Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 470, 2018 г.

В. А. Койбаев

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕННЫХ КОНГРУЭНЦ-ПОДГРУППАХ. I

1. Постановка задачи и обозначения. В Коуровской тетради [1, вопрос 15.46] сформулирован вопрос В. М. Левчука о допустимости (замкнутости) ковров (элементарных сетей). Этот вопрос (точнее, его SL-вариант) звучит следующим образом. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная сеть (ковер) порядка $n \geqslant 3$ над полем K. Верно ли, что для допустимости ковра (элементарной сети) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, необходимо и достаточно допустимости подковров (подсетей) $\begin{pmatrix} * & \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij} & * \end{pmatrix}$ второго порядка (для любых $i \neq j$). В связи с теоремой о разложении элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$ [2] достаточным условием для положительного решения указанного вопроса является справедливость равенства

$$E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K), \quad t_{ji}(K)\rangle = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), \quad t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$$

для всех $i \neq j$, где $\sigma = (\sigma_{ij})$ – замкнутая элементарная сеть степени $n \geqslant 3$ над полем K, $E(\sigma)$ – элементарная сетевая подгруппа. На примере сети σ идеалов $F_s[x]$ (кольца многочленов $F[x]$), состоящих из всех многочленов, степень которых не меньше s, $s \geqslant 0$, показано, что левая часть указанной формулы не содержится в правой [3].

В настоящей заметке решается значительно более общая задача. А именно, пусть R – коммутативная область целостности с $1 \in R$, которая не является полем. Пусть, далее, K – поле частных кольца R, $\sigma = (\sigma_{ij})$ – неприводимая элементарная сеть аддитивных подгрупп порядка $n \geqslant 3$ над полем K. Далее, положим $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, а через J обозначим произвольное подмножество множества I_n, при этом будем считать, что для числа $|J| = m$ элементов множества J выполнено

Ключевые слова: сети, элементарные сети, замкнутые элементарные сети, элементарная сетевая группа, ковры, ковровые группы, допустимые элементарные сети, трансвекция.

Работа выполнена в рамках темы НИР ЮМИ ВНЦ РАН.

условие $2 \leqslant m \leqslant n-1$. В работе мы рассматриваем вопрос справедливости равенства

$$E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K) : \quad i, j \in J\rangle = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \quad i, j \in J\rangle. \qquad (1)$$

Очевидно, что правая часть формулы (1) содержится в левой. В настоящей заметке для произвольного m, $2 \leqslant m \leqslant n-1$, и произвольного коммутативного кольца R мы строим неприводимую элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка n над кольцом R, для которой левая часть формулы (1) не содержится в правой. Отметим, что доказательство нашего общего результата значительно упрощает доказательство результата [3] для $m = 2$.

Заметим, далее, что если $J = \{1, 2, \ldots, m\}$, то формула (1) принимает вид

$$E(\sigma) \cap \mathrm{diag}(\mathrm{SL}(m, K), e_{n-m}) = E(\sigma^J),$$

где элементарная сеть $\sigma^J = (\sigma^J_{ij})$ определяется следующим образом: $\sigma^J_{ij} = \sigma_{ij}$, если i, $j \in J$, $i \neq j$, и $\sigma^J_{ij} = 0$ в остальных случаях для $i \neq j$.

Напомним вначале известные определения, которыми мы пользуемся в настоящей заметке. Система аддитивных подгрупп $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ кольца (поля) K называется *сетью* порядка n над кольцом K, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j [4]. Для сети принят также термин *ковер.* Такая же система, но без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарным ковром*) [4, 5] (см.также [6, 7]). Полную или элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. Назовем элементарную сеть σ *замкнутой (допустимой)*, если элементарная сетевая подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Замкнутыми являются, например, элементарные сети, диагональ которых можно дополнить подгруппами, получив при этом полную сеть.

В работе приняты следующие стандартные обозначения:

R – произвольная коммутативная область целостности с $1 \in R$, которая не является полем, K – поле частных кольца R; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ – элементарная трансвекция, где $e = e_n$ – единичная матрица порядка n, e_{ij} – матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули, $\alpha \in K$; $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ – коммутатор элементов a, b; $t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \ \alpha \in A\}$;

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\rangle$$

– элементарная сетевая группа, определенная для элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$.

Не умаляя общности, мы считаем, что $J = \{1, 2, \ldots, m\}$, $2 \leqslant m \leqslant n-1$.

Рассмотрим в R (и зафиксируем) произвольный необратимый элемент $x \in R \setminus R^*$ (в этом случае цепочка главных идеалов $(x) \supset (x^2) \supset (x^3) \ldots$ является строго убывающей).

