Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 470, 2018 г.

Е. А. Егорченкова, Н. Л. Гордеев

ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОММУТАТОРОВ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ТЕЛОМ

Введение

Пусть G – группа, и пусть $w = w(x_1, \dots, x_m)$ – нетривиальное слово от m переменных. Тогда можно определить соответствующее вербальное отображение $\widetilde{w} : G^m \to G$ формулой

$$\widetilde{w}((g_1, \dots, g_m)) := w(g_1, \dots, g_m).$$

Интерес к исследованию вербальных отображений возрастает в последние несколько лет. Особый интерес представляет случай $G = \mathcal{G}(K)$, где $\mathcal{G}$ – простая или полупростая алгебраическая группа, определенная над полем K (см. ссылки в [9–11]). Почти все результаты в этом направлении были доказаны для случаев, когда K – алгебраически замкнутое поле или когда $\mathcal{G}$ расщепима над K, или $\mathcal{G}$ анизотропна над K. Здесь мы рассматриваем случай изотропной, но нерасщепимой формы $\mathcal{G}$ группы SL_{cn}. А именно, пусть D – тело над своим центром K с индексом $c > 1$ и пусть $\mathrm{GL}_n(D)$ – группа обратимых $n \times n$ матриц над D. Далее, пусть

$$\mathrm{SL}_n(D) = \{d \in \mathrm{GL}_n(D) \mid \mathrm{Nrd}\, d = 1\},$$

где $\mathrm{Nrd}\, d$ – редуцированная норма d (заметим, что эти обозначения совпадают с обозначениями из [16, 17], но не совпадают с обозначениями из [1], где $\mathrm{SL}_n(D)$ – множество матриц с единичным определителем). Тогда существует такая форма $\mathcal{G}$ группы SL_{cn}, что

$$\mathcal{G}(K) = \mathrm{SL}_n(D).$$

Более того, каждая "внутренняя форма" группы SL над K является группой такой формы для подходящего тела D ([16, §2.3, предложение 17]). Подгруппу $\mathcal{G}^+(K)$, порожденную унипотентными элементами $\mathcal{G}(K)$, мы обозначаем $E_n(D)$. Это группа, порожденная трансвекциями

Ключевые слова: коммутаторы, коммутаторная длина, полная линейная группа, тела.

Исследования второго автора проводились при финансовой поддержке Министерства Науки и Образования, проект 1.661.2016/1.4.

группы $\mathrm{GL}_n(D)$. Группа $E_n(D)/Z(E_n(D))$ является простой ([1, теорема 4.10]; здесь K – это бесконечное поле, потому что $c > 1$) и

$$E_n(D) \trianglelefteq \mathcal{G}(K) = \mathrm{SL}_n(D), \quad \mathrm{SL}_n(D)/E_n(D) \approx \mathrm{SL}_1(D)/[D^*, D^*] \qquad (1)$$

([16, §7.2]).

Здесь мы рассматриваем вербальное отображение $\widetilde{w} : \mathrm{GL}_n(D)^{2k} \to E_n(D)$, где $w = \prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i]$.

Сюръективность вербальных отображений $w = [x, y]$ для разных типов групп имеет долгую историю (см. [6, 14]). Сюръективность $w = [x, y]$ для расщепимой (или квазирасщепимой) группы $\mathcal{G}^+(K)$ (точнее, для $\mathcal{G}^+(K)/Z(\mathcal{G}^+(K)))$ можно доказать (во всяком случае, для больших полей, см. [6]) с помощью метода под названием “разложение Гаусса с заданной полупростой частью”. Это разложение было описано для различных случаев ([4, 7, 8, 12, 15, 18]). В случае расщепимой (или квазирасщепимой) группы $\mathcal{G}$ этот метод основан на возможности для каждого нецентрального класса сопряженности C группы $\mathcal{G}^+(K)$ найти представитель $g \in C$ с разложением Гаусса $g = vhu$ с любым элементом $h \in \mathcal{T} \cap \mathcal{G}^+(K)$, где $\mathcal{T}$ – фиксированный максимальный расщепимый (квазирасщепимый) тор $\mathcal{G}$ и $u, v \in \mathcal{G}^+(K)$ – элементы из унипотентных радикалов фиксированной подгруппы Бореля $\mathcal{B}$ (содержащей $\mathcal{T}$) и противоположной подгруппы Бореля $\mathcal{B}^-$. Здесь мы рассматриваем аналогию с разложением для изотропной, но нерасщепимой группы $E_n(D)$, заменяя расщепимый тор группой диагональных матриц. Тем не менее, в этом случае у нас есть некая “неопределенность”, связанная с некоммутативностью D. А именно, элемент h можно задать “с точностью до” множителя из $[D^*, D^*]$ (см. теорему 2.1). Таким образом, мы не можем использовать метод “разложения Гаусса с заданной полупростой частью” в том же виде, что и в случае расщепимых групп. Но мы можем доказать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $w = \prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i]$ *и пусть*

