Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 469, 2018 г.

Н. В. Проскурин

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ В КОНТЕКСТЕ КОНЕЧНЫХ ПОЛЕЙ

Светлой памяти Олега Мстиславовича Фоменко

1. Введение. Можно заметить, что некоторые классические уравнения и краевые задачи математической физики могут быть интерпретированы в рамках теории комплексных функций на конечных полях. В этом контексте, мы рассмотрим уравнение колебания струны и выведем аналоги формул Даламбера. О комплексных функциях на конечных полях см. [1–3].

2. Обозначения и основные функции. С простым числом p, рассмотрим поле $\mathbb{F}_q$ из $q = p^l$ элементов с простым подполем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Пусть $\widehat{\mathbb{F}}_q^\star$ – группа мультипликативных характеров поля $\mathbb{F}_q$, то есть группа гомоморфизмов $\chi\colon \mathbb{F}_q^\star \to \mathbb{C}^\star$ из мультипликативной группы $\mathbb{F}_q^\star$ поля $\mathbb{F}_q$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}^\star$ поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть ϵ – тривиальный характер, $\epsilon(x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{F}_q^\star$. Продолжим каждый мультипликативный характер χ на всё поле $\mathbb{F}_q$ посредством $\chi(0) = 0$. В частности, положим $\epsilon(0) = 0$.

Положим $\delta(0) = \delta(\epsilon) = 1$ и $\delta(x) = \delta(\chi) = 0$ для всех других $x \in \mathbb{F}_q$ и $\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$. При этом, заметим, имеется разложение единицы $\delta(x)+\epsilon(x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{F}_q$.

Пусть $e_q\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\star$ – нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbb{F}_q$. С некоторым $h \in \mathbb{F}_q^\star$, имеем $e_q(x) = \exp\bigl(2\pi i\,\mathrm{tr}(hx)/p\bigr)$ для всех $x \in \mathbb{F}_q$. Здесь $\mathrm{tr}\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$ обозначает след, $\mathrm{tr}(z) = z + z^p + \ldots + z^{p^{l-1}}$. Характер фиксирован на протяжении всей статьи. Каждый аддитивный характер поля $\mathbb{F}_q$ есть функция $z \mapsto e_q(kz)$ с некоторым $k \in \mathbb{F}_q$. По функции e_q определяются вещественные функции $\cos_q$ и $\sin_q$ таким образом, что

$$\cos_q(x) = \frac{e_q(x) + e_q(-x)}{2}, \qquad \sin_q(x) = \frac{e_q(x) - e_q(-x)}{2i}, \tag{1}$$
$$e_q(x) = \cos_q(x) + i\sin_q(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{F}_q.$$

Ключевые слова: конечные поля, волновое уравнение, струна.

Рассмотрим комплексное векторное пространство Ω_q функций $\mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in\mathbb{F}_q} f(x)\overline{g(x)} \quad \text{для всех} \quad f, g \in \Omega_q.$$

Размерность пространства Ω_q равна q. Мультипликативные характеры вместе с определённой выше функцией $\delta\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ составляют ортогональный базис пространства Ω_q. Аддитивные характеры также составляют ортогональный базис пространства Ω_q. Более подробно, для всех $a, b, c \in \mathbb{F}_q$ и $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$ имеют место соотношения ортогональности

$$\frac{1}{q}\sum_{z\in\mathbb{F}_q} e_q(az)\overline{e_q(bz)} = \delta(a-b), \qquad \frac{1}{q-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^\star} \alpha(x)\overline{\beta(x)} = \delta(\alpha\overline{\beta}) \tag{2}$$

и равенство

$$\frac{1}{q-1}\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}}_q^\star} \chi(c) = \delta(1-c). \tag{3}$$

О конечных полях см. [4–6].

3. Суммы Гаусса. Характеру $\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$ и элементу $c \in \mathbb{F}_q$ сопоставим суммы Гаусса

$$G(\chi) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^\star} e_q(x)\,\chi(x), \qquad G(c,\chi) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^\star} e_q(cx)\,\chi(x).$$

Стандартные свойства сумм Гаусса –

$$G(\epsilon) = -1, \quad G(\chi)\,G(\overline{\chi}) = \chi(-1)\,q, \quad |G(\chi)|^2 = q \tag{4}$$

для $\chi \neq \epsilon$. Имеем также, $G(0,\epsilon) = q-1$ и $G(c,\chi) = \overline{\chi}(c)\,G(\chi)$ для всех $c \in \mathbb{F}_q^\star$ и $\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$. О суммах Гаусса см. [5] и [6].

