Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 470, 2018 г.

А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. VIII. АЛГЕБРА КОГОМОЛОГИЙ ДЛЯ СЕРИИ $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

§1. Введение

В работе [1] были вычислены группы когомологий Хохшильда для некоторой части алгебр диэдрального типа, принадлежащих серии $D(2\mathcal{B})(k,s,c)$ (см. известную классификацию К. Эрдман [4]), а именно тех, которые соответствуют нулевому значению параметра c. В настоящей работе мы описываем алгебру когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для таких алгебр при дополнительном ограничении, что характеристика основного алгебраически замкнутого поля равна 2.

Ввиду [2, 3] мы получаем также описание алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для некоторых алгебр, принадлежащих ещё одной серии "двухвершинных" алгебр диэдрального типа. Методы вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, применённые в этой работе, ранее были использованы для некоторых других серий алгебр диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов из классификации К. Эрдман; см. [5–23]. Эти же методы были также применены к другим семействам алгебр: самоинъективным алгебрам конечного типа представления [24–34], алгебрам Лю–Шульца [35], целочисленным групповым кольцам диэдральных и полудиэдральных групп [36, 37].

При вычислении умножений в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ мы используем построенную в [1] бимодульную резольвенту. Отметим, что эта резольвента была описана для рассматриваемых алгебр без каких-либо ограничений на характеристику основного поля.

Кратко опишем структуру работы. В разделе 2 приведены некоторые вспомогательные сведения, а также описываются базисы пространств $\mathrm{HH}^i(R)$ при $i \leqslant 3$ для рассматриваемых алгебр. Раздел 3

Ключевые слова: алгебра когомологий Хохшильда, алгебры диэдрального типа, бимодульная резольвента.

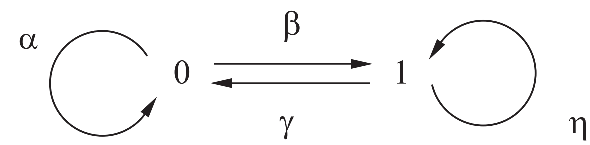
Первый из авторов благодарит грант РФФИ 17-01-00258 за поддержку.

содержит формулировки основных результатов работы, а их доказательства приведены в разделе 4.

§2. Предварительные сведения

Пусть $R = D(2B)(k,s,c)$, где $k, s \in \mathbb{N}, s \geqslant 2, c \in \{0,1\}$. Таким образом, алгебра R определяется следующим колчаном с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{aligned} \beta\gamma = \eta\beta = \gamma\eta = 0,\ (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k, \\ \alpha^2 = c(\gamma\beta\alpha)^k,\ \eta^s = (\beta\alpha\gamma)^k, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

(композицию путей мы записываем справа налево). Далее всюду предполагается, что $c = 0$, а характеристика основного (алгебраически замкнутого) поля K равна 2.

Через e_i ($i \in \{0,1\}$) обозначаем идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Пусть $\Lambda := R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ обозначает обёртывающую алгебру алгебры R. Тогда модули $P_{ij} := \Lambda(e_i \otimes e_j)$, $i, j \in \{0,1\}$, составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей.

Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента бимодуля R, построенная в [1]. Напомним, что комплекс $Q_\bullet$ был получен тотализацией некоторого бикомплекса: $Q_n = \bigoplus\limits_{i+j=n} \mathcal{B}_{ij}$, при этом мы упорядочиваем набор $\{B_{ij}\}$ по возрастанию второго индекса j; кроме того, каждое $\mathcal{B}_{ij}$ – это один из модулей

$$\left.\begin{aligned} &L_0 = P_{00} \oplus P_{11}, \\ &L_1 = P_{00} \oplus P_{10} \oplus P_{11} \oplus P_{01}, \\ &L_2 = P_{00}^2 \oplus P_{11}^2, \\ &L_3 = P_{00} \oplus P_{10} \oplus P_{01} \oplus P_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Упорядочение прямых слагаемых модулей L_i, использованное в (2.2), назовём стандартным (с этим связано, в частности, различение в обозначениях изоморфных модулей L_1 и L_3); также стандартным назовём продолжение этого упорядочения на соответствующее разложение модуля Q_n.

Мы используем следующую интерпретацию произведения Йонеды в алгебре

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathrm{Ext}^m_\Lambda(R, R),$$

ранее применявшуюся нами в [5]. Рассмотрим комплекс

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\Big);$$

здесь δ^n – дифференциалы, индуцированные дифференциалами резольвенты $Q_\bullet$. Тогда для коциклов $f \in \operatorname{Ker} \delta^n$ и $g \in \operatorname{Ker} \delta^t$ имеем $\operatorname{cl} g \cdot \operatorname{cl} f = \operatorname{cl}(\mu \mathrm{T}^0(g)\mathrm{T}^t(f))$, где $\mathrm{T}^i(h)$ обозначает i-ю трансляцию коцикла h. В дальнейшем мы будем описывать трансляции $\mathrm{T}^i(h)$ $(i \geqslant 0)$ с помощью матриц, соответствующих стандартным разложениям модулей Q_i.

Наряду с этой резольвентой был рассмотрен подкомплекс $X_\bullet \subset Q_\bullet$ такой, что для $n \geqslant 0$ $X_n = \mathcal{B}_{0,n}$. Тогда справедливо следующее утверждение (см. [1, предложение 3.4]).

Предложение 2.1. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\imath} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-2] \to 0, \tag{2.3}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Мы сохраним бо́льшую часть обозначений из статьи [1], в частности, будем использовать следующие краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$a := \alpha\gamma\beta,\ b := \beta\alpha\gamma,\ g := \gamma\beta\alpha.$$

Отметим также, что из [4, лемма IX.1.2] вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пространство* $\mathrm{HH}^0(R)$ *допускает в качестве K-базиса следующее множество*

$$\begin{gathered}\{a^i + g^i + b^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{\eta^i \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} \\ \cup\{1,\ \gamma\beta a^{k-1},\ a^k\}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

При исследовании групп когомологий Хохшильда более высоких степеней мы будем накладывать дополнительные ограничения на параметры k и s, а именно, мы будем различать 4 случая, зависящие от чётности или нечётности этих параметров.

В следующих нескольких утверждениях мы приведём K-базисы пространств $\mathrm{HH}^i(R)$ для $i = 1, 2, 3$.

Предложение 2.3. *Предположим, что k и s нечётны. Тогда*:

(а) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\Big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.5}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, \eta^i\Big) \ \textit{для} \ 2 \leqslant i \leqslant s, \tag{2.6}$$

$$\Big(e_0, \mathrm{O}_3\Big), \ \Big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big), \ \Big(a^k, \mathrm{O}_3\Big), \tag{2.7}$$

$$\Big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2\Big), \ (\alpha, \mathrm{O}_2, \eta); \tag{2.8}$$

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(a^i + g^i, b^i, \mathrm{O}_4\Big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.9}$$

$$\Big(0, \eta^i, \mathrm{O}_4\Big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant s-1, \tag{2.10}$$

$$(e_0, e_1, \mathrm{O}_4), \ (\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3), \ \Big(a^k, \mathrm{O}_5\Big), \ \Big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_5\Big), \ \Big(\mathrm{O}_2, e_0, \mathrm{O}_3\Big), \tag{2.11}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big), \ \Big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3\Big), \ \Big(\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\Big); \tag{2.12}$$

(в) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\Big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.13}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_4\Big) \ \textit{для} \ 2 \leqslant i \leqslant s, \tag{2.14}$$

$$(e_0, \mathrm{O}_7), \ (\alpha, \beta, \mathrm{O}_6), \ \Big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_7\Big), \ \Big(a^k, \mathrm{O}_7\Big), \tag{2.15}$$

$$(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_4), \ (\mathrm{O}_4, e_0, \mathrm{O}_3), \ (\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3), \ (\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3), \tag{2.16}$$

$$(\mathrm{O}_4, a^k, \mathrm{O}_3), \ (\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1), \ (\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2). \tag{2.17}$$

Доказательство. Утверждения из пунктов (а) и (б) следуют из описания базисов для $\operatorname{Ker}\delta^1$ и $\operatorname{Ker}\delta^2$ [1, предложения 5.1 и 5.4].

(в) Рассуждая аналогично доказательству [1, предложение 4.4], получаем, что пространство $\operatorname{Ker}\delta^3$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов

$$\Big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.18}$$

$$\Big(a^i + g^i, \mathrm{O}_7\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.19}$$

$$\Big(0, \beta a^i, \mathrm{O}_6\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.20}$$

$$\Big(0, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, \mathrm{O}_5\Big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.21}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, \gamma b^i, \mathrm{O}_5\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.22}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_4\Big) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s, \tag{2.23}$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, \alpha g^i, \mathrm{O}_3\Big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.24}$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, a^i + g^i, \mathrm{O}_3\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.25}$$

$$\Big(\mathrm{O}_5, a^i, 0, b^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.26}$$

$$\Big(\mathrm{O}_5, g^i, b^i, 0\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.27}$$

$$\Big(\mathrm{O}_5, \gamma\beta a^i, \mathrm{O}_2\Big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.28}$$

$$\Big(\mathrm{O}_6, \eta^i, \eta^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1, \tag{2.29}$$

$$\Big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_6\Big),\ \Big(0, \beta, \gamma, \mathrm{O}_5\Big),\ \Big(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_4\Big), \tag{2.30}$$

$$\Big(e_0, \mathrm{O}_7\Big),\ \Big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_7\Big),\ \Big(a^k, \mathrm{O}_7\Big), \tag{2.31}$$

$$\Big(\mathrm{O}_4, e_0, \mathrm{O}_3\Big),\ \Big(\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big),\ \Big(\mathrm{O}_4, a^k, \mathrm{O}_3\Big), \tag{2.32}$$

$$\Big(\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1\Big),\ \Big(\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\Big),\ \Big(\mathrm{O}_6, \eta^s, 0\Big),\ \Big(\mathrm{O}_7, \eta^s\Big). \tag{2.33}$$

С учетом описания базиса для $\operatorname{Im}\delta^2$ в [1, предложение 5.5] получаем требуемый результат. □

Предложение 2.4. *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Тогда:*

(а) *для получения K-базиса пространства $\mathrm{HH}^1(R)$ надо в множестве, состоящем из когомологических классов элементов, указанных* *в* (2.5)–(2.8)*, заменить класс элемента* $(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta)$ *на класс элемента* (O_3, η);

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.9)–(2.12);

(в) *для получения* K*-базиса пространства* $\mathrm{HH}^3(R)$ *надо в множестве, состоящем из когомологических классов элементов, указанных в* (2.13)–(2.17)*, заменить класс элемента* $(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_4)$ *на класс элемента* $(\mathrm{O}_3, \eta, \mathrm{O}_4)$.

