозначаем соответствующую алгебраическую группу, являющуюся замыканием по Зарискому всех $\Lambda^m(\mathrm{GL}_n(R))$. Заметим, что определённая таким образом группа $\Lambda^m \mathrm{GL}_n$ есть подгруппа алгебраической группы $\mathrm{GL}_{\binom{n}{m}}$, равная группе GL_n в представлении со старшим весом ϖ_m .

Заметим, что для получения уравнений на схему $\Lambda^m \mathrm{GL}_n$ достаточно получить уравнения на группу $\Lambda^m \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Это связано с тем фактом, что полученные далее уравнения будут определены над \mathbb{Z} , а потому будут задавать соответствующую группу как схему над $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Для произвольного коммутативного кольца R , группы R -точек групповой схемы $\Lambda^m \mathrm{GL}_n(R)$, вообще говоря, строго больше, чем соответствующие групповые образы, и строго меньше, чем группы точек соответствующих объёмлющих групповых схем

$$\Lambda^m(\mathrm{GL}_n(R)) < \Lambda^m \mathrm{GL}_n(R) < \mathrm{GL}_{\binom{n}{m}}(R).$$

Более точные результаты относительно разницы между последними группами установлены в [11] и приведены в краткой форме в следующей теореме.

Теорема 1. *В предыдущих обозначениях:*

- (1) *Для произвольного $n \geq 4$ мы имеем изоморфизм аффинных групповых схем*

$$\Lambda^2 \mathrm{GL}_n \cong \mathrm{GL}_n / \mu_2.$$

- (2) *Факторгруппа $\Lambda^2 \mathrm{GL}_n(R) / \Lambda^2(\mathrm{GL}(n, R))$ содержит подгруппу, изоморфную R^* / R^{*2} . Факторизация по последней изоморфной подгруппе группы Пикара $\mathrm{Pic}(R)$, состоящей из проективных R -модулей P таких, что*

$$P^{\otimes 2} = R, \quad P^n = R^n.$$

- (3) *Для любого элемента x группы $\Lambda^2 \mathrm{GL}_n(R)$ существует такое конечное расширение R' / R , что для некоторого $y \in \mathrm{GL}_n(R')$ мы имеем*

$$x = \Lambda^2(y).$$

1.2. Элементарная группа и ее внешняя степень. Среди подгрупп полной линейной группы особое место занимает элементарная подгруппа $E(n, R)$. Как и всегда, элементы данной подгруппы характерны тем, что вычисления, громоздкие для общего элемента группы GL_n , для них намного более прозрачны и одновременно нетривиальны как, например, для элементов тора.

Напомним, что e обозначает единичную матрицу, а $e_{i,j}$ – стандартную матричную единицу, то есть матрицу, у которой все элементы равны нулю, за исключением одного на месте (i, j) , который равен 1.

Элементарной трансвекцией $t_{i,j}(\xi)$ называется матрица вида $t_{i,j}(\xi) = e + \xi e_{i,j}$, где $1 \leq i \neq j \leq n$, $\xi \in R$. Элементарные трансвекции обладают следующими хорошо известными свойствами [6]:

(1) аддитивность по аргументу

$$t_{i,j}(\xi)t_{i,j}(\zeta) = t_{i,j}(\xi + \zeta).$$

(2) коммутационная формула Шевалле

$$[t_{i,j}(\xi), t_{h,k}(\zeta)] = \begin{cases} e, & \text{если } j \neq h, i \neq k, \\ t_{i,k}(\xi\zeta), & \text{если } j = h, i \neq k, \\ t_{h,j}(-\zeta\xi), & \text{если } j \neq h, i = k. \end{cases}$$

Подгруппа $E(n, R) \leq GL_n(R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями, называется (*абсолютной*) *элементарной подгруппой полной линейной группы*:

$$E(n, R) = \langle t_{i,j}(\xi), 1 \leq i \neq j \leq n, \xi \in R \rangle.$$

Общеизвестно, что последняя нормальна в полной группе $GL_n(R)$ при $n \geq 3$ (теорема Суслина [12]). Поэтому как элементарное следствие верен следующий результат.

Лемма 1. *Образ элементарной группы нормален в образе полной линейной группы под действием гомоморфизма внешнего квадрата:*

$$\Lambda^2(E(n, R)) \leq \Lambda^2(GL_n(R)).$$

Рассмотрим подробнее структуру группы $\Lambda^2 E(n, R)$. Следующее утверждение является непосредственным следствием данного выше определения $\Lambda^2(GL_n(R))$, использующего миноры матрицы из $GL_n(R)$.

