Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 469, 2018 г.

А. Л. Смирнов

КУММЕРОВА БАШНЯ И БОЛЬШИЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

Введение

С точки зрения арифметической геометрии алгебраическое число следует рассматривать как аналог рациональной функции на алгебраической кривой. Такая функция представляет собой отображение подходящей модели кривой в проективную прямую и для такого отображения имеется формула Гурвица. Частично эту конструкцию можно провести и в арифметике (см. [1]). При этом вместо формулы удается выписать гипотетические неравенства. Заманчиво предположить, что эти неравенства получаются ослаблением точной формулы. В геометрической формуле Гурвица происходит суммирование по нулям дифференциала функции. В арифметике роль нулей дифференциала da, где, скажем, $a \in \mathbb{Q}$, играют сингулярные простые числа (при желании их можно назвать простыми Вифериха), то есть такие p, что

$$a^p = a \mod p^2.$$

Гипотетическая формула Гурвица должна содержать ряд по сингулярным простым. Эти числа, однако, с трудом поддаются изучению. Например, для $a = 2$, несмотря на обширные вычисления, найдено только два таких числа: 1093 and 3511. Ряды по простым числам естественно возникают из логарифмических производных эйлеровых произведений. Чтобы погрузить сингулярные простые в этот контекст, рассмотрим поля $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[m]{1}, \sqrt[m]{a})$. Для сингулярного простого p поле K_p должно иметь меньшее ветвление, чем для общего p. Неформально говоря, зануление da в точке p означает близость a к “константам”, то есть к корням из единицы, в окрестности точки p, а это ловится ветвлением. Таким образом, сингулярные простые числа отражаются на дискриминантах полей K_p, а дискриминант появляется в функциональном уравнении для ζ-функции Дедекинда.

Ключевые слова: арифметическая формула Гурвица, большая дзета-функция, Виферих.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-01-00750).

Далее, чтобы вовлечь в игру все сингулярные простые, мы рассматриваем всю куммерову башню. Дзета-функции, связанные с индивидуальными полями этой башни, желательно организовать в единый ансамбль, который мы и называем большой ζ-функцией. Предложено два кандидата на эту роль (см. 2.2 и 2.3). Один из них связан с подходом Хассе к гипотезе Артина о первообразных корнях, другой – с представлениями группы Галуа куммеровой башни .

Отметим, что дзета-функции для бесконечных башен рассматриваются, например, в работе [4]. Однако применяемые там методы не работают в нашей ситуации. Дело в том, что рассмотренные в этой работе башни относительно слабо разветвлены. Например, речь может идти о башнях, подобных башне Голода–Шафаревича. Куммерова же башня ветвится намного сильнее. Основная причина этого – сильное ветвление круговых расширений. Построение большой дзета-функции для круговой башни представляется важной задачей.

§1. Куммерова башня

Пусть $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0, \pm 1$ и

$$K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[m]{1}, \sqrt[m]{a}) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

На данном этапе хотелось бы рассматривать случай общего положения. Поэтому ограничимся случаем бесквадратного a. Это означает, что $v_p(a) = \pm 1$ или 0 для всякого p. Тогда

$$[K_m : \mathbb{Q}(\sqrt[m]{1})] = m.$$

1.1. Представления группы Галуа. Положим

$$G(m) = \mathrm{Gal}(K_m/\mathbb{Q})$$

и изучим комплексные представления этой группы. Имеется точная последовательность

$$1 \to A(m) \to G(m) \to (\mathbb{Z}/m)^* \to 1,$$

где $(\mathbb{Z}/m)^* = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[m]{1})/\mathbb{Q})$ и $A(m) = \mathrm{Gal}(K_m/\mathbb{Q}(\sqrt[m]{1})$. Поля K_m образуют башню в том смысле, что если m делит n, то $K_m \subset K_n$ и имеется эпиморфизм

$$G(n) \to G(m).$$

Это позволяет всякое представление $G(m)$ рассматривать и как представление $G(n)$.