4. Преобразования Фурье. Аддитивное преобразование Фурье функции $F\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ есть функция $\widehat{F}\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ определяемая равенством

$$\widehat{F}(x) = \sum_{y\in\mathbb{F}_q} F(y)e_q(yx) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{F}_q. \tag{5}$$

Имеет место формула обращения

$$F(z) = \frac{1}{q}\sum_{x\in\mathbb{F}_q} \widehat{F}(x)e_q(-xz) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{F}_q. \tag{6}$$

Равенство (6) можно трактовать как разложение функции F по базису состоящему из аддитивных характеров.

Мультипликативное преобразование Фурье функции $F\colon \mathbb{F}_q^\star \to \mathbb{C}$ есть функция $\widehat{F}\colon \widehat{\mathbb{F}}_q^\star \to \mathbb{C}$ определяемая равенством

$$\widehat{F}(\chi) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^\star} F(x)\chi(x) \quad \text{для всех } \chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star. \tag{7}$$

При этом F восстанавливается по $\widehat{F}$ посредством формулы обращения

$$F(z) = \frac{1}{q-1} \sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}}_q^\star} \widehat{F}(\chi)\overline{\chi}(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{F}_q. \tag{8}$$

Формулы (6) и (8) следуют из соотношений ортогональности (2) и (3). Это хорошо известно. Для каждой функции $F\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ имеется разложение подобное (8) с добавлением одного слагаемого –

$$F(z) = F(0)\,\delta(z) + \sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}}_q^\star} C_\chi\,\chi(z) \quad \text{с } C_\chi = \frac{1}{q-1}\,\widehat{F}(\overline{\chi}) \text{ и } z \in \mathbb{F}_q.$$

Например, для всех $z \in \mathbb{F}_q$ имеем

$$e_q(-z) = 1 + \frac{q}{q-1} \sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}}_q^\star} \frac{\chi(z)}{G(\chi)}.$$

Это разложение – аналог разложения экспоненты в ряд Тейлора.

5. Дифференцирование. Сопоставим каждому мультипликативному характеру χ поля $\mathbb{F}_q$ линейный оператор D^χ, который переводит функцию $F \in \Omega_q$ в функцию $D^\chi F \in \Omega_q$, определённую равенством

$$D^\chi F(x) = \frac{1}{G(\overline{\chi})} \sum_{t\in\mathbb{F}_q} \overline{\chi}(t)\,F(x-t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{F}_q. \tag{9}$$

Согласно Эвансу [1], $D^\chi F$ есть производная порядка χ функции F. Если $\chi \neq \epsilon$, можно воспользоваться (4) и переписать (9) как

$$\frac{1}{G(\chi)} D^\chi F(x) = \frac{1}{q} \sum_{t\in\mathbb{F}_q} \overline{\chi}(t)\,F(x+t) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{F}_q.$$

Легко видеть аналогию с интегральной формулой Коши для производных аналитических функций.

Оператор D^χ с $\chi \neq \epsilon$ переводит постоянные функции в нулевую функцию. Имеют место следующие формулы.

$$D^\epsilon F(x) = F(x) - \sum_{t\in\mathbb{F}_q} F(t),$$

$$D^\chi D^{\overline{\chi}} F(x) = F(x) - \frac{1}{q}\sum_{t\in\mathbb{F}_q} F(t), \tag{10}$$

$$D^\alpha D^\beta = D^{\alpha\beta}$$

для всех $F \in \Omega_q$, $x \in \mathbb{F}_q$ и характеров $\alpha, \beta, \chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$ под условиями $\chi \neq \epsilon$, $\alpha\beta \neq \epsilon$. Для любой пары функций $E, F \in \Omega_q$ и всех $x \in \mathbb{F}_q$ и характеров $\nu \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$ имеем формулу интегрирования по частям

$$\sum_{z\in\mathbb{F}_q} E(z)\, D^\nu F(z) = \nu(-1)\sum_{z\in\mathbb{F}_q} F(z)\, D^\nu E(z)$$

и формулу

$$D^\nu EF(x) = \frac{1}{q-1}\sum_{\mu\in\widehat{\mathbb{F}}_q^\star} \frac{G(\bar{\mu})G(\mu\bar{\nu})}{G(\bar{\nu})}\, D^\mu E(x)\, D^{\nu\bar{\mu}} F(x)$$

для ν-ой производной произведения EF функций E и F, аналогичную классической формуле Лейбница. Все эти свойства операторов дифференцирования D^χ можно найти в [1].