Утверждение 1. *Пусть $t_{i,j}(\xi)$ – элементарная трансвекция. Тогда при $n \geq 3$ верно равенство*

$$\Lambda^2 t_{i,j}(\xi) = \prod_{k=1}^{i-1} t_{ki,kj}(\xi) \cdot \prod_{l=i+1}^{j-1} t_{il,lj}(-\xi) \cdot \prod_{m=j+1}^n t_{im,jm}(\xi) \quad (1)$$

для любых $1 \leq i < j \leq n$.

Замечание. Для $i > j$ верно аналогичное равенство:

$$\Lambda^2 t_{i,j}(\xi) = \prod_{k=1}^{j-1} t_{ki,kj}(\xi) \cdot \prod_{l=j+1}^{i-1} t_{il,jl}(-\xi) \cdot \prod_{m=i+1}^n t_{im,jm}(\xi). \quad (1')$$

Замечание. Любые две трансвекции из правых частей формул (1) и (1') коммутируют друг с другом, а потому и с $\Lambda^2 t_{i,j}(\xi)$.

Непосредственно из утверждения следует, что $\wedge^2 t_{i,j}(\xi) \in E^{n-2}(N, R)$, где $E^M(N, R)$ – подмножество в $E(N, R)$, состоящее из произведения не более, чем M элементарных трансвекций.

Аналогичным образом можно определить произвольную внешнюю степень элементарной группы и вычислить внешнюю степень элементарной трансвекции (подробности см. в [2]).

§2. УРАВНЕНИЯ

Рассуждения данного параграфа направлены на получение явных уравнений, задающих аффинную групповую схему $\wedge^2 \mathrm{GL}_n$. Как было упомянуто ранее, достаточно получить уравнения на группу точек $\wedge^2 \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Представленный далее способ получения уравнений над полем комплексных чисел опирается на тот факт, что внешний квадрат полной линейной группы сохраняет идеал Плюккера. Кратко напомним связь между внешним квадратом группы $\mathrm{GL}_n(R)$ и идеалом Plü, порожденным соотношениями Плюккера.

Рассмотрим алгебру многочленов $\mathbb{C}[p_I]$, где $I \in \wedge^2[n]$ и ее стандартную градуировку по общей степени мономов.

В проективное пространство $\mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^N)$ вкладывается пространство Грассмана $\mathrm{Gr}_{2,n}(\mathbb{C})$ как множество разложимых тензоров. Точнее, точка грассманиана, отвечающая аффинной оболочке векторов $\{v_1, v_2\}$, отображается в проективный класс разложимого поливектора $v_1 \wedge v_2$. При данном вложении $\mathrm{Gr}_{2,n}(\mathbb{C})$ является подмногообразием $\mathbb{P}(\mathbb{C}^N)$ и задаётся классическими уравнениями Плюккера. Так как группа $\mathrm{GL}_n(R)$ переводит разложимый поливектор в разложимый, то группа $\wedge^2(\mathrm{GL}_n(R))$ сохраняет идеал $\mathrm{Plü} = \mathrm{Plü}(n, R) \triangleleft R[p_I : I \in \wedge^2[n]]$, порожденный многочленами Плюккера.

Данные рассуждения верны и для произвольной внешней степени. Однако, случай внешнего квадрата характерен тем, что соответствующий идеал устроен относительно элементарно. Строению последнего посвящен следующий параграф.

2.1. Структура идеала Плюккера. Заметим, что в случае внешнего квадрата многочлены Плюккера имеют следующий простой вид.

Многочлены Плюккера занумерованы парами

$$(i, J) \in (\wedge^1[n] = [n], \wedge^3[n])$$

и равны

$$f_{i,J}(x) := \sum_{h=1}^3 (-1)^h \cdot x_{i j_h} x_{J \setminus \{j_h\}},$$

где x_{ij} – плюккеровы координаты на проективном пространстве $\mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^n))$.

Следующая теорема полностью разъясняет строение идеала

$$\text{Plü} := \langle f_{i,J} \rangle.$$

Теорема 2. (1) Для любого набора $1 \leq i < j < k < l \leq n$ подмодуль R -модуля Plü

$$\text{Plü}(i, j, k, l) = \langle f_{s,T} : s \sqcup T = \{i, j, k, l\} \rangle_R$$

одномерен. Мы фиксируем каноническую образующую $f_{i,\{j,k,l\}}$.

