Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 470, 2018 г.

В. И. Копейко

УНИТАРНЫЕ СИМВОЛЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МАТРИЦ

§1. Введение

В 2015 году в письме к автору проф. Рао из Тата института фундаментальных исследований, Индия, поставил вопрос о построении трансфера $K_1\operatorname{Sp}(R[X]) \to K_1\operatorname{Sp}(R[X^2])$ и вычислении композиции естественного гомоморфизма $K_1\operatorname{Sp}(R[X^2]) \to K_1\operatorname{Sp}(R[X])$, индуцированного вложением $R[X^2] \to R[X]$, и трансфера с предположением, что оно совпадает с отображением умножения на 2. В [1] автором для любого унитарного кольца (R, λ, Λ) и любого натурального n был построен трансфер $(i_n)_* : K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \to K_1U^\lambda(R[X^n], \Lambda[X^n])$, где i_n обозначает каноническое вложение $R[X^n] \to R[X]$ и вычислена композиция $(i_n)_* \circ (i_n)^*$, где $(i_n)^*$ обозначает естественный гомоморфизм $K_1U^\lambda(R[X^n], \Lambda[X^n]) \to K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$, индуцированный вложением i_n. Из полученной формулы следовало, что композиция $(i_2)_* \circ (i_2)^* : K_1\operatorname{Sp}(R[X^2]) \to K_1\operatorname{Sp}(R[X^2])$ совпадает с гиперболическим гомоморфизмом H. Таким образом, естественно встает задача нахождения соотношений в группе $K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ между классами произвольной унитарной матрицы α и гиперболической матрицы $H(\alpha)$.

Целью данной работы является введение и изучение унитарных символов и их применение к разложению гиперболической унитарной матрицы $H(\alpha)$, где α – унитарная матрица. В теореме, основном результате статьи, доказывается, что, по модулю элементарных унитарных матриц, гиперболическая матрица $H(\alpha)$ раскладывается в произведение двух унитарных матриц: матрицы α и матрицы, отличающейся от α только знаками в блоках по побочной диагонали. В частности, если характеристика унитарного кольца R равна 2, то $[H(\alpha)] = [\alpha^2] = 2[\alpha]$ в (абелевой) группе $K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ и, значит, гиперболический гомоморфизм $H : K_1U^\lambda(R, \Lambda) \to K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ совпадает с отображением умножения на 2. Основным вспомогательным результатом работы является

Ключевые слова: гиперболические унитарные матрицы, унитарное кольцо, унитарная группа, унитарный K_1-функтор, унитарные символы, эрмитовы матрицы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-01-00148).

предложение 4, в котором устанавливается связь между различными унитарными символами.

§2. Λ-эрмитовы и Λ-унитарные матрицы

В работе мы придерживаемся стандартных определений и обозначений унитарной K-теории. Приведем ряд определений и результатов из [2], используемых в данной работе.

Пусть (R,λ,Λ) – унитарное кольцо, где R – ассоциативное кольцо с 1, в котором заданы инволюция $x\to\bar{x}$; симметрия: λ – центральный элемент кольца R, удовлетворяющий условию $\lambda\cdot\bar{\lambda}=1$; система параметров: Λ – аддитивная подгруппа R такая, что $\Lambda_{\min}=\{x-\lambda\bar{x}, x\in R\}\leqslant\Lambda\leqslant\Lambda_{\max}=\{x\in R : x=-\lambda\bar{x}\}$, причем $\bar{x}\Lambda x\subseteq\Lambda$ для любого $x\in R$. Если положить $\overline{\Lambda}=\{\bar{x}, x\in\Lambda\}$, то получаем еще одно унитарное кольцо $(R,\bar{\lambda},\overline{\Lambda})$. Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$, положив $(a_{ij})^*=(\overline{a_{ji}})$.

Определение. *Матрица $a=(a_{ij})(\in M_r(R))$ называется Λ-эрмитовой, если $a=-\lambda a^*$ и все диагональные элементы матрицы a содержатся в Λ.*

Приведем два свойства Λ-эрмитовых матриц, которые мы будем использовать в дальнейшем, первое из которых – очевидно, а второе доказано, например, в примере 2 в [3].

1. *Матрица $a(\in M_r(R))$ является Λ-эрмитовой тогда и только тогда, когда a^* является $\overline{\Lambda}$-эрмитовой матрицей.*

2. *Если $b(\in M_r(R))$ является Λ-эрмитовой матрицей, то матрица a^*ba – Λ-эрмитова для любой $a(\in M_r(R))$.*

В работе мы будем использовать блочную форму записи матриц. Более точно, запись $\alpha=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_{2r}(R)$ означает, что $a,b,c,d\in M_r(R)$. Для натурального r положим $I_r^\lambda=\begin{pmatrix} 0 & e_r\\ \lambda e_r & 0\end{pmatrix}$, где e_r обозначает единичную матрицу порядка r.