$$\widetilde{w} : D^{*2k} \to D^*$$

– соответствующее вербальное отображение. Далее, пусть

$$\widetilde{w} : \mathrm{GL}_n(D)^{2k} \to E_n(D)$$

– вербальное отображение на $\mathrm{GL}_n(D)$*, соответстующее тому же слову* w*. Предположим, что* $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$*. Тогда* $\widetilde{w}(\mathrm{GL}_n(D)^{2k}) \supset E_n(D) \setminus Z(E_n(D))$*. Если к тому же* $n > 2$*, тогда*

$$\widetilde{w}(E_n(D)^{2k}) \supset E_n(D) \setminus Z(E_n(D)).$$

В частности, если каждый элемент из $[D^*, D^*]$ *является коммутатором элементов из* D^**, тогда каждый нецентральный элемент из* $E_n(D)$ *является коммутатором элементов из* $E_n(D)$*.*

Так как любой элемент z группы $Z(E_n(D))$ можно представить как произведение двух нецентральных элементов $g \in E_n(D) \setminus Z(E_n(D))$ и $g^{-1}z$, то из теоремы 1 получаем:

Следствие 1. *Если* $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$ *для* $w = \prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i]$*, то*

$$\widetilde{\omega}(\mathrm{GL}_n(D)^{4k}) = E_n(D)$$

для $\omega = \prod_{i=1}^{2k} [x_i, y_i]$*. При этом,*

$$\widetilde{\omega}(E_n(D)^{4k}) = E_n(D),$$

если $n > 2$*.*

Если любой нецентральный элемент группы $E_n(D)$ является произведением k коммутаторов, то любой неединичный элемент группы $E_n(D)/Z(E_n(D))$ является произведением k коммутаторов (действительно, образ $w(g_1, \ldots, g_m)$ в $E_n(D)/Z(E_n(D))$ совпадает с элементом $w(\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m)$, где $\bar{g}_i$ – это образ элемента $g_i \in E_n(D)$ в $E_n(D)/Z(E_n(D))$). Единичный элемент также является произведением k коммутаторов (например, коммутирующих элементов). Таким образом, получаем из теоремы 1:

Следствие 2. *Если* $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$ *для* $w = \prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i]$ *и* $n > 2$*, то*

$$\widetilde{w}((E_n(D)/Z(E_n(D)))^{2k}) = E_n(D)/Z(E_n(D)).$$

Если мы обозначим через $l_{D^*}([D^*, D^*])$ коммутаторную длину группы $[D^*, D^*]$ в D^*, а через $l(E_n(D)/Z(E_n(D)))$ – коммутаторную длину группы $E_n(D)/Z(E_n(D))$, тогда следствие 2 дает нам следующее неравенство

$$l(E_n(D)/Z(E_n(D))) \leqslant l_{D^*}([D^*, D^*]) \quad (n > 2). \tag{2}$$

Вопрос о представлении любого нецентрального элемента простой группы $E_n(D)/Z(E_n(D))$ в виде единственного коммутатора остается открытым.

Обозначения.

$C_G(g)$ – централизатор элемента $g \in G$ группы G;

$Z(G)$ – центр группы G.

Ниже D является телом над полем K (здесь K – центр D); далее мы предполагаем, что $\dim_K D < \infty$; мы предполагаем здесь $D \neq K$ и, следовательно, K – бесконечное поле;

$\overline{K}$ – алгебраическое замыкание K;

$D^* = D \setminus \{0\}$ – мультипликативная группа D;

$[D^*, D^*]$ – коммутаторная подгруппа D^* (для любой группы G мы обозначаем через $[G, G]$ коммутаторную подгруппу);

c – индекс D (следовательно, у нас есть вложение $i : D \to \mathrm{M}_c(K_s)$).

I_n – единичная матрица в $\mathrm{GL}_n(D)$;

$\mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n)$ – диагональная матрица из $\mathrm{GL}_n(D)$;

$t_{ij}(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(D)$ – (ij)-трансвекция;

$E_n(D) = \langle t_{ij}(\lambda) \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\, \lambda \in D\rangle$.

Здесь $\det : \mathrm{GL}_n(D) \to D^*/[D^*, D^*]$ – определитель в смысле [1]. Отметим,

$$E_n(D) = \mathrm{Ker}\det, \quad E_n(D) = [\mathrm{GL}_n(D), \mathrm{GL}_n(D)] \tag{3}$$

([1, IV, §1, теоремы 4.3 и 4.7]; заметим, что обозначения в [1] отличаются от обозначений в этой статье, а именно, $E_n(D)$ в [1] обозначается через $\mathrm{SL}_n(D)$).

Отметим еще раз, что $E_n(D)/Z(E_n(D))$ – простая группа ([1, теорема 4.10]).

Здесь $U, U^- \leqslant \mathrm{GL}_n(D)$ – группа верхних и соответственно нижних треугольных матриц с единицами на диагонали; заметим, что $U, U^- \leqslant E_n(D)$.

§1. Предварительные сведения

Некоторые матричные формулы в $\mathrm{GL}_n(D)$.

Ниже мы будем использовать следующие известные факты о матрицах над D (тем не менее, мы не можем дать подходящие ссылки).