(2) Набор однородных многочленов $\{f_{s,T}\}_{(s,T)}$ является базисом идеала Plü над кольцом R тогда и только тогда, когда для любого набора $1 \leq i < j < k < l \leq n$ из $\text{Plü}(i, j, k, l)$ выбран ровно один элемент $\alpha_{ijkl} \cdot f_{i,\{j,k,l\}}$ такой, что $\alpha_{ijkl} \in R^*$. В частности, каноническим базисом идеала Plü является

$$\{f_{i,\{j,k,l\}} : 1 \leq i < j < k < l \leq n\}.$$

(3) $b = \sum_{I,J} b_{I,J} x_I x_J \in \text{Plü}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

- (a) $b_{I,J} = 0$, если I и J пересекаются;
- (b) $\text{sgn}(I, J) \cdot b_{I,J} = \text{sgn}(K, L) \cdot b_{K,L}$, если $I \sqcup J = K \sqcup L$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что при любых $1 \leq i < j < k < l \leq n$ верно:

$$\begin{aligned} f_{i,jkl}(x) &= -x_{ij}x_{kl} + x_{ik}x_{jl} - x_{il}x_{jk}; \\ f_{j,ikl}(x) &= +x_{ij}x_{kl} + x_{jk}x_{il} - x_{jl}x_{ik} = -f_{i,jkl}(x); \\ f_{k,ijl}(x) &= +x_{ik}x_{jl} - x_{jk}x_{il} - x_{kl}x_{ij} = +f_{i,jkl}(x); \\ f_{l,ijk}(x) &= +x_{il}x_{jk} - x_{jl}x_{ik} + x_{kl}x_{ij} = -f_{i,jkl}(x). \end{aligned}$$

Откуда непосредственно следует первое, а значит, и второе утверждение теоремы.

Для доказательства третьего утверждения представим многочлен $b \in \text{Plü}$ в следующем виде:

$$b = \sum_{I,J} b_{I,J} x_I x_J = \sum_{\substack{\{i,j,k,l\} \\ i < j < k < l}} \sum_{I \cup J = \{i,j,k,l\}} b_{I,J} x_I x_J.$$

Тогда с учётом второго пункта получим, что

$$b = \sum_{i < j < k < l} \sum_{I \cup J = \{i, j, k, l\}} b_{I, J} x_I x_J = \sum_{i < j < k < l} \theta_{\{i, j, k, l\}} \cdot f_{i, jkl}.$$

То есть $b_{I, J} = \text{sgn}(I, J) \cdot \theta_{I \cup J}$, что завершает доказательство третьего пункта. \square

2.2. Уравнения на групповую схему. Теперь перейдем непосредственно к получению уравнений, задающих аффинную групповую схему $\Lambda^2 \text{GL}_n$. Рассмотрим действие $g \in \text{GL}_N(R)$ на произвольный многочлен Плюккера $f_{i, J}(x)$:

$$g \circ f_{i, J}(x) = f_{i, J}(g(x)) = \sum_{h=1}^3 \sum_{a < b} \sum_{c < d} (-1)^h g_{ab, ij_h} g_{cd, J \setminus j_h} x_{ab} x_{cd}.$$

Тогда условие $g \circ f_{i, J} \in \text{Plü}$ равносильно тому, что

$$\sum_{h=1}^3 \sum_{\substack{a < b \\ c < d}} (-1)^h g_{ab, ij_h} g_{cd, J \setminus j_h} x_{ab} x_{cd} = \sum_{h=1}^3 \sum_{i' < j'_1 < j'_2 < j'_3} (-1)^h \theta_{i' \cup J'} x_{i', j'_h} x_{J' \setminus j'_h}.$$

Изменив порядки суммирования в левой и правой частях последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} \sum_{A, C} x_A x_C \left(\sum_{h=1}^3 (-1)^h g_{A, ij_h} g_{C, J \setminus j_h} \right) \\ = \sum_{i' < j'_1 < j'_2 < j'_3} \sum_{h=1}^3 x_{i', j'_h} x_{J' \setminus j'_h} (-1)^h \theta_{i' \cup J'}. \end{aligned}$$

Обозначим через $a_{A, C}^J = a_{A, C}^J(g)$ коэффициент при $x_A x_C = x_C x_A$ в последнем выражении. Тогда

$$\begin{aligned} a_{A, C}^{\{i\} \cup J} &= \sum_{h=1}^3 (-1)^h (g_{A, ij_h} g_{C, J \setminus j_h} + g_{C, ij_h} g_{A, J \setminus j_h}) \\ &= \sum_{B \sqcup D = H} \text{sgn}(B, D) g_{A, B} g_{C, D}, \end{aligned}$$

где $H = \{i\} \cup J$ и последнее суммирование ведется по всем неупорядоченным разбиениям множества J на дизъюнктные пары.

Вообще, для произвольной матрицы $g \in \text{GL}_N(R)$ числа

$$\left\{ a_{A,C}^H = \sum_{B \sqcup D = H} \text{sgn}(B, D) g_{A,B} g_{C,D} \right\}_{A,C,H}$$

будем называть **внешними числами матрицы g** .