Доказательство. Аналогично предложению 2.3 в доказательстве нуждается только часть (в). Легко проверяется, что в этом случае для получения базиса пространства $\operatorname{Ker} \delta^3$ надо в множестве, указанном в доказательстве предложения 2.3 (см. (2.18)–(2.33)), элемент $\Big(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_4\Big)$ из (2.30) заменить на элемент $\Big(\mathrm{O}_3, \eta, \mathrm{O}_4\Big)$. □

Предложение 2.5. *Предположим, что* k *и* s *чётны. Тогда*:

(а) *для получения* K*-базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо в множестве, состоящем из когомологических классов элементов, указанных в* (2.5)–(2.8)*, заменить класс элемента* $(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2)$ *на классы элементов* (α, O_3) *и* $(0, \beta, \mathrm{O}_2)$;

(б) *для получения* K*-базиса пространства* $\mathrm{HH}^2(R)$ *надо к множеству, состоящему из когомологических классов элементов, указанных в* (2.9)–(2.12)*, присоединить класс элемента* $(0, \eta^s, \mathrm{O}_4)$;

(в) *для получения* K*-базиса пространства* $\mathrm{HH}^3(R)$ *надо в множестве, состоящем из когомологических классов элементов, указанных в* (2.13)–(2.17)*, заменить класс элемента* $(\alpha, \beta, \mathrm{O}_6)$ *на классы элементов* (α, O_7) *и* $(0, \beta, \mathrm{O}_6)$.

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 2.4, нам достаточно указать базис для $\operatorname{Ker} \delta^3$. Непосредственно проверяется, что в этом случае для получения такого базиса надо в множестве, состоящем из элементов, указанных в (2.18)–(2.33), элемент $\Big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_6\Big)$ из (2.30) заменить на пару элементов (α, O_7) и $(0, \beta, \mathrm{O}_6)$. □

Предложение 2.6. *Предположим, что* k *чётно, а* s *нечётно. Тогда:*

(а) *для получения* K*-базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо в множестве, состоящем из когомологических классов элементов, указанных в* (2.5)–(2.8)*, заменить класс элемента* $(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2)$ *на классы элементов* (α, O_3) *и* $(0, \beta, \mathrm{O}_2)$*, а также опустить класс элемента* $(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta)$*;*

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.9)–(2.12)*;*

(в) *для получения* K*-базиса пространства* $\mathrm{HH}^3(R)$ *надо в множестве, состоящем из когомологических классов элементов, указанных в* (2.13)–(2.17)*, заменить класс элемента* $(\alpha, \beta, \mathrm{O}_6)$ *на классы элементов* (α, O_7) *и* $(0, \beta, \mathrm{O}_6)$*, а также опустить класс элемента* $(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_4)$.

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 2.4, мы лишь укажем базис для $\operatorname{Ker} \delta^3$. Для получения такого базиса надо в множестве, состоящем из элементов, указанных в (2.18)–(2.33), достаточно заменить элемент $(\alpha, \beta, \mathrm{O}_6)$ на пару элементов (α, O_7) и $(0, \beta, \mathrm{O}_6)$, а также опустить элемент $(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_4)$. □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из предыдущих результатов, но отметим, что оно было получено также в [1], и мы его приводим для удобства читателя.

Следствие 2.7.

(а) $$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+4, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны,} \\ k+s+3 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(б) $$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+s+7, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны,} \\ k+s+6 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(в) $$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+s+10, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны,} \\ k+s+9 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Короткая точная последовательность (2.3) индуцирует длинную когомологическую последовательность, в которой связывающие гомоморфизмы, начиная с некоторого места, равны нулю (см. [1, лемма 5.10], и тогда при $n \geqslant 3$

$$\mathrm{HH}^n(R) \simeq \mathrm{HH}^{n-2}(R) \oplus \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet),$$

где $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$. Вычисляя когомологии $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$, мы приходим к следующему утверждению (см. [1, предложение 5.9]).

Предложение 2.8. *Для* $n \geqslant 3$ *имеем*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-2}(R) = \begin{cases} 6, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 3, \\ 5, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 2.9. *Пусть* $n = 6\ell + r$, *где* $\ell, r \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leqslant r \leqslant 6$. *Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^r(R) = 16\ell.$$

Замечание 2.10. В дальнейшем для n-коцикла $x \in \operatorname{Ker} \delta^n$ его когомологический класс $\operatorname{cl} x \in \mathrm{HH}^n(R)$ будем обозначать также через x.

§3. Формулировка основного результата

В этом разделе мы приведём основной результат работы, а именно опишем мультипликативную структуру алгебры когомологий Хохшильда для рассматриваемых алгебр.

Сначала мы построим вспомогательные градуированные K-алгебры. Пусть

$$\mathcal{X}_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, w\}. \tag{3.1}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_1]$ введём градуировку так, что

$$\begin{gathered} \deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0, \\ \deg u_1 = \deg u_2 = \deg u_3 = 1, \\ \deg v_1 = \deg v_2 = 2, \quad \deg w = 3. \end{gathered}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1(k,s) = K[\mathcal{X}_1]/I_1$, где идеал I_1 порождён следующими (однородными) элементами:

$$\left.\begin{array}{c} p_1^k + p_2^s,\ p_3^2,\ p_4^2, \\ p_ip_j \ \text{ для } \ 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

$$p_4u_1 + p_3u_2,\ p_3u_2 + p_3u_3 \tag{3.3}$$

$$p_1u_1,\ p_2u_1, \tag{3.4}$$

$$p_1u_2,\ p_2u_2,\ p_4u_2, \tag{3.5}$$

$$p_1^ku_3,\ p_4u_3; \tag{3.6}$$

$$p_iv_2 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant 4, \tag{3.7}$$

$$p_1^kv_1, \tag{3.8}$$

$$u_2^2, \tag{3.9}$$

$$u_3^2,\ u_2u_3 + p_4v_1, \tag{3.10}$$

$$u_1u_2 + u_1u_3 + p_3v_1; \tag{3.11}$$

$$p_iw \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant 3; \tag{3.12}$$

$$u_2v_2 + u_3v_2,\ u_3v_2 + p_4w; \tag{3.13}$$

$$u_1v_2, \tag{3.14}$$

$$v_1v_2 + u_2w + u_3w, \tag{3.15}$$

$$u_1w,\ v_2^2. \tag{3.16}$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_1(k,s)$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_1]$. В дальнейшем мы будем часто алгебру $\mathcal{A}_1(k,s)$ обозначать кратко через $\mathcal{A}_1$.

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, u_3', u_4, v_1, v_2, w\}. \tag{3.17}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_2]$ введем градуировку так, что

$$\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,$$
$$\deg u_1 = \deg u_2 = \deg u_3' = \deg u_4 = 1,$$
$$\deg v_1 = \deg v_2 = 2, \quad \deg w = 3.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(k,s) = K[\mathcal{X}_2]/I_2$, где идеал I_2 порождён элементами вида (3.2), (3.4), (3.5), (3.7), (3.8), (3.9), (3.12), (3.14), (3.16), а также следующими элементами:

$$p_4u_1 + p_3u_2, \tag{3.18}$$

$$p_1^{k-1}u_3',\ p_2u_3',\ p_3u_3',\ p_4u_3', \tag{3.19}$$

$$p_1u_4,\ p_3u_4,\ p_4u_4; \tag{3.20}$$

$$u_2u_3',\ u_2u_4,\ u_1u_3',\ u_1u_4, \tag{3.21}$$

$$(u_3')^2,\ u_3'u_4,\ u_4^2; \tag{3.22}$$

$$u_2v_2 + p_4w, \quad u_3'v_2,\ u_4v_2; \tag{3.23}$$

$$u_2w + u_4w, \quad u_3'w. \tag{3.24}$$

На алгебре $\mathcal{A}_2$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_2]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2', u_2'', u_4, v_1, v_2, w\}. \tag{3.25}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_3]$ введём градуировку так, что

$$\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,$$
$$\deg u_1 = \deg u_2' = \deg u_2'' = \deg u_4 = 1,$$
$$\deg v_1 = \deg v_2 = 2, \quad \deg w = 3.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_3(k,s) = K[\mathcal{X}_3]/I_3$, где идеал I_3 порождён элементами вида (3.2), (3.4), (3.7), (3.12), (3.14), (3.16), а также следующими элементами:

$$p_1u_2' + p_1u_2'',\ p_4u_1 + p_3u_2',\ p_2u_2',\ p_4u_2', \tag{3.26}$$
$$p_2u_2'',\ p_3u_2'',\ p_4u_2'', \tag{3.27}$$
$$p_1u_4,\ p_3u_4,\ p_4u_4; \tag{3.28}$$
$$u_1u_2'', \tag{3.29}$$
$$(u_2')^2 + \theta_k p_1^k v_1, \tag{3.30}$$
$$u_2'u_2'' + \theta_k p_1^k v_1, \tag{3.31}$$
$$(u_2'')^2 + \theta_k p_1^k v_1, \tag{3.32}$$
$$u_1u_4,\ u_2'u_4,\ u_2''u_4, \tag{3.33}$$
$$u_4^2 + \theta_s p_1^k v_1, \tag{3.34}$$
$$\text{где}\ \ \theta_n := \sum_{i=1}^{n} i \in K; \tag{3.35}$$
$$u_2''v_2 + u_4v_2,\ u_4v_2 + p_4w, \tag{3.36}$$
$$u_2'v_2,\ u_2'w, \tag{3.37}$$
$$u_2''w + u_4w. \tag{3.38}$$