Лемма 1.1. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ a_{21} & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ a_{n1} & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & X & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix},$$

где $X, Y \in \mathrm{GL}_{n-1}(D), s \in D^*, a_{1i}, a_{j1} \in D$. *Тогда*

$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ b_{21} & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ b_{n1} & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & YXY^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix},$$

где

$$(b_{12}, \dots, b_{1n}) = (a_{12}, \dots, a_{1n})Y^{-1}, \quad \begin{pmatrix} b_{21} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Это можно доказать с помощью тех же вычислений, что и в случае коммутативного кольца. □

В тех же обозначениях, что и в лемме 1.1, имеем

Лемма 1.2. *Пусть* $n \geqslant 3$. *Пусть* $a_{i1} \neq 0$ *для некоторых* $i = 2, \dots, n$. *Тогда существует такая матрица* $M \in E_n(D)$ (*в лемме* 1.1), *что*

$$\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $a_{i1} \neq 0$ для некоторых i. Поскольку все ненулевые векторы m-мерного линейного пространства над D лежат в одной орбите группы $\mathrm{GL}_m(D)$, мы можем найти такую матрицу $Y \in E_{n-1}(D)$, что

$$\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $q \in D^*$. □

Группа $\mathrm{GL}_n(D)$ *как группа* K*-точек алгебраической группы.*

Существуют редуктивная алгебраическая группа $\widetilde{\mathcal{G}}$ и простая алгебраическая группа $\mathcal{G}$ типа A_{cn-1}, определенные над полем K таким образом, что

$$\widetilde{\mathcal{G}}(K)=\mathrm{GL}_n(D),\ \ \widetilde{\mathcal{G}}(\overline{K})=\mathrm{GL}_{cn}(\overline{K}),\ \ \mathcal{G}(K)=\mathrm{SL}_n(D),\ \ \mathcal{G}(\overline{K})=\mathrm{SL}_{cn}(\overline{K})$$

(см. [17, 12.3.8], [16, §2.3]).

Лемма 1.3. *Группа* $[\mathrm{GL}_n(D), \mathrm{GL}_n(D)]$ *плотна в алгебраической группе* $\mathcal{G}$ *(здесь не исключается случай* $n = 1$*). В частности, группа* $[D^*, D^*]$ *плотна в* $\mathrm{SL}_c(\overline{K})$*.*

Доказательство. Пусть $w = [x, y]$ и пусть $\widetilde{w} : \widetilde{\mathcal{G}} \times \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ – соответствующее вербальное отображение (отметим, что любой коммутатор в группе GL_{cn} принадлежит $\mathcal{G} = \mathrm{SL}_{cn}$). Так как ограничение $\widetilde{w}$ на $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ является доминантным вербальным отображением (в соответствии с теоремой Бореля [3]), то $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}} = \mathcal{G}$. Далее, $\widetilde{\mathcal{G}}(K) = \mathrm{GL}_n(D)$ – плотная подгруппа в $\widetilde{\mathcal{G}}$ ([2, 18.3]). Следовательно, группа $\mathrm{GL}_n(D) \times \mathrm{GL}_n(D)$ плотна в $\widetilde{\mathcal{G}} \times \widetilde{\mathcal{G}}$ и, более того, $\widetilde{w}(\mathrm{GL}_n(D) \times \mathrm{GL}_n(D))$ – плотное подмножество в $\mathcal{G}$. Но

$$\begin{aligned}&\widetilde{w}(\mathrm{GL}_n(D) \times \mathrm{GL}_n(D))\\ &\qquad = \{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_n(D)\} \subset [\mathrm{GL}_n(D), \mathrm{GL}_n(D)]. \qquad \square\end{aligned}$$

§2. Разложение Гаусса с заданной полупростой частью

Теорема 2.1. *Пусть* $n \geqslant 2$*, и пусть* $s_1, \ldots, s_{n-1} \in D^*$*. Тогда для любого нецентрального элемента* $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ *существуют такие элементы* $s_n \in D^*, \gamma \in E_n(D), v \in U^-, u \in U$*, что*

$$\gamma A \gamma^{-1} = vhu,$$

где $h = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n)$*.*

Доказательство. *Случай* $n = 2$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Мы можем считать, что $c \neq 0$. (В противном случае группа

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in D^*, b \in D \right\}$$

нормализуется в $\mathrm{GL}_n(D)$ подгруппой $E_n(D)$ (см. [1], теорема 4.9)). Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & (s_1-a)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(s_1-a)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ** & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ** \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай $n > 2$. Предположим, что утверждение теоремы выполняется для группы $\mathrm{GL}_{n-1}(D)$. Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ – нецентральная матрица. Используя те же аргументы, что и в случае $n = 2$, и леммы 1.1, 1.2, мы можем предполагать, что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ q & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & X & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \tag{4}$$

для некоторого $q \in D^*$.