Теорема 3. *Следующие условия равносильны:*

- (1) $g \in \Lambda^2 \text{GL}_n(R)$.
- (2) Для любого $H \in \Lambda^4[n]$ и для любых $A, C \in \Lambda^2[n]$,
 - если $A \cap C \neq \emptyset$, то $a_{A,C}^H(g) = 0$;
 - если $A \cap C = \emptyset$, то $a_{A,C}^H(g) = \text{sgn}(A, C) \cdot \theta_{A \cup C}^H(g)$, где θ_*^H есть функция аргументов $*$ и \bullet .

Доказательство. Рассуждения перед теоремой влекут импликацию (1) \Rightarrow (2). Для доказательства обратного утверждения необходимо показать, что $\Lambda^2 \text{GL}_n$ совпадает со стабилизатором идеала Plü. Этот факт следует из классификации [5, Table 1] (примеры такого рассуждения представлены в [2, Proposition 7] и [10, доказательство теоремы 2]). \square

Заметим, что набор элементов $\{\theta_k^H\}_{H,k \in \Lambda^4[n]}$ произволен в силу теоремы 2(2).

В качестве примера вычисления внешних чисел с помощью последней леммы передокажем следующий факт.

Теорема 4. $\Lambda^2 \text{GL}_n(R) \geq \Lambda^2(\text{GL}_n(R))$.

Доказательство. Покажем, что любая матрица из $\Lambda^2(\text{GL}_n(R))$ удовлетворяет второму условию из последней леммы.

Пусть $x \in \text{GL}_n(R)$, тогда обозначим $g := \Lambda^2(x)$. Также пусть $A = \{a < b\}$, $B = \{c < d\}$, тогда

$$a_{A,C}^H(g) = \text{sgn}(A, C) \cdot M_{A \cup C}^H(g), \quad (*)$$

где M_Q^P есть минор четвертого порядка со строчками Q и столбцами P .

Пусть $A \cap C \neq \emptyset$, будем считать, что $a = c$. Тогда слагаемые $h_{a,\sigma(i)} h_{b,\sigma(j_1)} h_{a,\sigma(j_2)} h_{d,\sigma(j_3)}$ и $h_{a,\tilde{\sigma}(i)} h_{b,\tilde{\sigma}(j_1)} h_{a,\tilde{\sigma}(j_2)} h_{d,\tilde{\sigma}(j_3)}$, где σ и $\tilde{\sigma}$ отличаются на подходящую перестановку ($\sigma(i) = \tilde{\sigma}(j_2), \sigma(j_1) = \tilde{\sigma}(j_3)$), равны и имеют разные знаки. Значит, искомая сумма равна нулю.

Если $A \cap C = \emptyset$, то для любого фиксированного набора $\{a, b, c, d\}$ верно, что

$$\sum_{\sigma \in S_4} \text{sgn}(\sigma) \cdot h_{a,\sigma(i)} h_{b,\sigma(j_1)} h_{c,\sigma(j_2)} h_{d,\sigma(j_3)} = \pm \theta_{A \cup C}^H.$$

Знак зависит от перестановки (a, b, c, d) , и, как не сложно видеть, совпадает с требуемым в формулировке утверждения. \square

Замечание. Формула (*) вместе с теоремой 1(3) показывает, что внешние числа для $x = \Lambda^2(y) \in \Lambda^2 \text{GL}_2(R)$, где $y \in \text{GL}_n(R')$, суть миноры четвертого порядка для матрицы y . Поэтому доказательство последнего утверждения верно и в общем случае: элементы $\Lambda^2(\text{GL}_n(R))$, действительно, удовлетворяют представленным уравнениям. Это верно в силу “локальности” утверждения – оно использует только один элемент, для которого может быть найдено подходящее расширение R'/R .

Так как в общем случае такое расширение не может быть выбрано для всех элементов одновременно, миноры могут быть неопределены глобально. Однако, внешние числа задают глобальное сечение над всей схемой $\Lambda^2 \text{GL}_n$, сужением которого являются миноры.

В задаче описания надгрупп также требуется находить уравнения на некоторые конгруэнц-подгруппы. Для полноты изложения приведем их далее.

Гомоморфизм редукции относительно идеала $A \triangleleft R$ (для группы $\text{GL}_N(R)$) обозначим через $\rho_A : \text{GL}_N(R) \rightarrow \text{GL}_N(R/A)$.