На алгебре $\mathcal{A}_3$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_3]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2', u_2'', u_4', v_1, v_2, w\}. \tag{3.39}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_4]$ введём градуировку так, что

$$\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,$$
$$\deg u_1 = \deg u_2' = \deg u_2'' = \deg u_4' = 1,$$
$$\deg v_1 = \deg v_2 = 2, \quad \deg w = 3.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_4(k,s) = K[\mathcal{X}_4]/I_4$, где идеал I_4 порождён элементами вида (3.2), (3.4), (3.7), (3.12), (3.14), (3.16), (3.26), (3.27), (3.29), (3.37), а также следующими элементами

$$p_1u_4',\ p_3u_4',\ p_4u_4',\ p_2^{s-1}u_4', \tag{3.40}$$

$$u_1u_4',\ u_2'u_4',\ u_2''u_4',\ (u_4')^2, \tag{3.41}$$

$$(u_2')^2,\ u_2'u_2'',\ (u_2'')^2,\ p_1^kv_1, \tag{3.42}$$

$$u_2''v_2 + p_4w, \tag{3.43}$$

$$u_4'v_2,\ u_4'w. \tag{3.44}$$

На алгебре $\mathcal{A}_4$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_4]$.

Наконец, мы сформулируем основной результат работы.

Теорема 3.1. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R = D(2B)(k,s,0)$, *где* $k \geqslant 1, s \geqslant 2$.

(1) *Если k и s нечётны, то алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}_1$.*

(2) *Если k нечётно, а s чётно, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_2$ *как градуированные K-алгебры.*

(3) *Если k и s чётны, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3$ *как градуированные K-алгебры.*

(4) *Если k чётно, а s нечётно, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_4$ *как градуированные K-алгебры.*

Ввиду классификации алгебр диэдрального типа “по модулю” производной эквивалентности, полученной в [3] (см. также [2]), алгебра $D(2\mathcal{A})(k,c)$ производно эквивалентна алгебре $D(2\mathcal{B})(1,k,c)$ (определение серии $D(2\mathcal{A})(k,c)$ см. в [4]). Поэтому из основной теоремы мы непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R = D(2\mathcal{A})(k,0)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. *Тогда*

$$\mathrm{HH}^*(R) \simeq \begin{cases} \mathcal{A}_1(1,k), & \text{если } k \text{ нечётно,} \\ \mathcal{A}_2(1,k), & \text{если } k \text{ чётно.} \end{cases}$$

§4. Образующие и соотношения

Случай 1. Предположим, что k и s нечётны. Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0 : $p_1 := a+g+b,\ p_2 := \eta,\ p_3 := \gamma\beta a^{k-1},\ p_4 := a^k;$ (4.1)

– степени 1 : $u_1 :=(e_0, \mathrm{O}_3),\ u_2 :=(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2),\ u_3 :=(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta);$ (4.2)

– степени 2 : $v_1 :=(e_0, e_1, \mathrm{O}_4),\ v_2 :=(\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1});$ (4.3)

– степени 3 : $w := (\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1).$ (4.4)

Предложение 4.1. *Предположим, что k и s нечётны. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, w\} \tag{4.5}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\left.\begin{aligned} p_1^k = p_2^s,\ p_3^2 = p_4^2 = 0,\\ p_ip_j = 0 \ \ \textit{для}\ \ 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

$$p_4u_1 = p_3u_2 = p_3u_3, \tag{4.7}$$

$$p_1u_1 = p_2u_1 = 0, \tag{4.8}$$

$$p_1u_2 = p_2u_2 = p_4u_2 = 0, \tag{4.9}$$

$$p_1^k u_3 = p_4u_3 = 0; \tag{4.10}$$

$$p_iv_2 = 0 \ \ \textit{для}\ \ 1 \leqslant i \leqslant 4, \tag{4.11}$$

$$p_1^k v_1 = 0, \tag{4.12}$$

$$u_2^2 = 0, \tag{4.13}$$

$$u_3^2 = 0,\ u_2u_3 = p_4v_1, \tag{4.14}$$

$$u_1u_2 = u_1u_3 + p_3v_1; \tag{4.15}$$

$$p_iw = 0 \ \ \textit{для}\ \ 1 \leqslant i \leqslant 3; \tag{4.16}$$

$$u_2v_2 = u_3v_2 = p_4w; \tag{4.17}$$

$$u_1v_2 = 0, \tag{4.18}$$

$$v_1v_2 = u_2w + u_3w, \tag{4.19}$$

$$u_1w = v_2^2 = 0. \tag{4.20}$$

Доказательство. Соотношения (4.6)–(4.12), (4.16), проверяются непосредственно. Для доказательства остальных соотношений необходимо вычислить трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень.

Из предложения 2.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Для любого $i \geqslant 0$ проекция на прямое слагаемое*

$$\pi_{i+2}\colon Q_{i+2} = Q_i \oplus X_{i+2} \to Q_i$$

является i-ой трансляцией $\mathrm{T}^i(v_1)$ коцикла $v_1 = \mu \circ \pi_0$ (см. (4.3)).

Для вычисления необходимых трансляций остальных элементов из $\mathcal{Y}_1$ введём вспомогательные обозначения. Рассмотрим отображения

$$T^1_\alpha, T^1_\beta, T^1_\eta \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2, Q_1),$$

которые относительно стандартных разложений модулей $Q_2 = L_0 \oplus L_1$ и $Q_1 = L_3$ (см. (2.2)) представлены следующими матрицами:

$$T^1_\alpha =$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i a^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} & \alpha\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-1} (i+1)\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i g^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-1} (i+1)\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} (i+1)\beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

$$T^1_\beta =$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i a^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} (i+1)\beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i g^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} (i+1)\beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} & 0 & 0 & \beta\otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$T^1_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{s-1} j\eta^j \otimes \eta^{s-1-j} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Лемма 4.3. *В качестве трансляций элементов из $\mathcal{Y}_1 \setminus \{v_1\}$, имеющих положительную степень, можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$T^0(u_1) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^1(u_1) =$$
$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2} \gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-2-i} & 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \gamma b^i \otimes a^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} \alpha\gamma b^i \otimes \gamma\beta a^{k-2-i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i \otimes \beta a^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-2} \gamma\beta a^i \otimes \beta\alpha g^{k-2-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta a^i \otimes b^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T^0(u_2) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & \beta \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^1(u_2) = T^1_\alpha + T^1_\beta;$$

$$T^0(u_3) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix}, \qquad T^1(u_3) = T^1_\alpha + T^1_\eta;$$

$$T^0(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{s-1} \otimes e_1 & \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$T^1(v_2) =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta a^{k-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^{s-1} \otimes \alpha g^{k-1} & 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-1} & 0 & 0 & 0 & \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{s-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$T^2(v_2) =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_0 \otimes \alpha\gamma b^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \eta^{s-1} \otimes e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^{s-1} \otimes \alpha g^{k-1} & 0 & 0 & 0 & \eta^{s-1} \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \star & 0 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & \star & 0 & e_1 \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & \star & 0 & 0 & e_0 \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-2} \eta^i \otimes \eta^{s-2-i} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w))_{14} = \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^i \otimes g^{k-1-i}, \qquad (\mathrm{T}^1(w))_{16} = \sum_{i=0}^{k-1} a^i \otimes \gamma b^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w))_{24} = \sum_{i=0}^{k-1} b^i \otimes \alpha g^{k-1-i}, \qquad (\mathrm{T}^1(w))_{26} = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-2-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w))_{34} = \sum_{i=0}^{k-2} \beta\alpha g^i \otimes \beta\alpha g^{k-2-i}, \quad (\mathrm{T}^1(w))_{36} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha g^i \otimes b^{k-1-i};$$

наконец, матрица, определяющая $\mathrm{T}^2(w)$*, имеет следующий блочный вид*

$$\mathrm{T}^2(w) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{2,4} & A_1 & \mathrm{O}_{2,4} \\ \hline A_2 & \mathrm{O}_{4,4} & A_3 \end{array}\right),$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1} \\ 0 & \eta^{s-2} \otimes \alpha g^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \mathrm{diag}\,(\,0\,,\, e_1 \otimes e_0\,,\, e_1 \otimes e_1\,,\, e_0 \otimes e_1).$$

Доказательство леммы состоит в прямой проверке соотношений $\mu \circ \mathrm{T}^0(x) = x$, $d_{i-1} \circ \mathrm{T}^i(x) = \mathrm{T}^{i-1}(x) \circ d_{\deg x + i - 1}$ $(i > 0)$ для $x \in \mathcal{Y}_1 \setminus \{v_1\}$ с $\deg x > 0$.

Теперь доказательство предложения 4.1 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведёнными в лемме 4.3, и эту проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Замечание 4.4. Для дальнейшего важно заметить, что формулы для трансляций элементов u_1, v_1, v_2, w (см. лемму 4.3) остаются справедливыми для произвольных k и s (эти элементы будут включаться в множество образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ и в остальных рассматриваемых ниже случаях).

Предложение 4.5. *Предположим, что* k *и* s *нечётны. Множество* $\mathcal{Y}_1$*, указанное в* (4.5)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

В доказательстве этого предложения будут использованы некоторые вспомогательные утверждения. Во-первых, нам понадобится знание степеней u_1^i при $i \leqslant 3$, и мы для этого сформулируем следующую лемму, доказываемую прямыми вычислениями (ср. лемму 4.3).