Теорема 1.1.1. *Неприводимые комплексные представления группы $G(m)$ устроены следующим образом.*

(1) *Для каждого d, делящего m, имеется представление ρ_d. Это представление пропускается через редукцию $G(m) \to G(d)$ и является единственным неприводимым представлением $G(d)$ размерности $\varphi(d)$ (у всех остальных неприводимых представлений $G(d)$ размерность меньше).*

(2) *Пусть $X(d)$ – группа характеров для $(\mathbb{Z}/d)^*$. Эти характеры рассматриваются как характеры $G(d)$ с помощью естественной проекции $G(d) \to (\mathbb{Z}/d)^*$. Редукция $(\mathbb{Z}/m)^* \to (\mathbb{Z}/d)^*$ индуцирует вложение $X(d) \subset X(m)$. Стабилизатор ρ_d при естественном действии $X(m)$ подкрутками совпадает с $X(d)$. Таким образом, орбита ρ_d отождествляется с $X(m)/X(d)$.*

(3) *Множество неприводимых представлений $G(m)$ является (дизъюнктным) объединением орбит ρ_d, где d пробегает все делители m.*

1.1.1. *Пример.* Перечислим неприводимые представления $G(m)$ для $m = 3$, 6 и 9. Представление ρ_1 обозначено 1.

$m = 3$ dim = 1: $1, \chi$,
dim = 2: ρ_3.
$m = 6$ dim = 1: $1, \chi, \rho_2, \rho_2 \otimes \chi$,
dim = 2: ρ_3, ρ_6.
$m = 9$ dim = 1: $1, \chi, \chi_9, \chi_9^2, \chi\chi_9, \chi\chi_9^2$,
dim = 2: ρ_3, $\rho_3\chi\chi_9$, $\rho_3\chi\chi_9^2$,
dim = 6: ρ_9.

Теорема 1.1.2. *Если m и n взаимно просты, то*

$$\rho_m \otimes \rho_n = \rho_{mn}.$$

При этом речь идет о представлениях $G(mn)$ или $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$.

Доказательства теорем 1.1.1 и 1.1.2 прямолинейны и не приводятся.

1.2. Дискриминанты. Прежде всего свяжем ветвление полей K_m с сингулярными простыми числами.

Теорема 1.2.1. *Пусть p – простое число и $v_p(a) = 0$. Тогда p сингулярно для a, то есть $a^p = a \mod p^2$, если и только если K_p не разветвлено над $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$ в единственной точке π, лежащей над p.*

Вычислим дискриминант Δ_q поля K_q в предположении, что q простое. Будем различать три ситуации. Назовем p типичным (для данных a и q), если $v_p(a) = 0$ и $a^p \neq a \mod p^2$. Назовем p специальным, если $v_p(a) \neq 0$. Наконец, назовем p сингулярным, если $v_p(a) = 0$ и $a^p = a \mod p^2$.

Теорема 1.2.2. *Пусть a и q фиксированы, а p – произвольное простое число. Тогда*

$$v_p(\Delta_q) = q(q-2) + \begin{cases} q(q-1)^2, & \text{если } p \text{ – типичное;} \\ (q+1)(q-1)^2, & \text{если } p \text{ – специальное;} \\ 0, & \text{если } p \text{ – сингулярное.} \end{cases}$$

Доказательства теорем 1.2.1 и 1.2.2 не приводятся. Они основаны на следующих локальных вычислениях. Пусть $k = \mathbb{Q}_q(\varepsilon)$, где ε корень q-той степени из 1, $a \in k^*$. Мы собираемся описать ветвление поля $l = k(\alpha)$, где $\alpha^q = a$. Пусть $A = \mathrm{Gal}(l/k)$, $C = k^*/(k^*)^q$, а C_i – образ $U_i(k)$ в C. Тогда

$$C = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_{q-1} \supset C_q \supset C_{q+1} = 1,$$

причем

$$\begin{aligned} C_0/C_1 = \mathbb{Z}/q, C_1/C_2 = U_1(k)/U_2(k) = \mathbb{F}_q, \ldots, C_{q-1}/C_q \\ = \mathbb{F}_q, C_q/C_{q+1} = \mathbb{Z}/q. \end{aligned}$$