Теорема 5. Пусть A – идеал в кольце R . В обозначениях теоремы 3 матрица $g = (g_{A,C}) \in \text{GL}_N(R)$ принадлежит группе $\rho_A^{-1}(\Lambda^2 \text{GL}_n(R/A))$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- Если $A \cap C \neq \emptyset$, тогда $a_{A,C}^H \equiv 0 \pmod{A}$;
- Если $A \cap C = \emptyset$, тогда $a_{A,C}^H \equiv \text{sgn}(A, C) \cdot \theta_{A \cup C}^H \pmod{A}$.

Отметим несколько свойств внешних чисел.

Утверждение 2. Пусть $g, h \in \Lambda^2 \text{GL}_n(R)$, тогда

$$a_{A,C}^H(g \cdot h) = \text{sgn}(A, C) \cdot \sum_I \theta_I^H(h) \theta_{A \cup C}^I(g).$$

Доказательство. Утверждение следует из следующего вычисления:

$$\begin{aligned} a_{A,C}^H(g \cdot h) &= \sum_{B \sqcup D = H} \text{sgn}(B, D) \sum_{K, L} g_{A,K} h_{K,B} g_{C,L} h_{L,D} \\ &= \sum_{K, L} g_{A,K} g_{C,L} \sum_{B \sqcup D = H} \text{sgn}(B, D) h_{K,B} h_{L,D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K,L} g_{A,K} g_{C,L} \operatorname{sgn}(K, L) \theta_{K \cup L}^H(h) \\
&= \sum_I \theta_I^H(h) \sum_{\substack{K,L \\ K \cup L = I}} \operatorname{sgn}(K, L) g_{A,K} g_{C,L} \\
&= \sum_I \theta_I^H(h) \operatorname{sgn}(A, C) \theta_{A \cup C}^I(g). \quad \square
\end{aligned}$$

Следствие 1. Пусть $x_i \in \wedge^2 \operatorname{GL}_n(R)$, тогда

$$a_{A,C}^H \left(\prod_{h=1}^k x_h \right) = \operatorname{sgn}(A, C) \cdot \sum_{I_1, \dots, I_{k-1}} \theta_{I_1}^H(x_k) \theta_{I_2}^{I_1}(x_{k-1}) \dots \theta_{I_{k-1}}^{I_{k-2}}(x_2) \theta_{A \cup C}^{I_{k-1}}(x_1).$$

Приведем пример явного вычисления внешних чисел для элемента внешнего квадрата элементарной группы.

Утверждение 3.

$$a_{A,C}^H (\wedge^2(t_{i,j}(\xi))) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(A, C), & \text{если } H = A \cup C, \\ \operatorname{sgn}(A, C \cup j \setminus i) \cdot (\wedge^2(t_{i,j}(\xi)))_{C, C \cup j \setminus i}, & \text{если } H \neq A \cup C, i \in C, \\ \operatorname{sgn}(A \cup j \setminus i, C) \cdot (\wedge^2(t_{i,j}(\xi)))_{A, A \cup j \setminus i}, & \text{если } H \neq A \cup C, i \in A, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Известно, что

$$a_{A,C}^H (\wedge^2(t_{i,j}(\xi))) = \sum_{B \sqcup D = H} \operatorname{sgn}(B, D) (\wedge^2(t_{i,j}(\xi)))_{A,B} (\wedge^2(t_{i,j}(\xi)))_{C,D}.$$

Так как $(\wedge^2(t_{i,j}(\xi)))_{L,M} \neq 0$ тогда и только тогда, когда либо $L = M$, либо $L = (ik)$, $M = (jk)$, то нам необходимо разобрать 4 случая:

- (1) $A = B$ и $C = D$,
- (2) $A \neq B$ и $C \neq D$ (при этом A и C обязаны содержать i),
- (3) $A = B$ и $C \neq D$ (при этом C обязано содержать i),
- (4) $A \neq B$ и $C = D$ (при этом A обязано содержать i).

Пусть $A = B$ и $C = D$, тогда $(\wedge^2(t_{i,j}(\xi)))_{A,A} = (\wedge^2(t_{i,j}(\xi)))_{B,B} = 1$.

Теперь пусть $A \neq B$ и $C \neq D$, $i \in A$ и $i \in B$. Можно считать, что $A = \{i, a\}$, $C = \{i, c\}$. Тогда коэффициент $a_{A,C}^H$ будет иметь следующий

вид

$$\sum_{B \sqcup D = H} \operatorname{sgn}(B, D) (\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{\{i,a\},B} (\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{\{i,c\},D}.$$

Так как B и D обязаны содержать j (иначе соответствующий элемент трансвекции равен нулю), тогда $B = \{j, a\}$, $D = \{j, c\}$. Это невозможно, так как B и D не должны пересекаться. Тем самым второй случай исключен.