Лемма 4.6. *В качестве трансляций* $\mathrm{T}^i(\widetilde{v})$ $(i \leqslant 1)$ *элемента* $\widetilde{v} := u_1^2$ *можно взять отображения, задаваемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(\widetilde{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(\widetilde{v}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2} \gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-2-i} & 0 & 0 & 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \gamma b^i \otimes a^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i \otimes \beta a^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для формулировки следующего вспомогательного результата мы сначала введём дополнительные обозначения. Для $i \in \mathbb{N}$ определим $\widetilde{L}_i := L_{[i]}$, где $[i] \equiv i \pmod 3$ и $1 \leqslant [i] \leqslant 3$; при этом $\mathrm{id}_{\widetilde{L}_i}$ будет обозначать матрицу тождественного отображения модуля $\widetilde{L}_i$ относительно стандартных прямых разложений (см. (2.2)). Кроме того, положим $\widetilde{w} := u_1^3 + w$.

Лемма 4.7. *В качестве трансляций* $\mathrm{T}^i(\widetilde{w})$ *элемента* $\widetilde{w}$ *можно взять отображения, задаваемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(\widetilde{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_0 \otimes e_0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(\widetilde{w}) = \left(\ \mathrm{O}_{4,2} \ \middle| \ A \ \middle| \ \mathrm{id}_{\widetilde{L}_3} \ \right),$$

где A – матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2} \gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-2-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta a^i \otimes g^{k-1-i} & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \gamma b^i \otimes a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-2-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i \otimes \beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2} \beta\alpha g^i \otimes \beta\alpha g^{k-2-i} & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha g^i \otimes b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-2} \eta^i \otimes \eta^{s-2-i} & 0 \end{pmatrix},$$

а при $r \geqslant 2$ трансляции $\mathrm{T}^r(\widetilde{w})$ можно выбрать так, что их матрицы имеют следующий блочный вид

$$\mathrm{T}^r(\widetilde{w}) = \begin{pmatrix} \star & \mathrm{O} \\ \star & \mathrm{id}_{\widetilde{L}_{r-1}} \end{pmatrix}.$$

Утверждение леммы проверяется с помощью простых вычислений с использованием индукции по r.

Замечание 4.8. Отметим, что утверждения лемм 4.6 и 4.7 справедливы без каких-либо ограничений на параметры k и s.

Доказательство предложения 4.5. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_1 \cup \{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Мы сначала докажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^{3} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$, а затем с помощью индукции по n установим включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$.

Поскольку для элементов вида $a^i + g^i + b^i$, η^j из (2.4) имеем соотношения

$$\begin{gathered} a^i + g^i + b^i = p_1^i \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ \eta^j = p_2^j \ \text{ для } \ 2 \leqslant j \leqslant s, \end{gathered}$$

то $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 2.3, часть (а), справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \Big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\Big) = p_1^i u_3 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ \Big(\mathrm{O}_3, \eta^i\Big) = p_2^{i-1} u_3 \ \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s, \\ \Big(\gamma\beta a^{k-1}\, \mathrm{O}_3\Big) = p_3 u_1, \ \Big(a^k, \mathrm{O}_3\Big) = p_4 u_1, \end{gathered}$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в предложении 2.3, часть (б), справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \Big(a^i + g^i, b^i, \mathrm{O}_4\Big) = p_1^i v_1 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ \Big(0, \eta^i, \mathrm{O}_4,\Big) = p_2^i v_1 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1, \\ \Big(\mathrm{O}_2, e_0, \mathrm{O}_3\Big) = u_1^2, \ \Big(\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3\Big) = u_1 u_3, \\ \Big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_5\Big) = p_3 v_1, \ \Big(a^k, \mathrm{O}_5\Big) = p_4 v_1, \end{gathered}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big) = p_3 u_1^2, \ \Big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3\Big) = p_4 u_1^2.$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$. Отметим, что здесь и ниже мы производим умножение элементов $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень, используя трансляции таких элементов, представленные в лемме 4.3 (см. также лемму 4.6).

Аналогично предыдущему для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 2.3, часть (в), получаем следующие соотношения:

$$\Big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\Big) = p_1^i u_3 v_1 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\Big(\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_4\Big) = p_2^{i-1} u_3 v_1 \ \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s,$$
$$\Big(e_0, \mathrm{O}_7\Big) = u_1 v_1, \ \Big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_7\Big) = p_3 u_1 v_1,$$
$$\Big(a^k, \mathrm{O}_7\Big) = p_4 u_1 v_1, \ \Big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_6\Big) = u_2 v_1,$$
$$\Big(\alpha, \mathrm{O}_2\, \eta, \mathrm{O}_4\Big) = u_3 v_1, \ \Big(\mathrm{O}_4, e_0, \mathrm{O}_3\Big) = u_1^3, \ \Big(\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3\Big) = u_1^2 u_3,$$
$$\Big(\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big) = p_3 u_1^3, \ \Big(\mathrm{O}_4, a^k, \mathrm{O}_3\Big) = p_4 u_1^3, \ \Big(\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\Big) = p_4 w,$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Теперь предположим, что $n \geqslant 4$, и пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^n \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$. Учитывая прямое разложение

$$Q_n = Q_{n-2} \oplus X_n \tag{4.24}$$

(см. предложение 2.1), мы введём обозначение $f = (f', f'')$, где $f' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-2}, R)$, $f'' \in \mathcal{X}^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, R)$. Поскольку матрица дифференциала d_n^Q имеет “треугольный” вид (относительно разложения (4.24)):

$$d_n^Q = \begin{pmatrix} d_{n-2}^Q & \mathrm{O} \\ \tau & d_n^X \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

то $f'' \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$.

(а) Предположим дополнительно, что $f'' = 0$. Тогда $f' \in \operatorname{Ker} \delta^{n-2}$, и, используя формулы для $\mathrm{T}^i(v_1)$ (см. лемму 4.2), получаем: $f' \cdot v_1 = (f', \mathrm{O}) = f$. По индуктивному предположению $f' \in \mathcal{H}$, а тогда и $f \in \mathcal{H}$.

(б) Предположим дополнительно, что $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ $(n \geqslant 6)$. В этом случае в (4.25) имеем $\tau = \Big(\mathrm{O}\ \tau_{03}\Big)$. Из описания базиса для $\mathrm{H}^3(\mathcal{X}^\bullet)$ в [1, стр. 100] с учётом “3-периодичности” комплекса $X_\bullet$ (т.е. $d_n^{X_\bullet} = d_{n-3}^{X_\bullet}$ для $n \geqslant 4$ – см. [1, стр.99]) можно предположить, что f'' – это один из элементов

$$(e_0, \mathrm{O}_3),\ (\alpha, \mathrm{O}_3),\ (\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3),$$
$$(a^k, \mathrm{O}_3),\ (0, e_0, e_1, e_1),\ (0, a^k, \mathrm{O}_2).$$

Непосредственно проверяется, что для всех таких f'' имеем $\tau^*(f'') = 0$. Следовательно, коцепь $g := \Big(\mathrm{O}, f''\Big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ является коциклом (здесь O – нулевая строка подходящей длины). С помощью леммы 4.7 получаем:

$$g \cdot \widetilde{w} = \Big(\,*\,, f''\Big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R).$$

Ввиду части (a) доказательства имеем $f - g \cdot \widetilde{w} \in \mathcal{H}$; при этом по индуктивному предположению $g \in \mathcal{H}$. Следовательно, также и $f \in \mathcal{H}$.

В случае, когда $n \equiv 2\,(\mathrm{mod} 3)$, в (4.25) имеем $\tau = \Big(\mathrm{O}\ \tau_{02}\Big)$. Используя описание базиса для $\mathrm{H}^2(\mathcal{X}^\bullet)$ (см. [1, стр. 100]), непосредственно получаем, что $\tau^*(f'') = 0$, и следовательно, $g := \Big(\mathrm{O}, f''\Big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ – коцикл, и к нему можно применить рассуждение, аналогичное предыдущему.

Теперь предположим $n \equiv 1(\mathrm{mod} 3)$ и $n = 3r+1$, $r \geqslant 1$. Сейчас в (4.25) $\tau = \Big(\mathrm{O}\ \tau_{04}\Big)$. Вновь с учётом описания базиса для $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet)$ (см. [1, стр. 100]) достаточно рассмотреть случаи, когда

$$f'' \in \{(e_0, \mathrm{O}_3),\ (\alpha, \mathrm{O}_3),\ (\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3),\ (a^k, \mathrm{O}_3),\ (0, \beta, \mathrm{O}_2)\}.$$

Для f'', отличных от (α, O_3) и от $(0, \beta, \mathrm{O}_2)$, вновь $\tau^*(f'') = 0$, и тогда доказательство того, что $f = (f', f'')$ лежит в $\mathcal{H}$, завершается аналогично предыдущему. Такое же рассуждение применимо и в случае, когда $f'' = (\alpha, \mathrm{O}_3)$ и $n \geqslant 7$.

Если же $f'' = (0, \beta, \mathrm{O}_2)$, то заметим, что

$$u_2 w = (\mathrm{O}_5, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \mathrm{O}_2) \in \mathrm{HH}^4(R),$$

а используя лемму 4.7, получаем, что элемент $u_2 w \widetilde{w}^{r-1}$ имеет вид

$$u_2 w \widetilde{w}^{r-1} = (\,*\,, 0, \beta, \mathrm{O}_2).$$

Применяя часть (a) доказательства к $\widetilde{f} := f - u_2 w \widetilde{w}^{r-1}$, получаем, что $\widetilde{f} \in \mathcal{H}$, и тогда $f \in \mathcal{H}$.