Пусть $c \in \mathbb{F}_q^\star$, $d \in \mathbb{F}_q$. Рассмотрим композицию E функции $F\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ с функцией $x \mapsto cx + d$. Другими словами, пусть $E(x) = F(cx + d)$ для всех $x \in \mathbb{F}_q$. Тогда, для любого характера $\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$ и любого $x \in \mathbb{F}_q$ имеем

$$D^\chi E(x) = \chi(c) D^\chi F(cx + d). \tag{11}$$

Эта формула (11) является простейшим аналогом классической формулы для производной сложной функции и следует непосредственно из определения (9) –

$$\begin{aligned} D^\chi E(x) &= \frac{1}{G(\overline{\chi})}\sum_{t\in\mathbb{F}_q} \overline{\chi}(t)\, F\big(c(x-t)+d\big) \\ &= \frac{1}{G(\overline{\chi})}\,\chi(c)\sum_{t\in\mathbb{F}_q} \overline{\chi}(ct)\, F\big((cx+d)-ct\big) \\ &= \frac{1}{G(\overline{\chi})}\,\chi(c)\sum_{z\in\mathbb{F}_q} \overline{\chi}(z)\, F\big((cx+d)-z\big) = \chi(c) D^\chi F(cx+d), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Для нечётного характера χ, оператор D^χ переводит чётные функции в нечётные и переводит нечётные функции чётные. Для чётного характера χ, оператор D^χ сохраняет чётность, – то есть переводит чётные функции в чётные и нечётные функции в нечётные. Это проверяется простым вычислением. Скажем, для чётной функции $F\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ и любого $x \in \mathbb{F}_q$, из (9) следует

$$\begin{aligned} D^\chi F(-x) &= \frac{1}{G(\bar\chi)} \sum_{t\in\mathbb{F}_q} \bar\chi(t)\, F(-x-t) = \frac{1}{G(\bar\chi)} \sum_{t\in\mathbb{F}_q} \bar\chi(t)\, F(x+t) \\ &= \frac{1}{G(\bar\chi)}\, \bar\chi(-1) \sum_{z\in\mathbb{F}_q} \bar\chi(z)\, F(x-z) = \bar\chi(-1)\, D^\chi F(x), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Для $\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$ пусть D_n^χ оператор, сопоставляющий функции нескольких переменных $\mathbb{F}_q \times \ldots \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ частную производную порядка χ по n-ой переменной. С таким соглашением об обозначениях, имеем

$$D_2^\beta D_1^\alpha = D_1^\alpha D_2^\beta$$

для всех характеров $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$. Другими словами, частные производные можно вычислять в произвольном порядке. Более детально, имеем

$$D_2^\beta D_1^\alpha E(x,y) = D_1^\alpha D_2^\beta E(x,y) = \frac{1}{G(\bar\alpha)\, G(\bar\beta)} \sum_{s,t\in\mathbb{F}_q} \bar\alpha(s)\bar\beta(t) E(x-s, y-t)$$

для каждой функции $E\colon \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ и для всех $x, y \in \mathbb{F}_q$. Это следует непосредственно из (9).

Расмотрим несколько примеров. Пусть $c \in \mathbb{F}_q^\star$ и $E(x) = e_q(-cx)$ для всех $x \in \mathbb{F}_q$. Согласно (11), для всех характеров $\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_q^\star$ и всех $x \in \mathbb{F}_q$ имеем

$$D^\chi E(x) = \chi(c)\, e_q(-cx). \tag{12}$$

Из определения (1) и формулы (12) с $c = 1$ следует

$$D^\chi \cos_q = -i \sin_q \quad \text{и} \quad D^\chi \sin_q = i \cos_q \tag{13}$$

для всех нечётных характеров χ, то есть для всех χ с $\chi(-1) = -1$.

6. Уравнение колебания струны. Для пары функций $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и константы $c \in \mathbb{R}$ определим функцию $w\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенством

$$w(x,t) = u(x-ct) + v(x+ct) \quad \text{для всех} \quad x, t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Так построенная функция w удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}, \tag{15}$$

если u и v дважды непрерывно дифференцируемы. Это уравнение известно в математической физике как уравнение колебания струны. Сказать точнее, – уравнение свободных колебаний однородной неограниченной струны. Решение вида (14) известно как решение Даламбера. Оно является общим решением уравнения (15) в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций и может быть использовано для решения различных конкретных задач.