Мы можем считать, что $X \notin Z(\mathrm{GL}_{n-1}(D))$. Действительно, пусть $X = \alpha I_{n-1}$ для некоторого $\alpha \in K$. Тогда мы можем рассмотреть матрицу $t_{13}(1)At_{13}(-1)$ вместо A. Имеем

$$t_{13}(1)At_{13}(-1) = \left(t_{13}(1) \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ q & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} t_{13}(-1) \right)$$
$$\times \left(t_{13}(1) \begin{pmatrix} s_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & \alpha I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} t_{13}(-1) \right) \left(t_{13}(1) \begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} t_{13}(-1) \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & - & \cdots & - \\ q & | & & & & \\ 0 & | & & & & \\ \cdots & & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix} t_{23}(-q) \begin{pmatrix} s_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & \alpha I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} t_{13}(s_1^{-1}(\alpha - s_1))$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ q & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & X' & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix},$$

где $X' \in \mathrm{GL}_{n-1}(D)$ – матрица с ненулевым элементом x'_{12}. Таким образом, $X' \notin Z(\mathrm{GL}_{n-1}(D))$ и, следовательно, мы можем предполагать $X = X' \notin Z(GL_{n-1}(D))$.

По предположению индукции существует матрица $Y \in E_{n-1}(D)$ такая, что

$$YXY^{-1} = V_1 \operatorname{diag}(s_2, \dots, s_{n-1}, s_n) U_1 \tag{5}$$

для некоторой нижней треугольной матрицы $V_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(D)$ и верхней треугольной матрицы $U_1 \in GL_{n-1}(D)$ с единицами на главных диагоналях и некоторого $s_n \in D^*$. Теперь утверждение следует из леммы 1.1 и (4), (5). □

Замечание 2.2. В теореме 2.1 мы можем взять $A \in \mathrm{SL}_n(D)$ или $A \in E_n(D)$. Следовательно, у нас есть матрица $\gamma A \gamma^{-1}$ с заданной полупростой частью (с точностью до элемента s_n) в разложении Гаусса также и в группе $\mathrm{SL}_n(D)$ (соответственно, в $E_n(D)$).

Замечание 2.3. В случае, когда D – поле, элемент s_n однозначно определяется формулой $s_n = (\det A)(s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^{-1}$. В случае когда D – не поле, мы также имеем $s_1 s_2 \cdots s_n = \det A$, но $\det A \in D^*/[D^*, D^*]$ и, следовательно, последний элемент s_n определен с точностью до элемента из $[D^*, D^*]$. Это является препятствием к доказательству того, что каждый нецентральный элемент из $E_n(D)$ – это единственный коммутатор. Таким образом, остается открытым вопрос о том, является ли любой нецентральный элемент из $E_n(D)$ единственным коммутатором, также как и вопрос о том, верно ли, что $E_n(D) \setminus Z(E_n(D)) \subset C_1 C_2$ для любых двух "общих" классов сопряженности.

В конце этого раздела мы дадим пример, показывающий трудности с последним элементом s_n в разложении Гаусса.

Пусть $n = 2$, и пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad 1 \neq s \in [D^*, D^*].$$

Тогда $A \in E_2(D)$ (см. [1], теорема 4.2).

Покажем, что среди элементов класса сопряженности A нет элементов из $U^- U$ (то есть, нет элементов, имеющих разложение Гаусса с полупростой частью $h = 1$). Пусть

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(D).$$

Если $a \neq 0$, то $\det A = ad - aca^{-1}b(\mathrm{mod}[D^*, D^*])$ ([1, IV, §1]). Тогда $\delta := d - ca^{-1}b \neq 0$. Легко проверить, что

$$M^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} (1 + a^{-1}b\delta^{-1}c)a^{-1} & -a^{-1}b\delta^{-1} \\ -\delta^{-1}ca^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix}, & \text{если } a \neq 0, \\ \\ \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Предположим, что $a \neq 0$ и матрица MAM^{-1} имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ (то есть, в левом верхнем углу имеем 1). Тогда

$$\begin{aligned} MAM^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + a^{-1}b\delta^{-1}c)a^{-1} & -a^{-1}b\delta^{-1} \\ -\delta^{-1}ca^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & bs \\ c & ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + a^{-1}b\delta^{-1}c)a^{-1} & -a^{-1}b\delta^{-1} \\ -\delta^{-1}ca^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a \times (1 + a^{-1}b\delta^{-1}c)a^{-1} - bs \times \delta^{-1}ca^{-1} = 1 \Leftrightarrow 1 + b\delta^{-1}ca^{-1} - bs\delta^{-1}ca^{-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow b(1 - s)\delta^{-1}ca^{-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \text{или} \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow MAM^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & dsd^{-1} \end{pmatrix} \\ \text{или} \\ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & dsd^{-1} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Предположим, что $a = 0$ и матрица MAM^{-1} имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} MAM^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & bs \\ c & ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \Rightarrow bsb^{-1} = 1 \Rightarrow s = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что мы не можем получить элемент из класса сопряженности A с разложением Гаусса vu, где $v \in U^-, u \in U^+$.

§3. D-расщепимые и D-регулярные элементы из $\mathrm{GL}_n(D)$

Пусть H – множество диагональных матриц из $\mathrm{GL}_n(D)$.

Определение 3.1. Элемент $g \in \mathrm{GL}_n(D)$ называется D-расщепимым, если g подобен диагональной матрице.