Наконец, если $n = 4$ и $f'' = (\alpha, \mathrm{O}_3)$, то замечаем, что

$$u_3 u_1^3 = \Big(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3 \Big),$$

и применяя часть (a) доказательства к $\widetilde{f} := f - u_3 u_1^3 = (* , \mathrm{O}_4)$, получаем, что $\widetilde{f} \in \mathcal{H}$ и $f \in \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 3, где $\mathcal{X}_1$ из (3.1), а I_1 – соответствующий идеал соотношений (см. (3.2)–(3.16)). (Ненулевые) образы мономов из $K[\mathcal{X}_1]$ относительно канонического эпиморфизма $K[\mathcal{X}_1] \to \mathcal{A}_1$ также будем называть мономами. Произвольный элемент $a \in \mathcal{A}_1$ записывается в виде линейной комбинации мономов (с коэффициентами из K). Из предложений 4.1 и 4.5 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$ (см. (4.5)); заметим, что, не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_1^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (1) теоремы 3.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.9. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_1^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$v_2 > u_2 > u_3 > u_1 > v_1 > w > p_4 > p_3 > p_2 > p_1.$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_1$ представи́м в виде

$$f = p_1^i p_2^j p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} u_1^\ell u_2^{\beta_2} u_3^{\beta_3} v_1^r v_2^{\gamma_2} w^t; \tag{4.26}$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$ имеем:

$$\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3, \gamma_2 \in \{0,1\}, i, j, \ell, r, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \leqslant k, j \leqslant s-1.$$

Такие представления для мономов из $\mathcal{A}_1$ мы отождествляем с соответствующими мономами из $K[\mathcal{X}_1]$.

Назовём редукцией монома f из $\mathcal{A}_1$ процесс замены некоторых подмономов в f на другие элементы из $\mathcal{A}_1$ по следующим правилам ($a \mapsto b$ означает замену каждого вхождения монома a на элемент b):

$$\begin{aligned}
&p_2^s \mapsto p_1^k, && p_3u_2 \mapsto p_4u_1,\\
&p_3u_3 \mapsto p_4u_1 && u_2u_3 \mapsto p_4v_1,\\
&u_1u_2 \mapsto u_1u_3 + p_3v_1, && u_2v_2 \mapsto p_4w,\\
&u_3v_2 \mapsto p_4w, && v_1v_2 \mapsto u_2w + u_3w.
\end{aligned}$$

Любую замену из приведённого выше списка назовём элементарным шагом редукции. Так как после каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в строго меньший относительно лексикографического порядка, то за конечное число шагов мы получаем мономы, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $a \in \mathcal{A}_1$ в виде линейной комбинации мономов имеет нормальную форму, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_1$, то любой элемент $a \in \mathcal{A}_1$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.27}$$

Предположим, что моном f вида (4.26) имеет нормальную форму. Если u_1 входит в этот моном, то f – это один из мономов $u_1^l v_1^t$, $p_3u_1^l v_1^t$, $p_4u_1^l v_1^t$ или $u_1^l u_3 v_1^t$, где $l \geqslant 1, t \geqslant 0$. Если u_2 входит в f, то $f = u_2 v_1^t w^l$, где $t, l \geqslant 0$. Если в f входит u_3 (и не входит u_1), то $f = p_1^i u_3 v_1^t$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $t \geqslant 0$ или $f = p_2^j u_3 v_1^t$ для $1 \leqslant j \leqslant s-1$, $t \geqslant 0$ или $f = u_3 v_1^t w^l$ для $t, l \geqslant 0$. С v_2 есть мономы (в нормальной форме) только вида $f = v_2 w^l$ для всех $l \geqslant 0$; с w есть ещё мономы вида $v_1^t w^l$, $p_4 v_1^t w^l$ для всех $l \geqslant 1$ и $t \geqslant 0$, и, наконец, в остальных случаях f – это один из моном вида v_1^t, $p_3v_1^t$, $p_4v_1^t$, $p_1^i v_1^t$, $p_2^j v_1^t$ для всех $t \geqslant 1$ и $1 \leqslant j \leqslant s-1$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Рассматривая степени указанных выше мономов, мы получаем следующий список всех (ненулевых) мономов, имеющих нормальную форму. Пусть $m \geqslant 0$.

Мономы степени $6m$:

$$\{u_1^{6m-2t}v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{p_3u_1^{6m-2t}v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{p_4u_1^{6m-2t}v_1^t\}_{t=0}^{3m},$$
$$\{u_3u_1^{6m-2t-1}v_1^t\}_{t=0}^{3m-1}, \{u_2v_1^{3t+1}w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1},$$

$$\{p_1^i v_1^{3m}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^j v_1^{3m}\}_{j=1}^{s-1}, \{u_3 v_1^{3t+1} w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1},$$
$$\{v_1^{3t} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1}, \{p_4 v_1^{3t} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1};$$

(их количество равно $k+s+16m+1$ при $m>0$, а при $m=0$ добавляется ещё один элемент p_1^k).

Мономы степени $6m+1$:

$$\{u_1^{6m-2t+1} v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{p_3 u_1^{6m-2t+1} v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{p_4 u_1^{6m-2t+1} v_1^t\}_{t=0}^{3m},$$
$$\{u_3 u_1^{6m-2t} v_1^t\}_{t=0}^{3m-1}, \{u_2 v_1^{3t} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{p_1^i u_3 v_1^{3m}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^j u_3 v_1^{3m}\}_{j=1}^{s-1}, \{u_3 v_1^{3t} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{v_1^{3t+2} w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1}, \{p_4 v_1^{3t+2} w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1};$$

(их количество равно $k+s+16m+3$).

Мономы степени $6m+2$:

$$\{u_1^{6m-2t+2} v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{p_3 u_1^{6m-2t+2} v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{p_4 u_1^{6m-2t+2} v_1^t\}_{t=0}^{3m+1},$$
$$\{u_3 u_1^{6m-2t+1} v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{u_2 v_1^{3t+2} w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1},$$
$$\{p_1^i v_1^{3m+1}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^j v_1^{3m+1}\}_{j=1}^{s-1}, \{u_3 v_1^{3t+2} w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1},$$
$$\{v_1^{3t+1} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1}, \{p_4 v_1^{3t+1} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1}, v_2 w^{2m};$$

(их количество равно $k+s+16m+6$).

Мономы степени $6m+3$:

$$\{u_1^{6m-2t+3} v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{p_3 u_1^{6m-2t+3} v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{p_4 u_1^{6m-2t+3} v_1^t\}_{t=0}^{3m+1},$$
$$\{u_3 u_1^{6m-2t+2} v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{u_2 v_1^{3t+1} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{p_1^i u_3 v_1^{3m+1}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^j u_3 v_1^{3m+1}\}_{j=1}^{s-1}, \{u_3 v_1^{3t+1} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{v_1^{3t} w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m}, \{p_4 v_1^{3t} w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m};$$

(их количество равно $k+s+16m+9$).

Мономы степени $6m+4$:

$$\{u_1^{6m-2t+4} v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{p_3 u_1^{6m-2t+4} v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{p_4 u_1^{6m-2t+4} v_1^t\}_{t=0}^{3m+2},$$
$$\{u_3 u_1^{6m-2t+3} v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{u_2 v_1^{3t} w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{p_1^i v_1^{3m+2}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^j v_1^{3m+2}\}_{j=1}^{s-1}, \{u_3 v_1^{3t} w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{v_1^{3t+2} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1}, \{p_4 v_1^{3t+2} w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1};$$

(их количество равно $k+s+16m+11$).

Мономы степени $6m+5$:

$$\{u_1^{6m-2t+5}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{p_3u_1^{6m-2t+5}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{p_4u_1^{6m-2t+5}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2},$$
$$\{u_3u_1^{6m-2t+4}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{u_2v_1^{3t+2}w^{2m-2t}\}_{t=0}^m,$$
$$\{p_1^iu_3v_1^{3m+2}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^ju_3v_1^{3m+2}\}_{j=1}^{s-1}, \{u_3v_1^{3t+2}w^{2m-2t}\}_{t=0}^m,$$
$$\{v_1^{3t+1}w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^m, \{p_4v_1^{3t+1}w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^m, v_2w^{2m+1};$$

(их количество равно $k+s+16m+14$).

Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму. С учётом предложения 2.8 и следствий 2.7 и 2.9 отсюда вытекает равенство (4.27). □

Случай 2. Теперь предположим, что k нечётно, а s чётно.

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{aligned}
&\text{— степени } 0: && p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ из } (4.1);\\
&\text{— степени } 1: && u_1, u_2 \text{ из } (4.2), \quad \text{а также}\\
& && u_3' := (\alpha g, \mathrm{O}_3), u_4 := (\mathrm{O}_3, \eta); \qquad (4.28)\\
&\text{— степени } 2: && v_1, v_2 \text{ из } (4.3);\\
&\text{— степени } 3: && w \text{ из } (4.4).
\end{aligned}$$

Предложение 4.10. *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, u_3', u_4, v_1, v_2, w\} \tag{4.29}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (4.6), (4.8), (4.9), (4.11), (4.12), (4.13), (4.16), (4.18), (4.20), *а также следующие соотношения:*

$$p_4u_1 = p_3u_2, \tag{4.30}$$
$$p_1^{k-1}u_3' = p_2u_3' = p_3u_3' = p_4u_3' = 0, \tag{4.31}$$
$$p_1u_4 = p_3u_4 = p_4u_4 = 0; \tag{4.32}$$
$$u_2u_3' = u_2u_4 = u_1u_3' = u_1u_4 = 0, \tag{4.33}$$
$$(u_3')^2 = u_3'u_4 = u_4^2 = 0; \tag{4.34}$$
$$u_2v_2 = p_4w, \quad u_3'v_2 = u_4v_2 = 0; \tag{4.35}$$
$$u_2w = u_4w, \quad u_3'w = 0. \tag{4.36}$$

Доказательство. Доказательство приведённых выше соотношений проводится так же, как в доказательстве предложения 4.1. При этом нам необходимо знать трансляции тех элементов из (4.29), для которых они не были вычислены ранее (см. замечание 4.4). Такие трансляции мы опишем в следующей лемме.