Для пары функций $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши отыскания решения уравнения (15) удовлетворяющего условиям

$$w\Big|_{t=0} = a, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = b. \tag{16}$$

Если a дважды непрерывно дифференцируема и b непрерывно дифференцируема, решение этой задачи единственно и представимо формулой Даламбера –

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\big\{a(x-ct) + a(x+ct)\big\} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} b(y)\,dy \quad \text{для всех } x, t \in \mathbb{R}.$$

Об этом смотрите, например, у Соболева [7].

7. Смена контекста. Среди нетривиальных мультипликативных характеров поля $\mathbb{F}_q$ выберем какой-либо один, обозначим его ρ, и условимся обозначать через D соответствующий ему оператор дифференцирования D^χ с $\chi = \rho$. Будем трактовать D как оператор дифференцирования порядка 1. Вместе с тем, для целого положительного числа n, определим операторы D^n и D^{-n} как композиции n операторов D и, соответственно, D^{-1}. В частности, Df трактуется как (первая) производная, $D^{-1}f$ – как первообразная функции $f\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ и $D^2 f = DDf$.

Далее, применительно к функции от нескольких переменных, скажем $F\colon \mathbb{F}_q \times \ldots \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$, обозначим через $D_k^n F$ результат применения D^n к F по k-ой переменной, то есть частную производную порядка n

по k-ой переменной. В том же смысле мы используем обозначения типа $D_t^n F$, $D_x^n F, \ldots$, если переменные, вместо номеров, имеют обозначения $t, x, \ldots$.

Мы рассмотрим аналог уравнения колебания струны (15) в контексте теории функций на конечных полях.

Теорема 1. *Для любой пары функций $u, v\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ и константы $c \in \mathbb{F}_q^\star$, функция $w\colon \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ определённая равенством*

$$w(x,t) = u(x-ct) + v(x+ct) \quad \text{для всех } \; x, t \in \mathbb{F}_q \tag{17}$$

удовлетворяет уравнению колебания струны

$$D_t^2 w = C D_x^2 w \quad \text{с константой } C = \rho(c)^2. \tag{18}$$

Обратно, если функция $w\colon \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ не постоянна и удовлетворяет уравнению

$$D_t^2 w = C D_x^2 w \quad \text{с} \;\; C \in \mathbb{C}, \; C \neq 0, \tag{19}$$

то $C = \rho(c)^2$ с некоторой константой $c \in \mathbb{F}_q^\star$ и в разложении Фурье

$$w(x,t) = \sum_{m,n \in \mathbb{F}_q} r(m,n) e_q(-mx - nt), \qquad x, t \in \mathbb{F}_q, \tag{20}$$

коэффициенты $r(m,n)$ могут быть $\neq 0$ только если $m = n = 0$ или $\rho(cm/n) = \pm 1$, $mn \neq 0$. В частности, для примитивного характера ρ, эти условия эквивалентны $cm = \pm n$ и функцию w можно представить как в (17), с подходящими u и v.

Доказательство. Разложим функцию $u\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}$ в ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{m \in \mathbb{F}_q} r(m) e_q(-mx) \quad \text{с } \; x \in \mathbb{F}_q \tag{21}$$

и рассмотрим функцию

$$(x,t) \mapsto u(x-ct) = \sum_{m \in \mathbb{F}_q} r(m) e_q(-mx + mct), \qquad x, t \in \mathbb{F}_q. \tag{22}$$

Воспользовавшись формулой (12) для дифференцирования экспоненты находим, что образ (22) под действием оператора D_t^2 есть функция

$$(x,t) \mapsto \sum_{m \in \mathbb{F}_q} r(m) \rho(-mc)^2 e_q(-mx + mct), \qquad x, t \in \mathbb{F}_q. \tag{23}$$

Точно так же, образ (22) под действием D_x^2 есть функция

$$(x,t) \mapsto \sum_{m\in\mathbb{F}_q} r(m)\rho(m)^2 e_q(-mx+mct) \qquad x,t\in\mathbb{F}_q. \tag{24}$$

Заметим, что здесь $\rho(-mc)^2 = \rho(c)^2\rho(m)^2$ для всех $m \in \mathbb{F}_q$. Сравнив разложение (24) с разложением (23) мы обнаруживаем, что функция (22) является решением уравнения (18). Заменив в этом рассуждении u и c на v и $-c$, мы находим, что и функция

$$(x,t) \mapsto v(x+ct), \qquad x,t\in\mathbb{F}_q, \tag{25}$$

является решением уравнения (18). По линейности уравнения (18) и операторов дифференцирования, сумма функций (22) и (25) есть решение уравнения (18), что и требовалось. Тот же результат можно получить и иначе – применением формулы дифференцирования (11) вместо разложений Фурье.