Приведем ряд хорошо известных эквивалентных определений Λ-унитарной матрицы (см., например, [2]).

Предложение 1. *Матрица $\alpha=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_{2r}(R)$ называется Λ-унитарной, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1) $\alpha^* I_r^\lambda \alpha = I_r^\lambda$ *и диагональные элементы матриц* a^*c, b^*d *содержатся в* Λ;

2) $ad^* + \lambda bc^* = e_r$ *и матрицы* ab^*, cd^* Λ-*эрмитовы*;

3) $a^*d + \lambda c^*b = e_r$ *и матрицы* a^*c, b^*d Λ-*эрмитовы.*

Отметим, что из эквивалентности условий 2) *и* 3) *следует, что* $\alpha \in U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha^* \in U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$.

Множество $U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$ *всех* Λ-*унитарных матриц порядка* $2r$ *образует группу, которая называется (гиперболической)* Λ-*унитарной группой. Определим гиперболический гомоморфизм* $H : GL_r(R) \to U_{2r}^\lambda(R,\Lambda) : \alpha \to \operatorname{diag}(\alpha, (\alpha^*)^{-1})$.

Переход к Λ-унитарным группам над унитарными кольцами унифицирует изучение классических групп над кольцами. Например, если R – коммутативное кольцо с тривиальной инволюцией, то симплектическая группа $\mathrm{Sp}_{2r}(R)$ есть группа $U_{2r}^{-1}(R, \Lambda_{\max} = R)$, а ортогональная группа $O_{2r}(R)$ есть группа $U_{2r}^1(R, \Lambda_{\min} = 0)$.

Подгруппа $U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$, порожденная матрицами вида

$$H(a) = \operatorname{diag}(a, (a^*)^{-1}), \quad T_{12}(b) = \begin{pmatrix} e_r & b \\ 0 & e_r \end{pmatrix}, \quad T_{21}(c) = \begin{pmatrix} e_r & 0 \\ c & e_r \end{pmatrix},$$

где $a \in E_r(R)$, b – $\overline{\Lambda}$-эрмитова, c – Λ-эрмитова, обозначается $EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$ и называется элементарной (гиперболической) Λ-унитарной группой.

Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$, $\beta = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2s}(R)$. Положим

$$\alpha \perp \beta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2(r+s)}(R).$$

Определим вложение $U_{2r}^\lambda(R,\Lambda) \to U_{2r+2}^\lambda(R,\Lambda) : \alpha \to \alpha \perp e_2$ и положим $U^\lambda(R,\Lambda) = \cup U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$, $EU^\lambda(R,\Lambda) = \cup EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$.

Имеет место следующий унитарный аналог леммы Уайтхеда [2].

Предложение 2. *Пусть* $\alpha, \beta \in U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$. *Тогда матрицы* $\alpha \perp \alpha^{-1}$ *и* $[\alpha,\beta] \perp e_{2r}$ *содержатся в* $EU_{4r}^\lambda(R,\Lambda)$, *где* $[\alpha,\beta] = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ *– коммутатор.*

В силу предложения группа $EU^\lambda(R,\Lambda)$ *совпадает с коммутантом группы* $U^\lambda(R,\Lambda)$, *и в частности, корректно определена (абелева) группа* $K_1U^\lambda(R,\Lambda) = U^\lambda(R,\Lambda)/EU^\lambda(R,\Lambda)$. *Класс матрицы* $\alpha (\in U^\lambda(R,\Lambda))$ *в группе* $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ *будем обозначать* $[\alpha]$.

Приведем ряд следствий из предложения, необходимые нам в дальнейшем.

Следствие 1. *Для любой матрицы* $\alpha \in U_{2r}^{\lambda}(R, \Lambda)$ *справедливо равенство* $[\alpha \perp e_{2r}] = [e_{2r} \perp \alpha]$ *в группе* $K_1 U^{\lambda}(R, \Lambda)$.

Для доказательства следствия достаточно отметить, что

$$(\alpha \perp e_{2r})(e_{2r} \perp \alpha)^{-1} = \alpha \perp \alpha^{-1} \in EU_{4r}^{\lambda}(R, \Lambda)$$

в силу предложения.

Следующее утверждение содержится в следствии 2 предложения 2 в [1].