Лемма 4.11. *В качестве трансляций элементов u_3' и u_4 можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$T^0(u_3') = \begin{pmatrix} \alpha g \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^1(u_3') = \begin{pmatrix} \star & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta a^{i+1} \otimes \gamma b^{k-1-i} & a\alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^{i+1} \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta\alpha g^{i+1} \otimes b^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$T^1(u_3')_{11} = \sum_{i=1}^{k-2} i\gamma\beta a^{i+1} \otimes g^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-1} ia^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-1-i},$$

$$T^1(u_3')_{21} = \sum_{i=1}^{k-2} i\gamma b^{i+1} \otimes \alpha g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\alpha\gamma b^{i+1} \otimes a^{k-1-i},$$

$$T^1(u_3')_{31} = \sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\alpha g^{i+1} \otimes \beta a^{k-1-i};$$

$$T^0(u_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$T^1(u_4) = T^1_\eta \ (\textit{см.}\ (4.23)).$$

Теперь доказательство предложения 4.10 завершается аналогично доказательству предложения 4.1; детальные вычисления мы предоставляем проделать читателю. □

Предложение 4.12. *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Множество $\mathcal{Y}_2$, указанное в (4.29), порождает $\mathrm{HH}^*(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство предложения 4.5: сначала доказывается, что $\bigcup\limits_{i=0}^{3} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_2 \cup \{1\}$, а затем с помощью индукции по n устанавливается включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. Детали соответствующих вычислений мы предоставляем проделать читателю. □

Пусть $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 3, где $\mathcal{X}_2$ из (3.17), а I_2 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.10 и 4.12 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_2 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$. Пусть $\mathcal{A}_2 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_2^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_2$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (2) теоремы 3.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.13. *Для любого $m \geqslant 0$*
$$\dim_K \mathcal{A}_2^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Мы проводим доказательство аналогично доказательству предложения 4.9. А именно, на кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$ вводится лексикографический порядок такой, что
$$v_2 > u_2 > u_3' > u_4 > u_1 > v_1 > w > p_4 > p_3 > p_2 > p_1.$$
Затем рассматриваем следующий список элементарных шагов редукции:
$$\begin{aligned} &p_2^s \mapsto p_1^k, && p_3u_2 \mapsto p_4u_1,\\ &u_2v_2 \mapsto p_4w, && u_2w \mapsto u_4w. \end{aligned}$$
Аналогично доказательству предложения 4.9 определяется нормальная форма элементов из $\mathcal{A}_2$ (относительно описанных выше элементарных шагов редукции) и устанавливается, что любой элемент $a \in \mathcal{A}_2$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_2^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_2^i$, представленных в нормальной форме. Тогда $\widetilde{q}_i \geqslant q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и потому достаточно доказать, что
$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.37}$$

Наконец, с помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени $6m$ ($m \geqslant 0$):

$$\{u_1^{6m-2t}v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{p_3u_1^{6m-2t}v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{p_4u_1^{6m-2t}v_1^t\}_{t=0}^{3m},$$
$$\{p_1^iv_1^{3m}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^jv_1^{3m}\}_{j=1}^{s-1},$$
$$\{u_2u_1^{6m-2t-1}v_1^t\}_{t=0}^{3m-1}, \{u_4v_1^{3t+1}w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1}, \{v_2v_1^{3t+2}w^{2m-2t-2}\}_{t=0}^{m-1},$$
$$\{v_1^{3t}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1}, \{p_4v_1^{3t}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1};$$

(их количество равно $k+s+16m+1$ при $m > 0$, а при $m = 0$ добавляется ещё один элемент p_1^k);

мономы степени $6m+1$:

$$\{u_1^{6m-2t+1}v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{p_3u_1^{6m-2t+1}v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{p_4u_1^{6m-2t+1}v_1^t\}_{t=0}^{3m},$$
$$\{p_1^iu_3v_1^{3m}\}_{i=0}^{k-2}, \{p_2^ju_4v_1^{3m}\}_{j=1}^{s-1},$$
$$\{u_2u_1^{6m-2t}v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{u_4v_1^{3t}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m}, \{v_2v_1^{3t+1}w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1},$$
$$\{v_1^{3t+2}w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1}, \{p_4v_1^{3t+2}w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1};$$

(их количество равно $k+s+16m+3$);

мономы степени $6m+2$:

$$\{u_1^{6m-2t+2}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{p_3u_1^{6m-2t+2}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{p_4u_1^{6m-2t+2}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1},$$
$$\{p_1^iv_1^{3m+1}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^jv_1^{3m+1}\}_{j=1}^{s-1},$$
$$\{u_2u_1^{6m-2t+1}v_1^t\}_{t=0}^{3m}, \{u_4v_1^{3t+2}w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1}, \{v_2v_1^{3t}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{v_1^{3t+1}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1}, \{p_4v_1^{3t+1}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1};$$

(их количество равно $k+s+16m+6$);

мономы степени $6m+3$:

$$\{u_1^{6m-2t+3}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{p_3u_1^{6m-2t+3}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{p_4u_1^{6m-2t+3}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1},$$
$$\{p_1^iu_3v_1^{3m+1}\}_{i=0}^{k-2}, \{p_2^ju_4v_1^{3m+1}\}_{j=1}^{s-1},$$
$$\{u_2u_1^{6m-2t+2}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{u_4v_1^{3t+1}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m}, \{v_2v_1^{3t+2}w^{2m-2t-1}\}_{t=0}^{m-1},$$
$$\{v_1^{3t}w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m}, \{p_4v_1^{3t}w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m};$$

(их количество равно $k+s+16m+9$);

мономы степени $6m+4$:

$$\{u_1^{6m-2t+4}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{p_3u_1^{6m-2t+4}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{p_4u_1^{6m-2t+4}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2},$$
$$\{p_1^iv_1^{3m+2}\}_{i=1}^{k-1}, \{p_2^jv_1^{3m+2}\}_{j=1}^{s-1},$$
$$\{u_2u_1^{6m-2t+3}v_1^t\}_{t=0}^{3m+1}, \{u_4v_1^{3t}w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m}, \{v_2v_1^{3t+1}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{v_1^{3t+2}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1}, \{p_4v_1^{3t+2}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m-1};$$

(их количество равно $k+s+16m+11$);

мономы степени $6m+5$:

$$\{u_1^{6m-2t+5}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{p_3u_1^{6m-2t+5}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{p_4u_1^{6m-2t+5}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2},$$
$$\{p_1^iu_3v_1^{3m+2}\}_{i=0}^{k-2}, \{p_2^ju_4v_1^{3m+2}\}_{j=1}^{s-1},$$
$$\{u_2u_1^{6m-2t+4}v_1^t\}_{t=0}^{3m+2}, \{u_4v_1^{3t+2}w^{2m-2t}\}_{t=0}^{m}, \{v_2v_1^{3t}w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m},$$
$$\{v_1^{3t+1}w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m}, \{p_4v_1^{3t+1}w^{2m-2t+1}\}_{t=0}^{m};$$

(их количество равно $k+s+16m+14$).

Все мономы из этого списка имеют нормальную форму. С учётом предложения 2.8 и следствий 2.7 и 2.9 получаем равенство (4.37). □

Случай 3. Предположим, что k и s чётны.

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{aligned}
&\text{— степени } 0: && p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ из } (4.1);\\
&\text{— степени } 1: && u_1 \text{ из } (4.2), u_4 \text{ из } (4.28), \quad \text{а также}\\
& && u_2' := (\alpha, \mathrm{O}_3), u_2'' := (0, \beta, \mathrm{O}_2);\\
&\text{— степени } 2: && v_1, v_2 \text{ из } (4.3);\\
&\text{— степени } 3: && w \text{ из } (4.4);
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Предложение 4.14. *Предположим, что k и s чётны. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2', u_2'', u_4, v_1, v_2, w\} \tag{4.39}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (4.6), (4.8), (4.11), (4.16), (4.18), (4.20), *а также следующие соотношения:*

$$p_1u_2' = p_1u_2'',\ p_4u_1 = p_3u_2',\ p_2u_2' = p_4u_2' = 0, \tag{4.40}$$
$$p_2u_2'' = p_3u_2'' = p_4u_2'' = 0, \tag{4.41}$$
$$p_1u_4 = p_3u_4 = p_4u_4 = 0; \tag{4.42}$$

$$u_1 u_2'' = 0, \tag{4.43}$$

$$(u_2')^2 = u_2' u_2'' = (u_2'')^2 = \theta_k p_1^k v_1, \tag{4.44}$$

$$u_1 u_4 = 0,\ u_2' u_4 = u_2'' u_4 = 0, \tag{4.45}$$

$$u_4^2 = \theta_s p_1^k v_1; \tag{4.46}$$

здесь θ_n из (3.35);

$$u_2'' v_2 = p_4 w, \tag{4.47}$$

$$u_4 v_2 = p_4 w, \tag{4.48}$$

$$u_2' v_2 = 0,\ u_2' w = 0, \tag{4.49}$$

$$u_2'' w = u_4 w. \tag{4.50}$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предложений 4.1 и 4.10. При этом нам необходимо знать трансляции тех элементов из (4.39), для которых они не были вычислены ранее. Такие трансляции мы опишем в следующей лемме.

Лемма 4.15. *В качестве трансляций элементов* u_2' *и* u_2'' *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(u_2') = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^1(u_2') = T_\alpha^1 (\textit{см.}\ (4.21));$$

$$\mathrm{T}^0(u_2'') = \begin{pmatrix} 0 & \beta\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^1(u_2'') = T_\beta^1 (\textit{см.}\ (4.22)).$$

Теперь доказательство предложения 4.14 завершается аналогично доказательству предложения 4.1. □

Предложение 4.16. *Предположим, что* k *и* s *чётны. Множество* $\mathcal{Y}_3$*, указанное в* (4.39)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству предложения 4.5; детали вычислений мы оставляем читателю. □

Пусть $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 3, где $\mathcal{X}_3$ из (3.25), а I_3 – соответствующий идеал соотношений.