Начнем с рассмотрения специального случая. Так как при вычислении глобальных дискриминантов мы интересуемся только бесквадратными a, то можно считать, что $v(a) = 1$. В этом случае пусть $\Pi = \pi/\alpha$ где $\pi = \varepsilon - 1$ – униформизующий элемент для поля k. Тогда $v_l(\Pi) = v_l(\pi) - v_l(\alpha) = v_l(\pi) - v_k(a) = q - (q-1) = 1$. Таким образом, Π – образующая $\mathcal{O}_l$ над $\mathcal{O}_k$. Знание образующей позволяет вычислить фильтрационную функцию (см. [5]). А именно, $i(\sigma) = v_l(\Pi^\sigma - \Pi) = v_l(\pi\alpha^{-1}\varepsilon^{-1} - \pi\alpha^{-1}) = 1 + q$. Таким образом, нижняя фильтрация A устроена так: $\mathbb{Z}/q = A_0 = ... = A_q \supset A_{q+1} = 1$. В частности, дифферента $\mathcal{D}(l/k)$ может быть вычислена (см. [5]) по формуле

$$v_l(\mathcal{D}(l/k)) = \sum_{j=0}^{\infty}(|A_j| - 1) = (q+1)(q-1).$$

Так как дискриминант $\Delta(l/k)$ поля l над k является нормой от дифференты, то $v_k(\Delta(l/k)) = (q+1)(q-1)$. Таким образом, в рассматриваемом специальном случае

$$v_q(\Delta(l/\mathbb{Q}_q)) = (q+1)(q-1)(q-1) + q(q-2) = q^3 - 3q + 1.$$

Рассмотрим теперь типичный случай, то есть случай, когда $v(a) = 0$ и $a^p \neq a \mod p^2$. В этом случае нижняя фильтрация на группе A имеет вид $\mathbb{Z}/q = A_0 = ... = A_{q-1} \supset A_q = 1$. Поэтому $v_l(\mathcal{D}(l/k)) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}(|A_j| - 1) = q(q-1)$ и $v_k(\Delta(l/k)) = q(q-1)$. Таким образом, в типичном случае $v_q(\Delta(l/\mathbb{Q}_q)) = q(q-1)(q-1) + q(q-2) = q^3 - q^2 - q$.

Рассмотрим теперь сингулярный случай, то есть случай, когда $v(a) = 0$ и $a^p = a \mod p^2$. В этом случае a является q-той степенью и $l = k$. Поэтому $v_q(K_q/\mathbb{Q}) = q(q-2)$.

1.3. Характеры Артина и Суона. Мы собираемся изучать ζ-функции, связанные с куммеровой башней. В функциональное уравнение для таких функций входит дискриминант и, следовательно, сингулярные простые числа. С другой стороны, ζ-функция Дедекинда представляет собой произведение L-рядов Артина, связанных с представлениями группы Галуа. Представления группы Галуа и ветвление тесно связаны с помощью характеров Артина и Суона. Поэтому целесообразно вычислить эти представления для поля K_m.

Ограничимся случаем поля K_q для простого q. Из знания неприводимых представлений видим, что

$$\zeta(K_q, s) = \zeta(\mathbb{Q}(\sqrt[q]{1}), s) L_\rho(\mathbb{Q}(\sqrt[q]{1}), s)^{q-1},$$

где ρ – единственное неприводимое представление группы $G = G(q)$ размерности $(q-1)$ (см. теорема 1.1.1). Пусть

$$\chi_\rho \text{ – характер представления } \rho.$$

Для группы Галуа расширений локальных и глобальных полей определены локальные и глобальные кондукторы ее представлений (см. [5, VI.4.4]). Рассмотрим локальный случай. Пусть $k = \mathbb{Q}_q(\sqrt[q]{1})$, $a \in k^*$, $\alpha^q = a$, $l = k(\alpha)$, $G = \mathrm{Gal}(l/\mathbb{Q}_q)$. Предположим, что $G = G(q)$. По определению

$$\mathrm{Cond}(\chi_\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i}{g_0}(\chi_\rho(1) - \chi_\rho(G_i)),$$

где $G \supset G_0 \supset G_1 \supset \dots$ – нижняя фильтрация, а $\chi(G_i)$ – среднее значение χ на G_i. В нашей ситуации фильтрация имеет вид $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 = 1$. Поэтому

$$\mathrm{Cond}(\chi_\rho) = ((q-1) - \chi_\rho(G)) + \frac{1}{q-1}((q-1) - \chi_\rho(G_1))$$