Замечание 3.2. Если элемент $g \in E_n(D)$ подобен диагональной матрице, то g является $E_n(D)$-сопряженным с диагональной матрицей. Действительно, положим $SgS^{-1} \in H$ для некоторого $S \in \mathrm{GL}_n(D)$. Тогда $S = S_d S_1$, где $S_d \in H$ и $S_1 \in E_n(D)$ (см. [1], теорема 4.1). Тогда $S_1 g S_1^{-1} = S_d^{-1}(SgS^{-1})S_d \in H$.

Определение 3.3. Элемент $g \in \mathrm{GL}_n(D)$ называется D-регулярным, если он подобен некоторому элементу $h \in H$, для которого

$$C_{\mathrm{GL}_n(D)}(h) \leqslant H.$$

Предложение 3.4. *Матрица $h = \mathrm{diag}(s_1, \cdots s_n)$ является D-регулярным элементом тогда и только тогда, когда любые два элемента $s_i, s_j \in D^*$, где $i \neq j$, не сопряжены в D^*.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathrm{GL}_n(D)$, и пусть x_{ij} – (ij)-элемент матрицы X. Тогда (ij)-элемент матрицы hXh^{-1} равен $s_i x_{ij} s_j^{-1}$. Следовательно,

$$x_{ij} = s_i x_{ij} s_j^{-1} \Leftrightarrow x_{ij} s_j x_{ij}^{-1} = s_i. \qquad \square$$

Отметим, что вложение $K \to D$ индуцирует вложение $j : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(D)$. Очевидное следствие из предложения 3.4 следующее:

Следствие 3.5. *Пусть $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ – расщепимый полупростой элемент. Тогда*

$$j(g) \text{ – D-}\textit{регулярный} \Leftrightarrow g \text{ – }\textit{регулярный}.$$

§4. Фильтрация групп U, U^-

Имеем $U = \langle t_{ij}(\lambda) \mid \lambda \in D, i < j\rangle$. Для всех пар $i < j, p < q$

$$[t_{ij}(\lambda), t_{pq}(\mu)] = \begin{cases} I_n, & \text{если } j \neq p \text{ и } i \neq q, \\ t_{iq}(\lambda\mu), & \text{если } j = p, \\ t_{pj}(-\mu\lambda), & \text{если } i = q, \end{cases}$$

(см. [13], 1.2.C.). Тогда группы

$$U_k = \langle t_{ij}(\lambda) \mid \lambda \in D, j - i \geqslant k\rangle$$

являются нормальными подгруппами U и $U_{k+1} \leqslant U_k$ для всех k. Более того, для всех пар целых чисел $1 \leqslant p < q \leqslant n$

$$U_{q-1}/U_q \leqslant Z(U_p/U_q). \tag{6}$$

Также, каждая подгруппа U_k нормализуется подгруппой H.

Предложение 4.1. *Пусть $h \in H$ – D-регулярный элемент. Тогда для каждого элемента $u \in U$ существует такой элемент $u' \in U$, что $u = [h, u']$.*

Доказательство. Пусть

$$h = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Так как h – D-регулярный элемент, то

$$ht_{ij}(\lambda)h^{-1} = t_{ij}(s_i \lambda s_j^{-1}) \neq t_{ij}(\lambda), \quad \text{если} \quad \lambda \neq 0.$$

Следовательно,

$$[h, t_{ij}(\lambda)] = t_{ij}(s_i \lambda s_j^{-1} - \lambda) \neq I_n.$$

Далее, для каждого элемента $\mu \in D$ можно найти такой элемент $\lambda \in D$, что $\mu = s_i \lambda s_j^{-1} - \lambda$. (Действительно, отображение $F : X \to s_i X s_j^{-1} - X$ является K-линейным оператором на K-линейном пространстве D (мы предполагаем, что $\dim_K D < \infty$). Так как $s_i X s_j^{-1} - X = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$, оператор F обратим). Следовательно, для каждого элемента $\mu \in D$ существует такой элемент $\lambda \in D$, что

$$[h, t_{ij}(\lambda)] = t_{ij}(\mu). \tag{7}$$

Рассмотрим группу U_k. Имеем

$$U_k = \langle t_{1\ k+1}(\lambda_1), t_{2\ k+2}(\lambda_2), \ldots, t_{n-k,n}(\lambda_k)\rangle U_{k+1}.$$

Более того, группа U_k/U_{k+1} – абелева и порождается

$$t_{i,k+i}(\lambda_i) (\operatorname{mod} U_{k+1}).$$

Из (7) следует, что для каждого $u \in U_k/U_{k+1}$ существует такой элемент $u' \in U_k/U_{k+1}$, что $[h, u'] = u$. Предположим, что то же верно и для каждой факторгруппы U_k/U_l, где $l - k < m$, и докажем, что результат верен для любой факторгруппы U_p/U_q, где $q - p = m$. По предположению индукции для каждого $u \in U_p/U_q$ существует такой элемент $u' \in U_p/U_q$, что

$$[h, u'] \equiv u (\operatorname{mod} U_{q-1}) \Leftrightarrow [h, u']u_1 = u \ \text{ для некоторого } \ u_1 \in U_{q-1}/U_q.$$

С другой стороны, $u_1 = [h, u'']$ для некоторого $u'' \in U_{q-1}/U_q$. Так как $U_{q-1}/U_q \leqslant Z(U_p/U_q)$ (см. (6)), имеем

$$[h, u']u_1 = [h, u'][h, u''] \Rightarrow u = [h, u'u''].$$

Таким образом, получаем наше утверждение индукцией по $p - q$. $\square$

§5. Доказательство теоремы 1.