Из предложений 4.14 и 4.16 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3$. Пусть $\mathcal{A}_3 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_3^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_3$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (3) теоремы 3.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.17. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_3^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 4.9. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$v_2 > u_4 > u_2'' > u_2' > u_1 > w > v_1 > p_4 > p_3 > p_2 > p_1.$$

Затем рассматриваем следующий список элементарных шагов редукции:

$$\begin{array}{ll}
p_2^s \mapsto p_1^k, & p_1u_2'' \mapsto p_1u_2', \\
p_3u_2' \mapsto p_4u_1, & u_4v_2 \mapsto u_2''v_2 \mapsto p_4w, \\
(u_2'')^2 \mapsto u_2'u_2'' \mapsto (u_2')^2 \mapsto p_1^kv_1 \ (\text{если}\ \theta_k \neq 0), & \\
u_4^2 \mapsto p_1^kv_1 \ (\text{если}\ \theta_s \neq 0), & u_4w \mapsto u_2''w.
\end{array}$$

Аналогично доказательству предложения 4.9 определяется нормальная форма элементов из $\mathcal{A}_3$ (относительно описанных выше элементарных шагов редукции) и устанавливается, что любой элемент $a \in \mathcal{A}_3$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_3^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_3^i$, представленных в нормальной форме. Тогда $\widetilde{q}_i \geqslant q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и потому достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.51}$$

С помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени $6m$ $(m \geqslant 0)$:

$$\left\{v_1^{3(m-r)-1}v_2w^{2r}\right\}_{r=0}^{m-1}, \left\{u_2''v_1^{3(m-r)-2}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\left\{u_1^{2r+1}u_2'v_1^{3m-r-1}\right\}_{r=0}^{3m-1}, \left\{u_1^{2r}v_1^{3m-r}\right\}_{r=1}^{3m},$$
$$\left\{p_3u_1^{2r}v_1^{3m-r}\right\}_{r=0}^{3m}, \left\{p_4u_1^{2r}v_1^{3m-r}\right\}_{r=0}^{3m},$$
$$\left\{v_1^{3(m-r)}w^{2r}\right\}_{r=1}^{m}, \left\{p_4v_1^{3(m-r)}w^{2r}\right\}_{r=1}^{m},$$
$$\left\{p_1^iv_1^{3m}\right\}_{i=0}^{k}, \left\{p_2^iv_1^{3m}\right\}_{i=1}^{s-1};$$

(их количество равно $16m+k+s+2$);

мономы степени $6m+1$:

$$\left\{v_1^{3(m-r)-2}v_2w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m-1}, \left\{u_2''v_1^{3(m-r)}w^{2r}\right\}_{r=0}^{m}, \left\{u_1^{2r}u_2'v_1^{3m-r}\right\}_{r=1}^{3m},$$
$$\left\{u_1^{2r+1}v_1^{3m-r}\right\}_{r=0}^{3m}, \left\{p_3u_1^{2r+1}v_1^{3m-r}\right\}_{r=0}^{3m}, \left\{p_4u_1^{2r+1}v_1^{3m-r}\right\}_{r=0}^{3m},$$
$$\left\{v_1^{3(m-r)-1}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m-1}, \left\{p_4v_1^{3(m-r)-1}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\left\{p_1^iu_2'v_1^{3m}\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{p_2^iu_4v_1^{3m}\right\}_{i=0}^{s-1};$$

(их количество равно $16m+k+s+4$);

мономы степени $6m+2$:

$$\left\{v_1^{3(m-r)}v_2w^{2r}\right\}_{r=0}^{m}, \left\{u_2''v_1^{3(m-r)-1}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m-1}, \left\{u_1^{2r+1}u_2'v_1^{3m-r}\right\}_{r=0}^{3m},$$
$$\left\{u_1^{2r}v_1^{3m-r+1}\right\}_{r=1}^{3m+1}, \left\{p_3u_1^{2r}v_1^{3m-r+1}\right\}_{r=0}^{3m+1}, \left\{p_4u_1^{2r}v_1^{3m-r+1}\right\}_{r=0}^{3m+1},$$
$$\left\{v_1^{3(m-r)+1}w^{2r}\right\}_{r=1}^{m}, \left\{p_4v_1^{3(m-r)+1}w^{2r}\right\}_{r=1}^{m},$$
$$\left\{p_1^iv_1^{3m+1}\right\}_{i=0}^{k}, \left\{p_2^iv_1^{3m+1}\right\}_{i=1}^{s-1};$$

(их количество равно $16m+k+s+7$);

мономы степени $6m+3$:

$$\Big\{v_1^{3(m-r)-1}v_2w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m-1},\ \Big\{u_2''v_1^{3(m-r)+1}w^{2r}\Big\}_{r=0}^{m},$$
$$\Big\{u_1^{2r}u_2'v_1^{3m-r+1}\Big\}_{r=1}^{3m+1},\Big\{u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+1}\Big\}_{r=0}^{3m+1},$$
$$\Big\{p_3u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+1}\Big\}_{r=0}^{3m+1},\ \Big\{p_4u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+1}\Big\}_{r=0}^{3m+1},$$
$$\Big\{v_1^{3(m-r)}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m},\ \Big\{p_4v_1^{3(m-r)}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m},$$
$$\Big\{p_1^iu_2'v_1^{3m+1}\Big\}_{i=0}^{k-1},\Big\{p_2^iu_4v_1^{3m+1}\Big\}_{i=0}^{s-1};$$

(их количество равно $16m+k+s+10$);

мономы степени $6m+4$:

$$\Big\{v_1^{3(m-r)+1}v_2w^{2r}\Big\}_{r=0}^{m},\ \Big\{u_2''v_1^{3(m-r)}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m},$$
$$\Big\{u_1^{2r+1}u_2'v_1^{3m-r+1}\Big\}_{r=0}^{3m+1},\Big\{u_1^{2r}v_1^{3m-r+2}\Big\}_{r=1}^{3m+2},$$
$$\Big\{p_3u_1^{2r}v_1^{3m-r+2}\Big\}_{r=0}^{3m+2},\ \Big\{p_4u_1^{2r}v_1^{3m-r+2}\Big\}_{r=0}^{3m+2},$$
$$\Big\{v_1^{3(m-r)+2}w^{2r}\Big\}_{r=1}^{m},\ \Big\{p_4v_1^{3(m-r)+2}w^{2r}\Big\}_{r=1}^{m},$$
$$\Big\{p_1^iv_1^{3m+2}\Big\}_{i=0}^{k},\ \Big\{p_2^iv_1^{3m+2}\Big\}_{i=1}^{s-1};$$

(их количество равно $16m+k+s+12$);

мономы степени $6m+5$:

$$\Big\{v_1^{3(m-r)}v_2w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m},\ \Big\{u_2''v_1^{3(m-r)+2}w^{2r}\Big\}_{r=0}^{m},$$
$$\Big\{u_1^{2r}u_2'v_1^{3m-r+2}\Big\}_{r=1}^{3m+2},\Big\{u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+2}\Big\}_{r=0}^{3m+2},$$
$$\Big\{p_3u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+2}\Big\}_{r=0}^{3m+2},\ \Big\{p_4u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+2}\Big\}_{r=0}^{3m+2},$$
$$\Big\{v_1^{3(m-r)+1}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m},\ \Big\{p_4v_1^{3(m-r)+1}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m},$$
$$\Big\{p_1^iu_2'v_1^{3m+2}\Big\}_{i=0}^{k-1},\Big\{p_2^iu_4v_1^{3m+2}\Big\}_{i=0}^{s-1};$$

(их количество равно $16m+k+s+15$).

Все мономы из этого списка имеют нормальную форму. С учётом результатов предложения 2.8 и следствий 2.7 и 2.9 получаем равенство (4.51). □

Случай 4. Предположим, что k чётно, а s нечётно.

Рассмотрим следующее подмножество однородных элементов из $\mathrm{HH}^*(R)$

$$\mathcal{Y}_4 := \Big(\mathcal{Y}_3 \setminus \{u_4\}\Big) \cup \{u_4'\}, \tag{4.52}$$

где $\mathcal{Y}_3$ из (4.39), а $u_4' := (\mathrm{O}_3, \eta^2)$ – элемент степени 1.

Предложение 4.18. *Предположим, что k чётно, а s нечётно. Для элементов множества $\mathcal{Y}_4$ в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются соотношения* (4.6), (4.8), (4.11), (4.16), (4.18), (4.20), (4.40), (4.41), (4.43), (4.47), (4.49), *а также следующие соотношения:*

$$p_1u_4' = p_3u_4' = p_4u_4' = p_2^{s-1}u_4' = 0, \tag{4.53}$$

$$u_1u_4' = u_2'u_4' = u_2''u_4' = (u_4')^2 = 0, \tag{4.54}$$

$$(u_2')^2 = u_2'u_2'' = (u_2'')^2 = 0,\ p_1^kv_1 = 0, \tag{4.55}$$

$$u_2''v_2 = p_4w, \tag{4.56}$$

$$u_4'v_2 = u_4'w = 0. \tag{4.57}$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 4.1. При этом нам необходимо знать трансляции дополнительного элемента $u_4' \in \mathcal{Y}_4$. Они описаны в следующей лемме.