Следствие 2. *Для любой матрицы* $\alpha \in U^{\lambda}(R, \Lambda)$ *имеем* $\alpha\alpha^* \in EU^{\lambda}(R, \Lambda)$*, и, в частности,* $[\alpha] = [(\alpha^*)^{-1}]$ *в группе* $K_1 U^{\lambda}(R, \Lambda)$.

§3. Унитарные символы

Введем унитарный символ, который, как показывают приводимые ниже свойства, является (некоммутативным, матричным) обобщением классического симплектического символа Басса–Милнора–Серра [4]. Для его определения нам необходимо следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 3. *Если* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R, \Lambda)$, *то* $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ *в группе* $K_1 U^{\lambda}(R, \Lambda)$.

Для доказательства предложения, достаточно отметить, что

$$\alpha_1 \alpha_2^{-1} = T_{21}(c_1 d_2^* + \lambda d_1 c_2^*) \in EU_{2r}^{\lambda}(R, \Lambda).$$

Следствие. *Произвольный элемент группы* $K_1 U^{\lambda}(R, \Lambda)$ *однозначно определяется верхней половиной* Λ*-унитарной матрицы, представляющей данный элемент.*

Замечание 1. В действительности, произвольный элемент группы $K_1 U^{\lambda}(R, \Lambda)$ однозначно определяется любой из половинок (верхней, нижней, правой или левой) Λ-унитарной матрицы, представляющей заданный элемент.

Таким образом, если положить $TP_r^{\lambda}(R, \Lambda) = \Big\{(a, b), a, b \in M_r(R) : \exists c, d \in M_r(R)$ такие, что $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R, \Lambda)\Big\}$, то получаем корректно определенный унитарный символ

$$[\ ,\ ]:\ TP_r^{\lambda}(R,\Lambda) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) : (a,b) \to [a,b] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right],$$

удовлетворяющий следующим свойствам:

1) $[a+bt, b] = [a,b]$ для произвольной Λ-унитарной матрицы $t \in M_r(R)$;

1)$'$ $[a, b+as] = [a,b]$ для произвольной $\overline{\Lambda}$-унитарной матрицы $s \in M_r(R)$;

2) если $a \in GL_r(R)$, то $[a,b] = [a,0] = [H(a)]$;

3) если $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, то $[a,b] = [a^*, c^*]^{-1}$.

Свойство 3) справедливо в силу следствия 2 из предложения 2, остальные свойства обосновываются простой проверкой.

Положим

$$LP_r^{\lambda}(R,\Lambda) = \Big\{(c,d), c,d \in M_r(R) : \exists a,b \in M_r(R) \text{ такие, что } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)\Big\}.$$

В результате получаем корректно определенный унитарный символ $[\ ,\ ]':\ LP_r^{\lambda}(R,\Lambda) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) : (c,d) \to [c,d]' = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$, связанный с предыдущим символом следующим равенством (свойство симметрии):

4) $[a,b] = [\lambda b, a]'$ для произвольной $(a,b) \in TP_r^{\lambda}(R,\Lambda)$.

Так как в обозначениях и условиях предложения 3, $H(\alpha_1)H(\alpha_2^{-1}) = H(\alpha_1\alpha_2^{-1}) = H(T_{21}(c_1d_2^* + \lambda d_1c_2^*)) \in EU_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, то для произвольной $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ класс гиперболической матрицы $H(\alpha)$ в группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ совпадает с классом $H([a,b])$. В результате получаем еще один корректно определенный унитарный символ $\{\ ,\ \}:\ TP_r^{\lambda}(R,\Lambda) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) : (a,b) \to \{a,b\} = H([a,b])$.

Получим следующее вспомогательное утверждение, связывающее различные унитарные символы.

Предложение 4. *Для произвольной пары*

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},\ \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} a & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$$

справедливо следующее равенство:

$$\{a, b_1\}[a^*, c_2^*] = [a, -\lambda b_1 c_2^* b_1]$$

в группе $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$.

Доказательство предложения будем проводить по схеме, аналогичной доказательству в [4, лемма 13.3]. Положим $\beta_1 = H((\alpha_1^*)^{-1})$ (тогда $\beta_1 \equiv H(\alpha_1) \bmod EU^\lambda(R,\Lambda)$ в силу следствия 2 предложения 2), а также $\beta_2 = \alpha_2^* \perp e_{2r}$. Тогда произведение $\{a, b_1\}[a^*, c_2^*]$ есть образ по модулю $EU^\lambda(R,\Lambda)$ матрицы