Осталось разобрать два аналогичных случая. Проведем рассуждения, когда $A = B$ и $C \neq D$. Сумму можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{B \sqcup D = H} \operatorname{sgn}(B, D) (\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{A,B} (\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{C,D} \\ &= \sum_{D \subset H \setminus A} \operatorname{sgn}(A, D) (\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{A,A} (\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{C,D} \\ &= \sum_{D \subset H \setminus A} \operatorname{sgn}(A, D) (\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{C,D}. \end{aligned}$$

Множество C обязано содержать i , поэтому $C = \{i, c\}$. Чтобы $(\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{\{i,c\},D}$ был не равен нулю, необходимо, чтобы $D = \{j, c\}$. Тогда сумма будет равна $\operatorname{sgn}(A, C \cup j \setminus i) \cdot (\Lambda^2(t_{i,j}(\xi)))_{C, C \cup j \setminus i}$. Последний случай разбирается аналогично. \square

2.3. Вторая серия уравнений на групповую схему. Альтернативно, мы представим ещё одну систему уравнений, задающую аффинную групповую схему $\Lambda^2 \operatorname{GL}_n$.

Для данного подхода переобозначим многочлены Плюккера следующим образом: $f_{\mathcal{I}} := f_{i,J}$, где $\mathcal{I} = \{i\} \cup J$. Так как произвольный многочлен Плюккера $f_{\mathcal{I}} \in \operatorname{Plü}$ есть квадратичная форма, то может быть представлен в виде

$$f_{\mathcal{I}}(x) = x^t B_{\mathcal{I}} x,$$

где $B_{\mathcal{I}}$ – матрица, элементы которой равны:

$$(B_{\mathcal{I}})_{M,L} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(M, L), & \text{если } M \sqcup L = \mathcal{I}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда условие

$$f_{\mathcal{I}}(gx) = g \circ f_{\mathcal{I}}(x) = \sum_{\mathcal{J}} \alpha_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} f_{\mathcal{J}}, \text{ где } \alpha_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} \in R,$$

примет следующий вид

$$x^t g^t B_{\mathcal{I}} g x = \sum_{\mathcal{J}} \alpha_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} x^t B_{\mathcal{J}} x \text{ или } g^t B_{\mathcal{I}} = \sum_{\mathcal{J}} \alpha_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} B_{\mathcal{J}} g^{-1}.$$

А значит, верна следующая теорема.

Теорема 6. Матрица $g \in \text{GL}_n(R)$ принадлежит $\Lambda^2 \text{GL}_n(R)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие тождества для любого $\mathcal{I} \in \Lambda^4[n]$ и некоторых констант $\alpha_{\bullet}^{\bullet}$ таких, что $\det(\alpha_{\bullet}^{\bullet}) \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{N: \\ N \cap K = \emptyset}} \alpha_{K \cup N}^{\mathcal{I}} \text{sgn}(K, N) g'_{N, L} = 0, \\ \text{для любых пар } K, L, \text{ таких, что } L \not\subset \mathcal{I}, \\ \sum_{\substack{N: \\ N \cap K = \emptyset}} \alpha_{K \cup N}^{\mathcal{I}} \text{sgn}(K, N) g'_{N, L} = g_{\mathcal{I} \setminus L, K} \text{sgn}(\mathcal{I} \setminus L, L), \\ \text{для любых пар } K, L, \text{ таких, что } L \subset \mathcal{I}. \end{array} \right.$$

Заметим, что данные уравнения имеют более компактный вывод, но требуют существования неопределенных констант.

§3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВНЕШНИХ ЧИСЕЛ

В данном параграфе мы покажем, как можно увидеть внешние числа произвольной матрицы $g \in \Lambda^2 \text{SL}_n(R)$ на весовой диаграмме системы корней A_3 со старшим весом ϖ_2 . Мы отсылаем читателя к работе [4], в которой развита теория весовых диаграмм, а также содержится обширная библиография.

В стандартном базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ весовая диаграмма (A_3, ϖ_2) выглядит следующим образом.

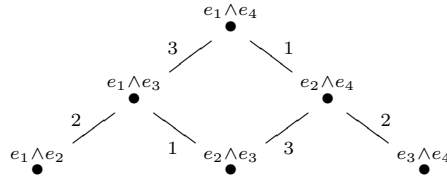


Рис. 1. Весовая диаграмма (A_3, ϖ_2) .