Лемма 4.19. *В качестве трансляций элемента u_4' можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(u_4') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^2 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_4') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^2 \otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=2}^{s-1}(i+1)\eta^i \otimes \eta^{s-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Теперь доказательство предложения 4.18 завершается аналогично доказательству предложения 4.1. □

Предложение 4.20. *Предположим, что k чётно, а s нечётно. Множество $\mathcal{Y}_4$ из* (4.52) *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству предложения 4.5; детали вычислений мы оставляем читателю. □

Пусть $\mathcal{A}_4 = K[\mathcal{X}_4]/I_4$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 3, где $\mathcal{X}_4$ из (3.39), а I_4 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.18 и 4.20 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_4 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_4$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_4$. Пусть $\mathcal{A}_4 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_4^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_4$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (4) теоремы 3.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.21. *Для любого $m \geqslant 0$*

$$\dim_K \mathcal{A}_4^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству предложения 4.9. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_4]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$v_2 > u_4' > u_2'' > u_2' > u_1 > w > v_1 > p_4 > p_3 > p_2 > p_1.$$

Затем рассматриваем следующий список элементарных шагов редукции:

$$\begin{aligned} &p_2^s \mapsto p_1^k, && p_1u_2'' \mapsto p_1u_2', \\ &p_3u_2' \mapsto p_4u_1, && u_2''v_2 \mapsto p_4w. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству предложения 4.9 определяется нормальная форма элементов из $\mathcal{A}_4$ (относительно описанных выше элементарных шагов редукции) и устанавливается, что любой элемент $a \in \mathcal{A}_4$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_4^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_4^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_4^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.58}$$

С помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени $6m$ ($m \geqslant 0$):

$$\Big\{v_1^{3(m-r)-1}v_2w^{2r}\Big\}_{r=0}^{m-1}, \Big\{u_2''v_1^{3(m-r)-2}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\Big\{u_1^{2r+1}u_2'v_1^{3m-r-1}\Big\}_{r=0}^{3m-1}, \Big\{u_1^{2r}v_1^{3m-r}\Big\}_{r=1}^{3m},$$
$$\Big\{p_3u_1^{2r}v_1^{3m-r}\Big\}_{r=0}^{3m}, \Big\{p_4u_1^{2r}v_1^{3m-r}\Big\}_{r=0}^{3m},$$
$$\Big\{v_1^{3(m-r)}w^{2r}\Big\}_{r=1}^{m}, \Big\{p_4v_1^{3(m-r)}w^{2r}\Big\}_{r=1}^{m},$$
$$\Big\{p_1^iv_1^{3m}\Big\}_{i=0}^{k-1}, \Big\{p_2^iv_1^{3m}\Big\}_{i=1}^{s-1};$$

(их количество равно $16m + k + s + 1$);

мономы степени $6m + 1$:

$$\Big\{v_1^{3(m-r)-2}v_2w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m-1}, \Big\{u_2''v_1^{3(m-r)}w^{2r}\Big\}_{r=0}^{m}, \Big\{u_1^{2r}u_2'v_1^{3m-r}\Big\}_{r=1}^{3m},$$
$$\Big\{u_1^{2r+1}v_1^{3m-r}\Big\}_{r=0}^{3m}, \Big\{p_3u_1^{2r+1}v_1^{3m-r}\Big\}_{r=0}^{3m}, \Big\{p_4u_1^{2r+1}v_1^{3m-r}\Big\}_{r=0}^{3m},$$
$$\Big\{v_1^{3(m-r)-1}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m-1}, \Big\{p_4v_1^{3(m-r)-1}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\Big\{p_1^iu_2'v_1^{3m}\Big\}_{i=0}^{k-1}, \Big\{p_2^iu_4'v_1^{3m}\Big\}_{i=0}^{s-2};$$

(их количество равно $16m + k + s + 3$);

мономы степени $6m + 2$:

$$\Big\{v_1^{3(m-r)}v_2w^{2r}\Big\}_{r=0}^{m}, \Big\{u_2''v_1^{3(m-r)-1}w^{2r+1}\Big\}_{r=0}^{m-1}, \Big\{u_1^{2r+1}u_2'v_1^{3m-r}\Big\}_{r=0}^{3m},$$
$$\Big\{u_1^{2r}v_1^{3m-r+1}\Big\}_{r=1}^{3m+1}, \Big\{p_3u_1^{2r}v_1^{3m-r+1}\Big\}_{r=0}^{3m+1}, \Big\{p_4u_1^{2r}v_1^{3m-r+1}\Big\}_{r=0}^{3m+1},$$
$$\Big\{v_1^{3(m-r)+1}w^{2r}\Big\}_{r=1}^{m}, \Big\{p_4v_1^{3(m-r)+1}w^{2r}\Big\}_{r=1}^{m},$$
$$\Big\{p_1^iv_1^{3m+1}\Big\}_{i=0}^{k-1}, \Big\{p_2^iv_1^{3m+1}\Big\}_{i=1}^{s-1};$$

(их количество равно $16m + k + s + 6$);

мономы степени $6m+3$:

$$\begin{gathered}
\left\{v_1^{3(m-r)-1}v_2w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m-1}, \left\{u_2''v_1^{3(m-r)+1}w^{2r}\right\}_{r=0}^{m},\\
\left\{u_1^{2r}u_2'v_1^{3m-r+1}\right\}_{r=1}^{3m+1}, \left\{u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+1}\right\}_{r=0}^{3m+1},\\
\left\{p_3u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+1}\right\}_{r=0}^{3m+1}, \left\{p_4u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+1}\right\}_{r=0}^{3m+1},\\
\left\{v_1^{3(m-r)}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m}, \left\{p_4v_1^{3(m-r)}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m},\\
\left\{p_1^iu_2'v_1^{3m+1}\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{p_2^iu_4'v_1^{3m+1}\right\}_{i=0}^{s-2};
\end{gathered}$$

(их количество равно $16m+k+s+9$);

мономы степени $6m+4$:

$$\begin{gathered}
\left\{v_1^{3(m-r)+1}v_2w^{2r}\right\}_{r=0}^{m}, \left\{u_2''v_1^{3(m-r)}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m},\\
\left\{u_1^{2r+1}u_2'v_1^{3m-r+1}\right\}_{r=0}^{3m+1}, \left\{u_1^{2r}v_1^{3m-r+2}\right\}_{r=1}^{3m+2},\\
\left\{p_3u_1^{2r}v_1^{3m-r+2}\right\}_{r=0}^{3m+2}, \left\{p_4u_1^{2r}v_1^{3m-r+2}\right\}_{r=0}^{3m+2},\\
\left\{v_1^{3(m-r)+2}w^{2r}\right\}_{r=1}^{m}, \left\{p_4v_1^{3(m-r)+2}w^{2r}\right\}_{r=1}^{m},\\
\left\{p_1^iv_1^{3m+2}\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{p_2^iv_1^{3m+2}\right\}_{i=1}^{s-1};
\end{gathered}$$

(их количество равно $16m+k+s+11$);

мономы степени $6m+5$:

$$\begin{gathered}
\left\{v_1^{3(m-r)}v_2w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m}, \left\{u_2''v_1^{3(m-r)+2}w^{2r}\right\}_{r=0}^{m},\\
\left\{u_1^{2r}u_2'v_1^{3m-r+2}\right\}_{r=1}^{3m+2}, \left\{u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+2}\right\}_{r=0}^{3m+2},\\
\left\{p_3u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+2}\right\}_{r=0}^{3m+2}, \left\{p_4u_1^{2r+1}v_1^{3m-r+2}\right\}_{r=0}^{3m+2},\\
\left\{v_1^{3(m-r)+1}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m}, \left\{p_4v_1^{3(m-r)+1}w^{2r+1}\right\}_{r=0}^{m},\\
\left\{p_1^iu_2'v_1^{3m+2}\right\}_{i=0}^{k-1}, \left\{p_2^iu_4'v_1^{3m+2}\right\}_{i=0}^{s-2};
\end{gathered}$$

(их количество равно $16m+k+s+14$).

Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму.

С учётом результатов предложения 2.8 и следствий 2.7 и 2.9 получаем равенство (4.58). □

Список литературы

1. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* IV. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 67–104.
2. Th. Holm, *Derived equivalent tame blocks.* — J. Algebra **194** (1997), 178–200.
3. Th. Holm, *Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type.* — J. Algebra **221** (1999), 159–205.
4. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 1428, Berlin, Heidelberg, 1990.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* I. *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16**, No.6 (2004), 53–122.
6. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.
8. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* V. *Серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 74–102.
9. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* VI. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,1)$. — Алгебра и анализ **27**, No. 6 (2015), 89–116.
10. А. И. Генералов, М. А. Филиппов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* VII. *Серия* $D(3\mathcal{R})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 53–81.
11. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21**, No.2 (2009), 1–51.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 144–202.
13. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* III. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **400** (2012), 133–157.
14. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* IV. *Алгебра когомологий для серии* $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ *при* $c=0$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 45–92.
15. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* V. *Серия* $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 5–32.

16. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* VI. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **443** (2016), 61–77.
17. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* VII. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **452** (2016), 52–69.
18. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *О производной эквивалентности алгебр полудиэдрального типа с двумя простыми модулями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **452** (2016), 70–85.
19. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* VIII. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_1$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 35–52.
20. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* I. *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18**, No. 1 (2006), 55–107.
21. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* II. *Серия* $Q(2\mathcal{B})_1$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
22. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
23. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия* $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ *над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 63–72.
24. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
25. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
26. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 210–246.
27. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
28. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
29. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 100–128.
30. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 48–99.
31. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Алгебра и анализ **23**, No. 5 (2011), 99–139.
32. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 100–118.
33. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 394 (2011), 140–173.

34. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* E_6. — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 205–243.
35. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18**, No. 4 (2006), 39–82.
36. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19**, No. 5 (2007), 70–123.
37. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца полудиэдральной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 119–151.

Generalov A. I., Kosovskaia N. Yu. Hochschild cohomology of algebras of dihedral type. VIII. The Hochschild cohomology algebra for the family $D(2\mathcal{B})(k, s, 0)$ in characteristic 2.

We describe the Hochschild cohomology algebra for algebras of dihedral type in the subfamily of the family $D(2\mathcal{B})$, for which the parameter c is equal to 0. In the calculation of multiplication in this cohomology algebra, we use the minimal bimodule projective resolution for the algebras under consideration that was constructed in the previous paper of the authors. The obtained results allow us to describe the Hochschild cohomology algebra also for algebras in the family $D(2\mathcal{A})$ for which $c = 0$.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `ageneralov@gmail.com`
E-mail: `nadyakosovsk@mail.ru`

Поступило 8 октября 2018 г.