Лемма 5.1. *Пусть $s \in D^*$. Тогда существуют такие элементы $s_1, \dots, s_{n-1} \in D^*$, что*

$$h = \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_{n-1}, s) \in E_n(D)$$

и h – D-регулярный элемент. Более того, если $n > 2$ и $s \neq 1$, то можно выбрать элементы $s_1, \dots, s_{n-1} \in D^*$ так, чтобы $s_1 = 1$.

Доказательство.

Шаг 5.2. *Пусть $s \in D^*$, тогда* $\mathrm{diag}(s, s^{-1}) \in E_2(D)$.

Доказательство. Рассмотрим цепь умножений на трансвекции

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ s & s^{-1} \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & s^{-1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ s & s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s^{-2} - s^{-1} \\ s & s^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s^{-2} - s^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_2(D). \end{aligned}$$ $\square$

Напомним, что c здесь – индекс алгебры D. Пусть $\xi(X) = X^c + \chi_1(X)X^{c-1} + \dots + \chi_c(X)$ – характеристический многочлен $X \in \mathrm{GL}_c(\overline{K})$, и пусть

$$\pi : \mathrm{GL}_c(\overline{K}) \to A^c_{\overline{K}}, \quad \pi(X) := (\chi_1(X), \dots, \chi_c(X))$$

– морфизм в c-мерное аффинное пространство $A^c_{\overline{K}}$ (здесь мы рассматриваем $\mathrm{GL}_c(\overline{K})$ и $A^c_{\overline{K}}$ как аффинные алгебраические многообразия над $\overline{K}$; см. [17]). Далее, у нас есть вложения $D^* \leqslant \mathrm{GL}_c(\overline{K})$ и $[D^*, D^*] \leqslant \mathrm{SL}_c(\overline{K})$.

Шаг 5.3. *Для каждого $r \in D^*$ множество $\pi(r[D^*, D^*])$ плотно в $\pi(r\mathrm{SL}_c(\overline{K}))$.*

Доказательство. Так как множество $[D^*, D^*]$ плотно в $\mathrm{SL}_c(\overline{K})$ (лемма 1.3) и так как отображение $X \to rX$ является морфизмом $\mathrm{GL}_c(\overline{K})$, то $r[D^*, D^*]$ плотно в $r\mathrm{SL}_c(\overline{K})$ и, следовательно, $\pi(r[D^*, D^*])$ плотно в $\pi(r\mathrm{SL}_c(\overline{K}))$. □

Шаг 5.4. *Для каждого $r \in D^*$ существует бесконечно много классов сопряженности D^*, пересекающихся с множеством $r[D^*, D^*]$.*

Доказательство. Для каждой матрицы $X \in r\mathrm{SL}_c(\overline{K})$ только коэффициент $\chi_c(X)$ определен (а именно, $\chi_c(X)$ – определитель r как матрицы в $\mathrm{GL}_c(\overline{K})$). У других коэффициентов могут быть любые наборы значений. Так как $\pi(r[D^*, D^*])$ плотно в $\pi(r\mathrm{SL}_c(\overline{K}))$, мы можем получить бесконечно много матриц в множестве $r[D^*, D^*]$ с различными наборами значений функций $\chi_1, \dots, \chi_{c-1}$ и, следовательно, мы можем получить бесконечно много элементов множества $r[D^*, D^*]$ из различных классов сопряженности $\mathrm{GL}_c(\overline{K})$ и, поэтому, из различных классов сопряженности D^*. □

Теперь мы можем завершить доказательство леммы. Согласно шагу 5.4 существует элемент $s' = s^{-1}t$, где $t \in [D^*, D^*]$, такой, что s', s принадлежат различным классам сопряженности D^*. Тогда

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}}_{\in E_2(D)} \underbrace{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in E_2(D)} = \begin{pmatrix} s^{-1}t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in E_2(D).$$

Более того, матрица $\mathrm{diag}(s', s)$ является D-регулярной. Теперь положим $s_{n-1} = s'$. Снова, согласно шагу 5.4, мы можем найти элементы $s_1, \dots, s_{n-2} \in [D^*, D^*]$ из различных классов сопряженности, не принадлежащих классам сопряженности s_{n-1}, s. Таким образом,

$$h := \mathrm{diag}(s_1, \dots, \underbrace{s_{n-1}}_{=s'}, s) \in E_n(D).$$

Более того, если $n > 2$ и $s \neq 1$, то можно выбрать элементы $s_{n-1} = s' \neq 1, \dots, s_2 \neq 1, s_1 = 1$. □

Теперь мы можем доказать теорему.