Напомним как определяются внешние числа матрицы. Пусть $H := \{i\} \sqcup J$ – четверка различных чисел из $\{1, \dots, n\}$. Для любой матрицы

$g \in \mathrm{SL}_N(R)$ и для любых пар чисел $A, C \in \Lambda^2[n]$:

$$\begin{aligned} a_{A,C}^H(g) &= \sum_{h=1}^3 (-1)^h (g_{A,ij_h} g_{C,J \setminus j_h} + g_{C,ij_h} g_{A,J \setminus j_h}) \\ &= \sum_{B \sqcup D = H} \mathrm{sgn}(B, D) g_{A,B} g_{C,D}. \end{aligned}$$

Определим еще одну диаграмму, позволяющую визуализировать матричные вхождения произвольного элемента группы $\Lambda^2 \mathrm{SL}_n(R)$. Эта диаграмма состоит из N копий диаграмм (A_{n-1}, ϖ_2) расположенных во всех узлах диаграммы (A_{n-1}, ϖ_2) .

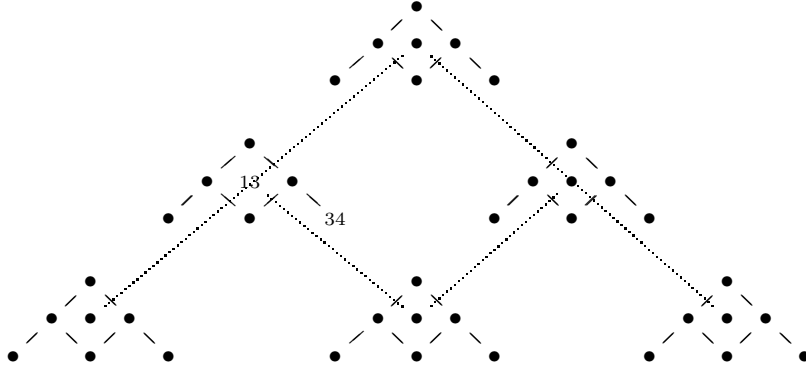


Рис. 2. Диаграмма группы $\Lambda^2 \mathrm{SL}_4(R)$: $(A_3, \varpi_2) \times (A_3, \varpi_2)$.

Замечание. На данной диаграмме точка с координатами $(13, 34)$ соответствует элементу $g_{13,34} \in \Lambda^2 \mathrm{SL}_4(R)$.

Введем понятие пути на весовой диаграмме симметрического квадрата $\mathrm{SL}_n(R)$ (то есть диаграммы внешнего квадрата с добавленными вершинами (i, i) , где $1 \leq i \leq n + 1$). Для вершины диаграммы $(ij) \in \Lambda^2[n]$ путём для числа i (соответственно j) называется максимальное по включению множество вершин, содержащих i (соответственно j), и соединяющих их рёбер. На весовой диаграмме для группы $\mathrm{Sym}^2 \mathrm{SL}_7(R)$ изображены два пути, инцидентных вершине (15) (\sim для числа 1, $=$ для числа 5).

Элементарным квадратом мы будем называть корневое вложение (A_3, ϖ_2) в диаграмму (A_{n-1}, ϖ_2) . Заметим, что любой элементарный

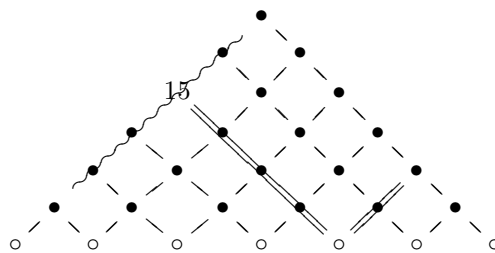


Рис. 3. Пути, инцидентные вершине (15).

квадрат может быть получен как результат попарных пересечений четырех путей, которые разбиваются на пары параллельных.

Приведем пример построения элементарного квадрата бивекторного представления группы $SL_7(R)$ для $H = \{1, 2, 4, 6\}$. Разобьем множество H следующим образом: $H = \{14\} \cup \{26\}$. Построим 4 пути, инцидентных данным вершинам. Точки пересечения этих прямых есть элементарный квадрат.

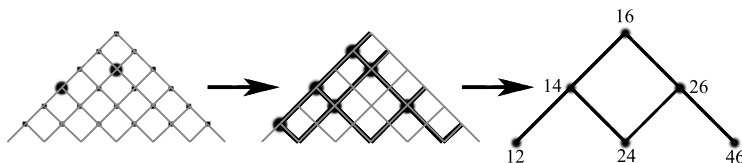
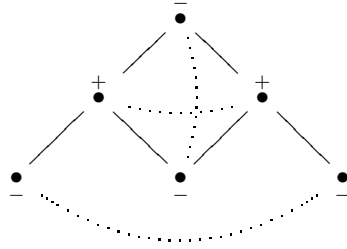


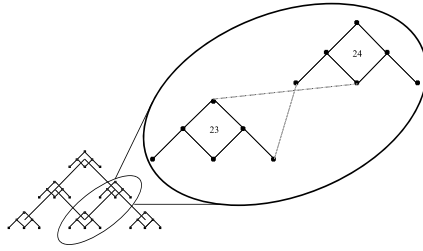
Рис. 4. Элементарный квадрат для множества $\{1, 2, 4, 6\}$.