Рассмотрим теперь разложение Фурье (20) функции w, удовлетворяющей уравнению (19), и воспользуемся формулой (12) чтобы получить (почленным дифференцированием) разложения Фурье функций $D_t^2 w$ и $D_x^2 w$. Сравнив коэффициенты Фурье, мы находим, что равенство в (18) эквивалентно системе

$$C\rho(m)^2 r(m,n) = \rho(n)^2 r(m,n) \qquad \text{для всех } m,n\in\mathbb{F}_q. \tag{26}$$

Если $m = 0$ и $n \neq 0$, то $\rho(m) = 0$ и $\rho(n) \neq 0$. Таким образом, из (26) следует $r(0,n) = 0$ для всех $n \neq 0$. Так же устанавливаем, что $r(m,0) = 0$ для всех $m \neq 0$. Далее, поскольку функция w непостоянна, найдётся пара (m',n') с $r(m',n') \neq 0$ и $m'n' \neq 0$. С такой парой (m',n'), из (26) следует $C = \rho(c)^2$ с $c = n'/m'$. Наконец, если $r(m,n) \neq 0$ и $mn \neq 0$, то условие (26) для пары (m,n) можно переписать как $\rho(cm)^2 = \rho(n)^2$, что эквивалентно $\rho(cm/n) = \pm 1$.

Пусть характер ρ примитивен. Если характеристика поля $\mathbb{F}_q$ нечётна и $mn \neq 0$, то условие $\rho(cm/n) = \pm 1$ эквивалентно $n = \pm cm$. При этом, $cm \neq -cm$ для всех $m \neq 0$. В разложении Фурье (20), помимо постоянного члена $r(0,0)$, могут быть отличны от 0 только слагаемые соответствующие парам (m,n) вида $(m,-cm)$ и (m,cm) с $m\in\mathbb{F}_q^\star$. Поэтому из разложения Фурье (20) следует (17) с

$$u(z)=r(0,0)+\sum_{m\in\mathbb{F}_q^\star} r(m,-cm)e_q(-mz), \tag{27}$$

$$v(z)=\sum_{m\in\mathbb{F}_q^\star} r(m,cm)e_q(-mz).$$

Если характеристика поля $\mathbb{F}_q$ равна 2, то характер ρ не принимает значения -1. При этом, если $mn\neq 0$, то условие $\rho(cm/n)=\pm 1$ эквивалентно $n=cm$ и эквивалентно $n=-cm$, так как $cm=-cm$. Опуская детали, укажем, что в этом случае для w получается представление (17) с u из (27) и без второй функции v. □

Теорема 2. *Для поля $\mathbb{F}_q$ нечётной характеристики, примитивного характера ρ, пары функций $a,b\colon \mathbb{F}_q\to\mathbb{C}$ и константы $C=\rho(c)^2$ с $c\in\mathbb{F}_q^\star$, рассмотрим задачу отыскания функции $w\colon \mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}$ удовлетворяющей дифференциальному уравнению*

$$D_t^2 w = C D_x^2 w \tag{28}$$

и условиям Коши

$$w\Big|_{t=0}=a, \qquad D_t w\Big|_{t=0}=b. \tag{29}$$

Эта задача имеет единственное решение и для решения имеет место представление

$$w(x,t)=\frac{a(x+ct)+a(x-ct)}{2}+\bar{\rho}(c)\,\frac{D^{-1}b\,(x+ct)-D^{-1}b\,(x-ct)}{2} \tag{30}$$

для всех $x,t\in\mathbb{F}_q$.

Доказательство. Рассмотрим функцию w, определённую по произвольной паре функций $u,v\colon \mathbb{F}_q\to\mathbb{C}$ формулой (17) в теореме 1. Согласно теореме 1, w является решением уравнения (28) и, более того, каждое решение уравнения (28) представимо таким образом.