Не сложно проверить, что $\chi_\rho(G) = \chi_\rho(G_1) = 0$. Поэтому

$$\mathrm{Cond}(\chi_\rho) = q.$$

Кроме того, определены характеры Артина a_G и Суона b_G (см. [5, VI.4.3]). Знание нижней фильтрации позволяет увидеть, что

$$a_G = \chi_{\mathrm{reg}} - 1 + \chi_\rho, \quad b_G = \chi_\rho.$$

§2. Дзета-функции

Для поля алгебраических чисел K пусть $Z(s) = G_1(s)^{r_1} G_2(s)^{r_2} \zeta_K(s)$, где $G_1(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $G_2(s) = (2\pi)^{-s/2}\Gamma(s)$, r_1 – число вещественных вложений K, r_2 – половина числа комплексных вложений. Тогда $Z(s) = |D|^{\frac{1}{2}-s} Z(1-s)$, где D – дискриминант K. Таким образом,

$$\log |D|^{\frac{1}{2}} = \frac{\log Z(s) - \log Z(1-s)}{1-2s}. \tag{1}$$

Как мы видели выше (см. 1.2), сингулярные простые числа “ловятся” дискриминантами полей K_m. Ввиду (1) они “ловятся” и ζ-функциями полей K_m. Если хочется поймать все сингулярные простые сразу, то естественно попробовать организовать ζ-функции всех полей K_m в нечто единое. Это нечто и будем называть большой ζ-функцией. Ниже обсуждаются два кандидата на эту роль.

Так как планируется примененить большую ζ-функцию для получения арифметической формулы Гурвица, то сначала приведем правдоподобное, но некорректное рассуждение, “доказывающее” формулу Гурвица для кривых над конечными полями. Это рассуждение примечательно тем, что оно опирается только на ζ-функцию Хассе–Вейля и ее свойства.

2.1. Правдоподобное “доказательство” формулы Гурвица. Пусть X и Y – полные гладкие алгебраические кривые над $\mathbb{F}_q$. Рассмотрим конечное отображение $a : X \to Y$. По определению

$$\zeta_X(s) = \prod_P \frac{1}{1 - q^{-s \deg P}}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{-d\log\zeta_X}{d\log t} = \sum_P \frac{\deg P\cdot q^{-s\deg P}}{1-q^{-s\deg P}} \qquad (t=q^{-s}).$$

Положим

$$RH(s) = \deg a\frac{-d\log\zeta_Y}{d\log t} - \frac{-d\log\zeta_X}{d\log t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} RH(s) &= \deg a\sum_{Q\in Y}\frac{\deg Q\cdot q^{-s\deg Q}}{1-q^{-s\deg Q}} - \sum_{P\in X}\frac{\deg P\cdot q^{-s\deg P}}{1-q^{-s\deg P}} \\ &= \sum_Q\sum_{P\mapsto Q}\Big(\frac{e_P\deg P\cdot q^{-s\deg Q}}{1-q^{-s\deg Q}} - \frac{\deg P\cdot q^{-s\deg P}}{1-q^{-s\deg P}}\Big) \\ &= \sum_Q\sum_{P\mapsto Q}\deg P\cdot\Big((e_P-1)\frac{q^{-s\deg Q}}{1-q^{-s\deg Q}} + \frac{q^{-s\deg Q}}{1-q^{-s\deg Q}} \\ &\qquad\qquad - \frac{q^{-s\deg P}}{1-q^{-s\deg P}}\Big). \end{aligned}$$

Далее

$$\frac{q^{-s\deg P}}{1-q^{-s\deg P}} \to \begin{cases} 0, & \text{если } s\to+\infty; \\ -1, & \text{если } s\to-\infty. \end{cases}$$

Поэтому

$$RH(s) \to \begin{cases} 0, & \text{если } s\to+\infty; \\ \sum(e_P-1)\deg P, & \text{если } s\to-\infty. \end{cases}$$

С другой стороны, имеется функциональное уравнение

$$\zeta_X(1-s) = q^{\chi(X)(1/2-s)}\zeta_X(s).$$

Переходя к логарифмической производной, получаем

$$\frac{-d\log}{d\log t}\zeta_X(1-s) = \frac{-d\log}{d\log t}\zeta_X(s) + \chi(X).$$

Отсюда получаем функциональное уравнение

$$RH(1-s) = RH(s) + n\chi(Y) - \chi(X).$$

Отсюда видим, что

$$\lim_{s\to-\infty} RH(s) = \lim_{s\to+\infty} RH(s) + n\chi(Y) - \chi(X).$$

Сравнивая с прямым вычислением, получим

$$n\chi(Y) - \chi(X) = \sum (e_P - 1) \deg P.$$

Эта формула верна и совпадает с формулой Гурвица, если у отображения $a : X \to Y$ отсутствует дикое ветвление.