Для получения внешнего числа $a_{A,C}^H(g)$ для фиксированного набора (A, C, H) необходимо, во-первых, на диаграмме (A_{n-1}, ϖ_2) зафиксировать две вершины A и C . Далее следует рассмотреть две копии диаграмм (A_{n-1}, ϖ_2) , соответствующие зафиксированным вершинам A и C . По множеству H построить на полученных диаграммах четыре пути, точки пересечения которых будут образовывать элементарные квадраты. Тогда $a_{A,C}^H(g)$ – это означенная сумма всевозможных попарных произведений вершин последних двух элементарных квадратов. В рассматриваемой сумме выбор знаков для слагаемых приведен на рис. 5.

Рис. 5. Знаки для (A_3, ϖ_2) .

Приведем пример вычисления коэффициента $a_{23,24}^{1234}(g)$ для группы $\Lambda^2 \text{SL}_4(R)$. Ниже мы отдельно выделили две копии диаграммы (A_3, ϖ_2) , соответствующие индексам $A = 23$ и $C = 24$. Тогда

$$a_{23,24}^{1234}(g) = g_{23,12} \cdot g_{24,34} - g_{23,13} \cdot g_{24,24} + g_{23,14} \cdot g_{24,23} + g_{23,23} \cdot g_{24,14} - g_{23,24} \cdot g_{24,13} + g_{23,34} \cdot g_{24,12}.$$

Рис. 6. (A_3, ϖ_2) поддиаграммы для $(A, C) = (23, 24)$.

Теорема 7. Следующий алгоритм корректно вычисляет внешние числа произвольной матрицы $g \in \Lambda^2 \text{SL}_n(R)$.

Руководство к получению $a_{A,C}^H(g)$ группы $\Lambda^2 \text{SL}_n(R)$.

- Построить диаграмму $(A_{n-1}, \varpi_2) \times (A_{n-1}, \varpi_2)$;
- Выбрать две копии диаграммы (A_{n-1}, ϖ_2) , отвечающие индексам A и C ;
- Построить два элементарных квадрата на диаграммах из предыдущего пункта, отвечающих множеству H ;
- Посчитать $a_{A,C}^H(g)$ как означенную сумму всевозможных парных произведений вершин последних двух элементарных квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. L. Gorodentsev, A. S. Khoroshkin, A. N. Rudakov, *On syzygies of highest weight orbits*, 2006.
2. R. A. Lubkov, I. Nekrasov, *Overgroups of exterior powers of an elementary group. I. Levels and normalizers*, 2018.
3. V. A. Petrov, *Overgroups of unitary groups*. — K-Theory, **29** (2003), 77–108.
4. E. B. Plotkin, A. A. Semenov, N. A. Vavilov, *Visual basic representations*. — J. Algebra Comput., **8**, No. 1 (1998), 61–95.
5. G. M. Seitz, *The Maximal Subgroups of Classical Algebraic Groups*. Amer. Math. Soc., 1987.
6. A. V. Stepanov, N. A. Vavilov, *Decomposition of transvections*. — K-Theory, **19**, No. 2 (2000), 109–153.
7. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах $EO(2l, R)$* . — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 68–85.
8. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах $Ep(2l, R)$* . — Алгебра и анализ **15**, No. 4 (2003), 72–114.
9. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах $EO(n, R)$* . — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 10–51.
10. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа E_6* . — Алгебра и анализ **19**, No. 5 (2007), 37–64.
11. Н. А. Вавилов, Е. Я. Перельман, *Поливекторные представления GL_n* . — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 69–97.
12. А. А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов*. — Изв. АН СССР. Сер. матем. **41**, No. 2 (1977), 235–252.

Lubkov R. A., Nekrasov I. I. Explicit equations for exterior square of the general linear group.

We present several explicit systems of equations defining exterior square of the general linear group $\wedge^2 GL_n$ as an affine group scheme. Algebraic ingredients of the equations, exterior numbers, are translated into the language of weight diagrams corresponding to Lie groups of type A_{n-1} in representation with the highest weight ϖ_2 .

С.-Петербургский
государственный университет,
математико-механический факультет
E-mail: RomanLubkov@yandex.ru

Поступило 1 марта 2018 г.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский
государственный университет,
14 линия В.О., дом 29Б,
С.-Петербург 199178, Россия
E-mail: geometr.nekrasov@yandex.ru