Покажем, что w удовлетворяет условиям Коши (29) при надлежащем выборе u и v. Очевидно, первое условие в (29) равносильно

$$u+v=a. \tag{31}$$

Второе условие в (29) перепишем как

$$\rho(-c)Du+\rho(c)Dv=b. \tag{32}$$

Поясним. Подействуем оператором D_t на функцию $(x,t) \mapsto u(x-ct)$ и, затем, положим $t=0$. Получаемая таким образом функция равна $\rho(-c)Du$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию

$$(x,t) \mapsto u(x-ct) = \sum_{m\in\mathbb{F}_q} r(m)e_q(-mx+mct), \qquad x,t\in\mathbb{F}_q, \tag{33}$$

где $r(m)$ – коэффициенты Фурье функции u (как в (21)). По формуле (12) находим, что образ функции (33) под действием D_t есть функция

$$(x,t) \mapsto \sum_{m\in\mathbb{F}_q} r(m)\rho(-mc)e_q(-mx+mct), \qquad x,t\in\mathbb{F}_q.$$

Положив здесь $t=0$, получаем функцию $\rho(-c)Du$. Точно так же, подействовав оператором D_t на функцию $(x,t)\mapsto v(x+ct)$ и положив $t=0$, получим функцию $\rho(c)Dv$. Сложив эти функции находим эквивалентность условия (32) второму условию в (29). Тот же результат можно получить применением формулы (11), без рассмотрения разложений Фурье.

При наших предположениях относительно $\mathbb{F}_q$ и ρ, имеем $\rho(-1)=-1$. Поэтому, (32) эквивалентно

$$-Du+Dv=\bar\rho(c)\,b. \tag{34}$$

Таким образом, для определения функций u и v мы имеем систему уравнений (31), (34). Подействуем оператором D^{-1} на функции в (34). Согласно (10), $D^{-1}Du=u+Q$ и $D^{-1}Dv=v+R$ с некоторыми константами $Q,R\in\mathbb{C}$. Мы находим, что (34) эквивалентно

$$-u+v=\bar\rho(c)D^{-1}b+P \tag{35}$$

с некоторой константой $P\in\mathbb{C}$. Разрешив уравнения (31) и (35) относительно u и v и подставив результат в (17) получаем решение нашей задачи и его представление (30).

Рассмотрим теперь вопрос о единственности. По линейности (28) и (29), достаточно показать, что задача с нулевыми функциями a и b имеет только нулевое решение. Пусть w – решение задачи с нулевыми a и b. Представим w по формуле (17) в теореме 1. Функции u и v должны удовлетворять уравнениям (31), (35) с нулевыми a и b. То есть, должно быть $u+v=0$ и $-u+v=P$ с некоторой константой $P\in\mathbb{C}$. Отсюда следует, что u и v константы и $w=u+v=0$, что и требовалось. $\square$

8. Краевые задачи. В связи с уравнением колебания струны (15) рассматривают множество различных задач. Струна может быть неограниченной (как в 0.6), ограниченной или полуограниченной. При этом, уравнение (15) и начальные условия (16) могут быть дополнены какими-либо краевыми (или граничными) условиями, характеризующими поведение струны на её концах. Уравнение (15) описывает не только колебания струны, но также и продольные колебания стержня и некоторые другие процессы.

Типичный пример – свободные колебания однородной полуограниченной струны. Требуется отыскать функцию $w\colon [0,\infty]\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ удовлетворяющую уравнению (15), граничному условию

$$w\,\Big|_{x=0} = g$$

и условиям Коши (16) с некоторыми $a, b, g\colon [0,\infty]\to\mathbb{R}$.

Ещё один типичный пример – свободные колебания однородной ограниченной струны с концами закреплёнными в фиксированных точках, отнесённых одна от другой на расстояние R. При этом ставится задача отыскания функции $w\colon [0,R]\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ удовлетворяющей уравнению (15), граничным условиям

$$w\,\Big|_{x=0} = 0, \qquad w\,\Big|_{x=R} = 0$$

и условиям Коши (16) с некоторыми $a, b\colon [0,R]\to\mathbb{R}$.

Чтобы сменить контекст и сформулировать подобные задачи применительно к функциям определённым на конечных полях, следует как-то интерпретировать отрезки и полупрямые. Мы можем предложить два достаточно естественных варианта.