Пусть $g \in E_n(D) \setminus Z(E_n(D))$. Этот элемент $E_n(D)$-сопряжен элементу

$$g' = vhu,$$

где $h = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, r)$ для некоторого $r \in D^*$ и $v \in U^-, u \in U$ (теорема 2.1). Так как $\det h = 1(\mathrm{mod}[D^*, D^*])$, имеем $r \in [D^*, D^*]$. Далее, существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in D^*$, что

$$r = [a_1, b_1][a_2, b_2] \ldots [a_k, b_k],$$

где k – целое число из условия теоремы 1. Положим $s := a_1, t = b_1$. Мы можем считать, что $s \neq 1$ (если $a_1 = 1$ имеем $[a_1, b_1] = 1$ и, следовательно, мы можем взять $a_1 = s \neq 1$ и $b_1 = s \neq 1$). Положим

$$\begin{aligned} h' &= \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, sts^{-1}t^{-1}) \\ &= \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, s)\,\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, ts^{-1}t^{-1}). \end{aligned} \tag{8}$$

Далее,

$$h = h' \underbrace{\prod_{i=2}^{k} \mathrm{diag}(1, \ldots 1, [a_i, b_i])}_{=:h''} = h'h''. \tag{9}$$

По (8) и лемме 5.1 имеем D-регулярные элементы

$$\begin{aligned} h_1 &= \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_{n-1}, s), \\ h_2 &= \mathrm{diag}(s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots, s_{n-1}^{-1}, ts^{-1}t^{-1}) \in E_n(D). \end{aligned} \tag{10}$$

Более того, мы можем и будем считать, что $s_1 = 1$, если $n > 2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} &h' = h_1 h_2, \quad h_2 = \tau h_1^{-1} \tau^{-1}, \\ &\text{где} \ \ \tau = \begin{cases} \mathrm{diag}(t^{-1}, 1, \ldots, 1, t), & \text{если} \ \ n > 2, \\ \mathrm{diag}(1, t), & \text{если} \ \ n = 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что

$$\tau \in E_n(D), \quad \text{если} \ \ n > 2 \ \ \text{(согласно шагу 5.2)}. \tag{12}$$

Кроме того, из (9) получаем

$$g' = vhu = vh'h''u = vh' \underbrace{(h''uh''^{-1})}_{=:u' \in U} h'' = \underbrace{vh'u'}_{g''} h''. \tag{13}$$

Согласно предложению 4.1

$$v = v'h_1v'^{-1}h_1^{-1}, \quad h_2^{-1}u''h_2u''^{-1} = u' \tag{14}$$

для некоторых $u'' \in U, v' \in U^-$. Из (11), (13), (14) получаем

$$g'' = \underbrace{v'h_1v'^{-1}h_1^{-1}}_{=v}\underbrace{h_1h_2}_{=h'}\underbrace{h_2^{-1}u''h_2u''^{-1}}_{=u'} = \underbrace{v'h_1v'^{-1}}_{=:x}\underbrace{u''\tau h_1^{-1}\tau^{-1}u''^{-1}}_{=:yx^{-1}y^{-1}} = [x,y].$$

Более того, если $n > 2$, то $x, y \in E_n(D)$ (см. (10), (12)). Таким образом, элемент g'' является единственным коммутатором элементов группы $E_n(D)$, если $n > 2$, или единственным коммутатором элементов группы $\mathrm{GL}_2(D)$, если $n = 2$.

Далее, для любых $i = 2, \dots, k$ положим

$$h_{a_i} = \begin{cases} \mathrm{diag}(1, \dots, 1, a_i^{-1}, a_i), & \text{если} \quad n > 2, \\ \mathrm{diag}(1, a_i), & \text{если} \quad n = 2, \end{cases}$$

$$h_{b_i} = \begin{cases} \mathrm{diag}(b_i^{-1}, 1, \dots, 1, b_i), & \text{если} \quad n > 2, \\ \mathrm{diag}(1, b_i), & \text{если} \quad n = 2. \end{cases}$$

Ввиду шага 5.2, $h_{a_i}, h_{b_i} \in E_n(D)$, если $n > 2$. Из определения h_{a_i}, h_{b_i} следует, что для любых $i = 2, \dots, k$ мы имеем

$$\mathrm{diag}(1, \dots, 1, [a_i, b_i]) = [h_{a_i}, h_{b_i}].$$

Следовательно, элемент g' является произведением k коммутаторов элементов группы $\mathrm{GL}_n(D)$ и, если $n > 2$, является произведением k коммутаторов элементов $E_n(D)$.

Теорема 1 доказана.