2. Построение общей трансвекции на позициях множества $J = \{1, 2, \ldots, m\}$ из внешних позиций. Пусть $2 \leqslant m \leqslant n-1$, $\alpha_i, \beta_i \in K$, причем $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_m\beta_m = 0$, тогда для

$$a = t_{1n}(\alpha_1) \cdot \ldots \cdot t_{mn}(\alpha_m), \quad b = t_{n1}(\beta_1) \cdot \ldots \cdot t_{nm}(\beta_m),$$

мы имеем

$$[a,b]=\mathrm{diag}(A, e_{n-m}), \ A = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \ldots & \alpha_1\beta_m \\ \alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & \ldots & \alpha_2\beta_m \\ . & . & \ldots & . \\ \alpha_m\beta_1 & \alpha_m\beta_2 & \ldots & 1+\alpha_m\beta_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

– общая трансвекция.

3. Построение элементарной сети и формулировка результата. Для главных идеалов $(x) = xR$, $(x^2) = x^2R$ мы рассматриваем неприводимую, дополняемую (в частности, замкнутую) элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$: $(2 \leqslant m \leqslant n-1)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & (x^2) & \ldots & (x^2) & (x) & \ldots & (x) \\ (x^2) & * & \ldots & (x^2) & (x) & \ldots & (x) \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ (x^2) & (x^2) & \ldots & * & (x) & \ldots & (x) \\ (x) & (x) & \ldots & (x) & * & \ldots & (x) \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . & \\ (x) & (x) & \ldots & (x) & (x) & \ldots & * \end{pmatrix} \quad (3)$$

для которой $\sigma_{ij} = (x^2)$ при $i, j \leqslant m$ и $\sigma_{ij} = (x)$ если $i > m$, или $j > m$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть R – коммутативная область целостности с $1 \in R$, $2 \leqslant m \leqslant n-1$. Для построенной элементарной сети (3) мы имеем*

$$E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K) : \ \ i, j \in J, \ i \neq j \rangle \neq \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \ \ i, j \in J, \ i \neq j \rangle. \quad (4)$$

Точнее, левая часть формулы (1) не содержится в правой.

$\lhd$ Рассмотрим два случая, когда $|J| = m$ четно и когда $|J| = m \geqslant 3$ нечетно.

а) $|J| = m$ четно. В (2) положим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = x, \quad \beta_1 = x, \; \beta_2 = -x$$
$$\beta_3 = x, \; \beta_4 = -x, \ldots \beta_{m-1} = x, \; \beta_m = -x.$$

Тогда матрица $[a, b]$ из (2) имеет вид

$$[a, b] = \mathrm{diag}(c, e_{n-m}), \quad c = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x^2 & x^2 & \ldots & -x^2 \\ x^2 & 1-x^2 & x^2 & \ldots & -x^2 \\ x^2 & -x^2 & 1+x^2 & \ldots & -x^2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ x^2 & -x^2 & x^2 & \ldots & 1-x^2 \end{pmatrix}.$$

По построению матрица $[a, b]$ содержится в элементарной группе $E(\sigma)$. С другой стороны, у нас $J = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad 2 \leqslant m \leqslant n-1$, а потому $\langle t_{ij}(K) : \quad i, j \in J, \; i \neq j \rangle = \mathrm{diag}(\mathrm{SL}(m, K), e_{n-m})$. Следовательно,

$$c \in \mathrm{SL}(m, K), \; [a, b] \in \langle t_{ij}(K) : \quad i, j \in J, \; i \neq j \rangle$$
$$\Longrightarrow [a, b] \in E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K) : \quad i, j \in J, \; i \neq j \rangle.$$

Для доказательства теоремы нам нужно показать, что матрица $[a, b]$ не содержится в правой части формулы (4). Действительно, предположим, что

$$[a, b] \in \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \quad i, j \in J, \; i \neq j \rangle, \quad J = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Тогда

$$c \in E(\tau), \quad \tau = \begin{pmatrix} * & (x^2) & \ldots & (x^2) \\ (x^2) & * & \ldots & (x^2) \\ . & . & \ldots & . \\ (x^2) & (x^2) & \ldots & * \end{pmatrix}.$$

Заметим, что сеть идеалов τ порядка m является дополняемой и мы можем дополнить ее диагональ идеалом (x^4). Будем обозначать последнюю (полную) сеть также через τ:

$$\tau = \begin{pmatrix} (x^4) & (x^2) & \ldots & (x^2) \\ (x^2) & (x^4) & \ldots & (x^2) \\ . & . & \ldots & . \\ (x^2) & (x^2) & \ldots & (x^4) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы имеем $c \in E(\tau) \subseteq G(\tau)$ ($G(\tau)$ – сетевая группа, соответствующая (полной) сети τ). Но тогда $c \in G(\tau)$, а потому (в силу вида матрицы c)

$$x^2 \in (x^4) \Longrightarrow (x^2) \subseteq (x^4) \Longrightarrow (x^2) = (x^4).$$