$$\beta_1\beta_2 = \begin{pmatrix} d_1a^* & \bar\lambda c_1 & d_1c_2^* & 0 \\ \lambda b_1a^* & a & \lambda b_1c_2^* & 0 \\ ab_2^* & 0 & ad_2^* & b_1 \\ c_1b_2^* & 0 & c_1d_2^* & d_1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\gamma_1 = H\left(\begin{pmatrix} e & 0 \\ b_1^* & e \end{pmatrix}\right) \in EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$. По условию, $\alpha_2 \in U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$, и значит, матрица ab_2^* является Λ-эрмитовой в силу предложения 1. Следовательно, $\gamma_2 = T_{21}\left(\begin{pmatrix} -ab_2^* & \lambda b_2c_1^* \\ -c_1b_2^* & 0 \end{pmatrix}\right) \in EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$. Нетрудно проверить, используя условия из предложения 1, что произведение $\gamma_2\beta_1\beta_2\gamma_1$ есть матрица

$$\begin{pmatrix} e & \bar\lambda c_1 & d_1c_2^* & -d_1c_2^*b_1 \\ 0 & a & \lambda b_1c_2^* & -\lambda b_1c_2^*b_1 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & -\bar\lambda c_1b_2^*c_1 & v_1 & v_2 \end{pmatrix},$$

где $v_1 = c_1d_2^* - c_1b_2^*d_1c_2^*$, $v_2 = d_1 - c_1d_2^*b_1 + c_1b_2^*d_1c_2^*b_1$.

Положим $\gamma_3 = H\left(\begin{pmatrix} e & -\bar\lambda c_1 \\ 0 & e \end{pmatrix}\right) \in EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$. По условию, $\alpha_2 \in U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$, и значит, матрица c_2^*a является $\overline{\Lambda}$-эрмитовой в силу предложения 1. Следовательно, матрица $d_1c_2^*ad_1^*$ также является $\overline{\Lambda}$-эрмитовой в силу свойства 2 эрмитовых матриц, и, значит,

$$\gamma_4 = T_{12}\left(\begin{pmatrix} -d_1c_2^*ad_1^* & d_1c_2^*b_1 \\ -\bar\lambda b_1^*c_2d_1^* & 0 \end{pmatrix}\right) \in EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda).$$

Нетрудно проверить, используя условия из предложения 1, что произведение $\gamma_4\gamma_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_3$ есть матрица

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -\lambda b_1 c_2^* b_1 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda} c_1 b_2^* c_1 & 0 & v_2 \end{pmatrix}.$$

В силу следствия 1 из предложения 2, полученная матрица сравнима по модулю $EU^\lambda(R,\Lambda)$ с матрицей $\begin{pmatrix} a & -\lambda b_1 c_2^* b_1 \\ -\bar{\lambda} c_1 b_2^* c_1 & v_2 \end{pmatrix} \perp e_{2r}$, и значит, $\{a, b_1\}[a^*, c_2^*] = [a, -\lambda b_1 c_2^* b_1]$, что и завершает доказательство предложения 4.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$. *Тогда, если* a – $\overline{\Lambda}$-*эрмитова матрица, то* $\{a, b\} = [a, -\ \lambda b^2][I_r^\lambda]^{-1} = [-\ \lambda b^2, \bar{\lambda} a]$.

Для доказательства следствия, достаточно взять $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a & \bar{\lambda} e \\ e & 0 \end{pmatrix} = T_{12}(a)(I_r^\lambda)^{-1}$ и отметить, что $\alpha_2^* \equiv I_r^\lambda \bmod EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$.

Следствие 2. *Если* a – $\overline{\Lambda}$-*эрмитова матрица, то равенство из предложения* 4 *принимает вид:* $[a, -\ \lambda b_1^2][a^*, c_2^*] = [a, -\lambda b_1 c_2^* b_1][I_r^\lambda]$.

Замечание 2. Классический симплектический символ Меннике [4] есть частный случай введенного символа $[\ ,\ ]$, получаемый при $r = 1$. Напомним, что в симплектическом случае R – коммутативное кольцо с тривиальной инволюцией, $\lambda = -1$, $\Lambda = R$, а $I_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Ep_2(R)$. Тогда, если положить $b_1 = b, c_2 = c$, то равенство из следствия 2 принимает вид: $[a, b^2][a, c] = [a, b^2 c]$ для произвольной пары $(a, b), (a, c)$ унимодулярных строк (мультипликативность симплектического символа).