§6. Примеры

Пример 6.1. Пусть $K = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, и пусть $D = \mathcal{Q}$ – алгебра кватернионов. Тогда $\mathcal{Q}^* \approx U_2(\mathbb{C})$ и $[\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*] \approx \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Также здесь $[\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*] = \mathrm{SL}_1(\mathcal{Q})$, а значит,

$$E_n(\mathcal{Q}) = \mathrm{SL}_n(\mathcal{Q}).$$

По теореме Гото (см. [6]) каждый элемент из $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ является единственым коммутатором элементов из $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Таким образом, каждый элемент в группе

$$\mathrm{SL}_n(\mathcal{Q})/Z(\mathrm{SL}_n(\mathcal{Q})) = E_n(\mathcal{Q})/Z(E_n(\mathcal{Q}))$$

– единственный коммутатор, если $n > 2$ (следствие 2). Тем не менее, это верно и для случая $n = 2$, потому что каждый элемент из $[\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*] \approx \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ – единственный коммутатор элементов из группы $[\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*]$ (см. доказательство теоремы 1).

Пример 6.2. Пусть K – локальное поле. Тогда $[D^*, D^*] = \mathrm{SL}_1(D)$ и каждый элемент из $\mathrm{SL}_1(D)$ является произведением двух коммутаторов элементов из D^* ([16, §1.4]). Тогда любой элемент группы $\mathrm{SL}_n(D)/Z(SL_n(D))$ является произведением двух коммутаторов $\mathrm{SL}_n(D)/Z(SL_n(D))$, если $n > 2$.

Список литературы

1. Э. Артин, *Геометрическая алгебра*, “Наука” , Главная ред. физ.-мат. лит., Москва 1969.
2. A. Borel, *Linear Algebraic Groups.* Graduate Texts in Math., 2nd ed., Springer-Verlag, 1991.
3. A Borel, *On free subgroups of semisimple groups.* — Enseign. Math. **29** (1983), 151–164; reproduced in Œuvres - Collected Papers, vol. IV, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2001, pp. 41–54.
4. V. Chernousov, E. W. Ellers, N. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part: short proof.* — J. Algebra **229**, No. 1 (2000), 314–332.
5. A. Elkasapy, A. Thom, *About Gotô's method showing surjectivity of word maps.* — Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), 1553–1565.
6. E. W. Ellers, N. Gordeev, *On the conjectures of J. Thompson and O. Ore.* — Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 3657–3671.
7. E. W. Ellers, N. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part in Chevalley groups. III. Finite twisted groups.* — Commun. Algebra **24** (1996), No. 14, 4447–4475.
8. N. Gordeev, *Sums of orbits of algebraic groups.* I. — J. Algebra **295** (2006), No. 1, 62–80.
9. Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Вербальные отображения и вербальные отображения с константами простых алгебраических групп.* — Доклады РАН **471** (2016), No. 2, 136–138.
10. N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups.* — J. Algebra **500** (2018), 390–424.
11. N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps on perfect algebraic groups*, `arXiv:1801:00381`.
12. N. Gordeev, J. Saxl, *Products of conjugacy classes in Chevalley groups over local rings.* — Алгебра и анализ **17**, No. 2 (2005), 96–107.
13. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The Classical groups and K-theory.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1989.
14. C. Y. Hui, M. Larsen, A. Shalev, *The Waring problem for Lie groups and Chevalley groups.* — Israel J. Math. **210** (2015), 81–100.
15. J. Morita, E. Plotkin, *Prescribed Gauss decompositions for Kac-Moody groups over fields.*— Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **106** (2001), 153–163.
16. В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел.* Наука, Главная ред. физ.-мат. лит., Москва, 1991.

17. T. A. Springer, *Linear algberaic groups.* 2nd edition, Birkhäuser Boston–Basel–Berlin, 1998.
18. Sheng-Kui Ye, Sheng Chen, Chun-Sheng Wang, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part in quadratic groups.* — Commun. Algebra **37** (2009), 3054–3063.

Egorchenkova E. A., Gordeev N. L. Products of commutators on a general linear group over a division algebra.

We consider the word maps $\widetilde{w} : \mathrm{GL}_m(D)^{2k} \to \mathrm{GL}_n(D)$ and $\widetilde{w} : D^{*2k} \to D^*$ for a word $w = \prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i]$, where D is a division algebra over a field K. If $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$ we prove that $\widetilde{w}(\mathrm{GL}_n(D)) \supset E_n(D) \setminus Z(E_n(D))$, where $E_n(D)$ is the subgroup of $\mathrm{GL}_n(D)$ which is generated by transvections and $Z(E_n(D))$ is its center. If, in addition, $n > 2$, we prove $\widetilde{w}(E_n(D)) \supset E_n(D) \setminus Z(E_n(D))$.

The proof of the result is based on an analogue of the "Gauss decomposition with prescribed semisimple part" (see, J. Algebra 229 (2000), no. 1, 314–332.) of the group $\mathrm{GL}_n(D)$ which is also is considered in this paper.

Поступило 26 сентября 2018 г.

Факультет математики
Российского Государственного Педагогического
Университета им. А. И. Герцена,
Мойка 48, 191186 С.Петербург, Россия
E-mail: e-egorchenkova@mail.ru

Факультет математики
Российского Государственного Педагогического
Университета им. А. И. Герцена,
Мойка 48, 191186;
Математико-механический факультет
Ст.Петербургского государственного университета,
университетский проспект 28,
198504, Петергоф, Россия
E-mail: nickgordeev@mail.ru