Последнее равенство противоречит выбору элемента x из кольца R ($x \in R \backslash R^*$). Таким образом, включение $[a, b] \in \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) \,:\, i, j \in J,\ i \neq j\rangle$ невозможно. На этом навершается рассмотрение случая a) четного m.

b) $|J| = m$ нечетно. Следовательно, $m = 2t + 1 \geqslant 3$, тогда $m - 1 = 2t \geqslant 2$. Будем действовать аналогично уже рассмотренному пункту a). В формуле (2) положим

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = x, \alpha_m = 0, \quad \beta_1 = x,\ \beta_2 = -x, \\ &\beta_3 = x, \ldots \beta_{m-1} = -x,\ \beta_m = 0. \end{aligned}$$

Тогда матрица $[a, b]$ из (2) имеет вид

$$[a, b] = \operatorname{diag}(c, e_{n-m}), \quad c = \begin{pmatrix} 1 + x^2 & -x^2 & \ldots & -x^2 & 0 \\ x^2 & 1 - x^2 & \ldots & -x^2 & 0 \\ . & . & \ldots & . & \\ x^2 & -x^2 & \ldots & 1 - x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c – матрица порядка $m,\ 3 \leqslant m \leqslant n - 1$).

По построению матрица $[a, b]$ содержится в элементарной группе $E(\sigma)$. С другой стороны, у нас $J = \{1, 2, \ldots, m\}$, $2 \leqslant m \leqslant n - 1$, а потому $\langle t_{ij}(K) \,:\, i, j \in J,\ i \neq j\rangle = \mathrm{SL}(m, K)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &c \in \mathrm{SL}(m, K), \quad [a, b] \in \langle t_{ij}(K) \,:\, i, j \in J,\ i \neq j\rangle \\ &\qquad \Longrightarrow [a, b] \in E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K) \,:\, i, j \in J,\ i \neq j\rangle. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы нам нужно показать, что матрица $[a, b]$ не содержится в правой части формулы (4). Это доказательство дословно повторяет соответствующую часть доказательства для случая a) четного m. $\triangleright$

Список литературы

1. *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп.* Новосибирск. 2010. Издание 17-е.
2. Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев, *Разложение элементарной трансвекции в элементарной группе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 33–41.

3. В. А. Койбаев, *К вопросу об обобщенных конгруэнц-подгруппах.* — Журнал СФУ **11**, No. 1 (2018).
4. З. И. Боревич, *О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 22–31.
5. В. М. Левчук, *Замечание к теореме Л. Диксона.* — Алгебра и логика, **22**, No. 5 (1983), 504–517.
6. В. А. Койбаев, *Элементарные сети в линейных группах,* — Труды ин-та мат. и мех. УрО РАН **17**, no. 4 (2011), 134–141.
7. В. А. Койбаев, Я. Н. Нужин, *Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца.* — Фунд. и прикл. мат. **18**, No. 1 (2013), 75–84.

Koibaev V. A. On a question about generalized congruence subgroups. I.

A system of additive subgroups $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of a field (or ring) K is called a net of order n over K if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all values of the indices i, r, j. The same system, but without the diagonal, is called an elementary net. A full or elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ is called irreducible if all additive subgroups σ_{ij} are different from zero. An elementary net σ is closed if the subgroup $E(\sigma)$ does not contain new elementary transvections. This work is related to the question posed by Y. N. Nuzhin in connection with the question of V. M. Levchuk 15.46 from the Kourovka notebook about the admissibility (closedness) of the elementary net (carpet) $\sigma = (\sigma_{ij})$ over a field K. Let J be an arbitrary a subset of the set $\{1, \dots, n\}$, $n \geqslant 3$, we assume that the number $|J| = m$ of elements of the set J satisfies the condition $2 \leqslant m \leqslant n - 1$. Let R be a commutative integral domain (non-field) $1 \in R$, K be the quotient field of a R. We give an example of a net $\sigma = (\sigma_{ij})$ of order n over a field K, for which the group $E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K) : i, j \in J\rangle$ is not contained in the group $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \ i, j \in J\rangle$.

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
ул. Ватутина, 46
362025, Владикавказ, Россия
Южный математический институт ВНЦ РАН
ул. Маркуса, 27
362027, Владикавказ, Россия
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru

Поступило 17 января 2018 г.