(I) Пусть характеристика поля $\mathbb{F}_q$ нечётна. Квадраты группы $\mathbb{F}_q^\star$ составляют её подгруппу $\mathbb{F}_q^{\star 2}$ индекса 2. Примем множества $\mathbb{F}_q^{\star 2}$ и $\mathbb{F}_q^\star\setminus\mathbb{F}_q^{\star 2}$ как аналоги множества положительных и множества отрицательных вещественных чисел. Для каждого $m\in\mathbb{F}_q$, положим

$$(m,\infty) = m + \mathbb{F}_q^{\star 2} \quad \text{и} \quad (-\infty, m) = m + \mathbb{F}_q^\star\setminus\mathbb{F}_q^{\star 2}$$

и будем считать эти множества полупрямыми в $\mathbb{F}_q$, аналогами открытых полупрямых в $\mathbb{R}$. Очевидно, имеем разложение

$$\mathbb{F}_q = (-\infty, m)\cup\{m\}\cup(m,\infty).$$

Положим ещё

$$[m,\infty) = \{m\}\cup(m,\infty) \quad \text{и} \quad (-\infty, m] = (-\infty, m)\cup\{m\},$$

– это тоже полупрямые в $\mathbb{F}_q$, аналоги замкнутых полупрямых в $\mathbb{R}$. Удобно ввести в рассмотрение квадратичный характер κ группы $\mathbb{F}_q^\star$, расширенный до функции на $\mathbb{F}_q$ посредством $\kappa(0)=0$. Для $m,n\in\mathbb{F}_q$, полагаем

$$(m,n)=(-\infty,n)\cap(m,\infty)=\big\{z\in\mathbb{F}_q\,\big|\,\kappa(z-m)=\kappa(n-z)=1\big\}$$

– это аналог открытого ограниченного интервала в $\mathbb{R}$.

(II) Рассмотрим поле $\mathbb{F}_q$ как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$. Мы имеем линейное отображение $\mathrm{tr}\colon\mathbb{F}_q\to\mathbb{F}_p$ с ядром $\mathbb{S}=\{z^q-z\,|\,z\in\mathbb{F}_q\}$. Для $m\in\mathbb{F}_q^\star$, рассмотрим пространство $\mathbb{S}_m=\{mx\,|\,x\in\mathbb{S}\}$, которое можно охарактеризовать как ядро аддитивного характера $z\mapsto\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}(m^{-1}z)/p)$ поля $\mathbb{F}_q$. Функции $\mathbb{F}_q/\mathbb{S}_m\to\mathbb{C}$ можно поднять до функций $\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}$ инвариантных относительно сдвигов на векторы из $\mathbb{S}_m$. В классической ситуации, этому соответствуют интервалы в $\mathbb{R}$, комплексные функции определённые на интервалах и их продолжения до периодических функций на $\mathbb{R}$. Далее можно следовать методу Фурье разделения пременных, чтобы получить представления для решений краевых задач линейными комбинациями тригонометрических функций (1), которые периодичны и обладают всеми необходимыми свойствами, см. (13) и (12).

Список литературы

1. R. J. Evans, *Hermite character sums.* — Pacific J. Math., **122**, No. 2 (1986), 357–390.
2. J. R. Greene, *Hypergeometric functions over finite fields.* — Trans. Amer. Math. Soc., **301**, No. 1 (1987), 77–101.
3. J. R. Greene, *Lagrange inversion over finite fields.* — Pacific J. Math., **130**, No. 2 (1987), 313–325.
4. J.-P. Serre, *A Course d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
5. K. Ireland and M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory.* — Grad. Texts Math., 84, Springer-Verlag (1990).
6. R. Lidl, H. Niederreiter, *Finite fields*, Cambridge University Press, Second edition, 1997.
7. С. Л. Соболев, *Уравнения математической физики*, 4-ое изд., Наука, М. 1966.
8. N. V. Proskurin, *Notes on character sums and complex functions over finite fields*, International conference Polynomial Computer Algebra 2018, St. Petersburg, Russia, VVM Publishing, 97–103, 2018.
9. Н. В. Проскурин, *О некоторых специальных функциях на конечных полях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **468** (2018), 281–286.

Proskurin N. V. String wave equation in finite fields context.

In context of complex functions over finite fields, string wave equation (i.e. one-dimentional wave equation) is considered. Analoques over finite fields are presented for the classical d'Alembert's formulas.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 24 сентября 2018 г.