§4. Разложение гиперболической унитарной матрицы

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Для произвольной матрицы* $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$ *справедливо следующее сравнение*:

$$H(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \bmod EU^\lambda(R,\Lambda).$$

Доказательство. Возьмем в предложении 4 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Тогда из доказательства предложения 4 следует справедливость следующего сравнения: $H(\alpha)\alpha^* \equiv \beta \bmod EU^\lambda(R,\Lambda)$, где $\beta = \begin{pmatrix} a & -\lambda bc^*b \\ -\bar{\lambda}cb^*c & v \end{pmatrix}$ и $v = d - cd^*b + cb^*dc^*b$. Умножая данное сравнение справа на α и используя предложение 2 и его следствие 1, получаем сравнение $H(\alpha) \equiv \beta\alpha \equiv \alpha\beta \bmod EU^\lambda(R,\Lambda)$.

Преобразуем матрицу β, используя соотношения из предложения 1. Имеем: $-\lambda bc^*b = -\lambda\bar{\lambda}(e - ad^*)b = -b + ad^*b$. Аналогично получаем: $-\bar{\lambda}cb^*c = (-e+da^*)c = -c+da^*c = -c-\lambda dc^*a = -c+cd^*a$. Таким образом, $\beta = \begin{pmatrix} a & -b+ad^*b \\ -c+cd^*a & v \end{pmatrix}$. В силу предложения 1, матрица b^*d Λ-эрмитова, и значит, матрица d^*b, $\overline{\Lambda}$–эрмитова в силу свойства 1 эрмитовых матриц. Следовательно, $\delta_1 = T_{12}(-d^*b) \in EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$, причем $\beta\delta_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c+cd^*a & d-cd^*b \end{pmatrix}$. Аналогично, так как силу предложения 1, матрица cd^* Λ-эрмитова, то $\delta_2 = T_{21}(-cd^*) \in EU_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$, причем $\delta_2\beta\delta_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$. Следовательно, $H(\alpha) \equiv \alpha\beta \equiv \alpha\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \bmod EU^\lambda(R,\Lambda)$, что и завершает доказательство теоремы. □

С использованием унитарного символа теорема может быть сформулирована в следующей эквивалентной форме.

Следствие 1. *В условиях теоремы класс гиперболической матрицы $H(\alpha)$ совпадает в группе $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ с произведением символов $[a,b][a,-b]$.*

Следствие 2. *Если характеристика унитарного кольца R равна 2, то $H([\alpha]) = 2[\alpha]$ в (абелевой) группе $K_1U^\lambda(R,\Lambda)$. В частности, гиперболический гомоморфизм $H : K_1U^\lambda(R,\Lambda) \to K_1U^\lambda(R,\Lambda)$ совпадает с отображением умножения на 2.*

Действительно, в силу следствия 1 имеем: $H([\alpha]) = [\alpha^2] = 2[\alpha]$.

Следствие 3. *Если $\alpha \in U_{2r}^\lambda(R,\Lambda)$, то $H(\alpha) \equiv \alpha^2 \bmod E(R)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R, \Lambda)$. Тогда, как доказано выше, $H(\alpha) \equiv \alpha\beta \bmod EU^{\lambda}(R, \Lambda)$, где $\beta = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$, и, в частности, $H(\alpha) \equiv \alpha\beta \bmod E(R)$. Положим $\gamma = \mathrm{diag}(-e_r, e_r)$. Тогда имеем: $\beta = \gamma\alpha\gamma \equiv \alpha[\alpha, \gamma] \equiv \alpha \bmod E(R)$, так как $[\alpha, \gamma] \in E(R)$ в силу леммы Уайтхеда [5] и, следовательно, $H(\alpha) \equiv \alpha^2 \bmod E(R)$. □

Список литературы

1. В. И. Копейко, *Трансфер унитарного K_1-функтора при полиномиальных расширениях колец.* — Алгебра и анализ **29**, No. 3 (2017), 34–60.
2. H. Bass, *Unitary algebraic K-theory.* — Lecture Notes Math. **343** (1973), 57–265.
3. В. И. Копейко, *Нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа унитарного кольца.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 134–157.
4. Х. Басс, Дж. Милнор, Ж.-П. Серр, *Решение конгруэнцпроблемы для $\mathrm{SL}_n (n \geqslant 3)$ и $\mathrm{Sp}_{2n} (n \geqslant 2)$.* — Математика, Сб. пер. **15** (1971), 44–60.
5. Х. Басс, *Алгебраическая K-теория*, Мир, М., 1973.

Kopeiko V. I. Unitary symbols and factorization hyperbolic matrices.

In this paper we introduce and study unitary symbols, and as application we obtain a factorization of hyperbolic matrices.

Калмыцкий государственный
университет им. Б. Б. Городовикова
ул. Пушкина, 11
358000 Элиста, Россия
E-mail: kopeiko52@mail.ru

Поступило 18 октября 2018 г.