2.2. Подход Хассе к гипотезе Артина. Гипотеза Артина о первообразных корнях предсказывает плотность множества тех простых, по модулю которых рациональное число a является первообразным корнем. При попытке Хассе найти подход к гипотезе Артина (см. [2]) естественно возник ряд

$$\sum_q \frac{1}{k_q} \frac{\log \zeta(X_q, s)}{\log \zeta(s)}, \tag{2}$$

где $X_q = \operatorname{Spec} \mathcal{O}(K_q) - \operatorname{Supp}(a) - \{q\}$, $k_q = [K_q : \mathbb{Q}]$. Хассе предположил, что ряд (2) равномерно сходится вблизи $s = 1$, и вывел из этого предположения гипотезу Артина. Гипотеза Артина, вероятно, не верна в исходном виде. Эвристически это объяснено в [3]. Более того, в [6] из верности обобщенной гипотезы Римана для всех полей куммеровой башни выведена скорректированная гипотеза Артина. Это означает, что, видимо, не верна и гипотеза Хассе. Несмотря на это, ряд Хассе может представлять интерес в связи с попытками предъявить кандидата на роль большой ζ-функции.

Отметим сначала, что гипотеза Артина погружена в тот же контекст, что и гипотетическая арифметическая фомула Гурвица. В обоих случаях фиксируется $a \in \mathbb{Q}$; в обоих случаях важно предположить, что $a \neq 0, \pm 1$; в обоих случаях важно рассматривать куммерову башню и связанные с ней ζ-функции.

Кроме того, отметим, что неестественно ограничиваться K_m только для простых m, так как они не ловят порядок нулей дифференциала $d(a)$. Однако кажется разумным в качестве m ограничиться только степенями простых чисел. Таким образом, рассуждения Хассе наводят на мысль рассмотреть функцию

$$h_a(s,t) = \sum_q \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{q^{rt}} \frac{\log \zeta(K(q^r), s)}{\varphi(q^r)}.$$

О свойствах этой функции практически ничего не известно.

2.3. Большая дзета-функция. Среди неприводимых представлений группы $G(m)$ имеется единственное представление ρ_m размерности $\varphi(m)$, которое не приходит с помощью редукции и подкруток на характеры (см. теор. 1.1.1). Для группы $\mathrm{Gal}\,\mathbb{Q}$ рассмотрим виртуальное представление

$$\rho(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_m}{m^t}.$$

Так как $\rho_{mn} = \rho_m \otimes \rho_n$ для взаимно простых m и n (см. теорема 1.1.2), то

$$\rho(t) = \prod_q \rho(q,t), \text{ где } \rho(q,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho_{q^r}}{q^{rt}}.$$

Положим

$$\zeta_a(t,s) = \zeta(\rho(t),s) = \prod_{m=1}^{\infty} \zeta(\rho_m,s)^{m^{-t}}.$$

О свойствах этой функции также практически ничего не известно.

Список литературы

1. А. Л. Смирнов, *Неравенства Гурвица для числовых полей.* — Алгебра и анализ, **4**, No. 2 (1992).
2. H. Hasse, *Über die Artinische Vermutung und verwandte Dichtefragen.* — Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. J. Math-Phys., **116** (1952), 3–17.
3. D. Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory.*, — Chelsia Publishing Company, N.Y., 1978.
4. M. A. Tsfasman, S. G. Vladut, *Infinite global fields and the generalized Brauer–Siegel theorem.* — Moscow Math. J., **2**, No. 2 (2002), 329–402.
5. Дж. Касселс, А. Фрелих, *Алгебраическая теория чисел.* — Мир, 1969.
6. C. Hooley, *On Artin's conjecture.* — J. Für die Reine und Angew. Math., **225** (1967), 209–220.

Smirnov A. L. Kummer's tower and big zeta-functions.

The statement of the problem to construct a big zeta function is discussed. This problem is related to an arithmetic Hurwitz formula. Two pretenders to play the role of the big zeta are suggested. Representations and ramification structures, related to Kummer's tower, are studied.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 1 сентября 2018 г.