Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 469, 2018 г.

В. Г. Журавлев

УНИМОДУЛЯРНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ЯДЕРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Введение

0.1. Многомерное обобщение теоремы Лагранжа. Пусть x – произвольная точка с координатами из вещественного пространства $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $F_x = \mathbb{Q}(x)$ расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, получающееся добавлением к нему координат $x_1, \ldots, x_d$ точки x. Определим *степень точки* x над $\mathbb{Q}$, полагая $\deg(x) = \deg F_x$, где справа указана степень $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ поля F_x над полем $\mathbb{Q}$. В [1] было доказано следующее утверждение.

Теорема 0.1. *Пусть точка $x = (x_1, \ldots, x_d)$ будет иррациональной, т.е. числа $1, x_1, \ldots, x_d$ линейно независимы над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$. Если она при этом является неподвижной точкой*

$$\delta(x) = x \tag{0.1}$$

некоторого отображения δ из полугруппы d-мерных возвратных отображений $\mathcal{D}_s$, то ее степень

$$\deg(x) = d + 1. \tag{0.2}$$

Приведенная теорема 0.1 является многомерным обобщением теоремы Лагранжа (см., например, [2]): *иррациональность допускает периодическое разложение в цепную дробь тогда и только тогда, когда она является квадратичной.*

Более точно, равенство (0.2) представляет собою многомерное обобщение первой части теоремы Лагранжа для алгебраических иррациональностей произвольной степени d, т.к. в данном случае неподвижность (0.1) точки x влечет за собою периодичность разложения ее в d-мерную цепную дробь.

Ключевые слова: индуцированные разбиения тора, наилучшие многомерные приближения, теорема Лагранжа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 14-11-00433.

0.2. Разложения единиц алгебраических полей. В [3] была доказана вторая часть обобщения теоремы Лагранжа (см. теорему 0.2 ниже) для некоторого $(d+1)$-параметрического семейста алгебраических иррациональностей, состоящего из точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ с координатами $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}, \dots, \alpha_d = \theta$, где $0 < \theta < 1$ – вещественный корень неприводимого многочлена

$$f(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \tag{0.3}$$

степени $d+1 \geqslant 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \dots$ и со свободным членом $a_0 = -1$. Заметим, что корни θ многочлена (0.3) являются единицами кольца целых чисел $\mathfrak{O}$ вещественного алгебраического поля $\mathbb{Q}(\theta)$ степени $d+1$.

Теорема 0.2. 1. *Существует период $p \geqslant 1$ и такие рекуррентные последовательности Q_a, $R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$ порядка $d+1$ с постоянными коэффициентами, что для всех $i = ap + b$, где $0 \leqslant b < p$, точка*

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q_a\alpha_1 + R_{1,a}, \dots, -Q_a\alpha_d + R_{d,a}) \tag{0.4}$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \text{с минимальным целым} \quad Q_a \geqslant 1. \tag{0.5}$$

где $T^{(i)}$ – явно определяемая последовательность выпуклых d-мерных многогранников, объем которых $s(T^{(i)}) \to 0$ при $i \to +\infty$. Свойство (0.5) *означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$ не попадает*

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j < Q_a \tag{0.6}$$

в многогранник $T^{(i)}$.

2. *Для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ имеют место неравенства*

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + \dots + |Q_a\alpha_d - R_{d,a}| \quad \leqslant c\varrho(\mathbf{A})^a. \tag{0.7}$$

если у некоторой калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ будет простой спектр. Здесь $\varrho(\mathbf{A})$ – спектральный радиус матрицы $\mathbf{A}$ и $c > 0$ – константа, не зависящая от a.

Минимальное свойство (0.5), (0.6) указывает на *наилучшее ядерное приближение* (karyon approximation). Это означает, что точки $v_{\min}^{(i)}$ из (0.4) наилучшим образом приближаются к $0 \bmod \mathbb{Z}^d$ относительно $T^{(i)}$-норм (ядерных норм), в качестве выпуклых тел для которой выбраны выпуклые многогранники $T^{(i)}$ – ядра индуцированных разбиений d-мерного тора $\mathbb{T}^d$.

0.3. Расширения алгебраических единиц. Образовалась триада:

1) неподвижные точки $\alpha = \delta(\alpha)$ возвратных отображений δ из полугруппы $\mathcal{D}_s$;

2) точки α с чисто периодическими разложениями в многомерные цепные дроби;

3) точки α, координаты которых являются алгебраическими единицами $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^d$ степени $d+1$.

Ключевым понятием в указанной триаде является полугруппа возвратных отображений $\mathcal{D}_s$, действующих на d-мерном единичном симплексе $\triangle_d$ с вершинами $(0,\ldots,0)$, $(1,\ldots,0),\ldots$, $(0,\ldots,1)$, т.е. $(\mathcal{D}_s, \triangle_d)$ – некоторая динамическая система. Так, например, если подействовать $\alpha' = \mathfrak{d}(\alpha)$ на точки α отображениями $\mathfrak{d}$ из полугруппы обратных возвратных отображений $\mathfrak{D}_s$, то в теореме 11.1 доказано, что образы α' снова разлагаются, но уже в просто периодические цепные дроби и при этом точки α' продолжают оставаться в симплексе $\triangle_d$.

Чтобы выйти за границы симплекса $\triangle_d$, в работе дополнительно вводится группа $G_0 \subset \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ унимодулярных матриц $U_L = \begin{pmatrix} U & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и L – целочисленный столбец высоты d. Действие группы G_0 на точки x из пространства $\mathbb{R}^d$ задается формулой $U_L x = Ux + L$ и любую иррациональную точку можно группой G_0 перевести в симплекс $\triangle_d$. В теореме 12.1 доказывается, что за образами $\alpha'' = U_L\alpha'$ продолжает сохраняться свойство разложения в периодические цепные дроби.

В цепочке указанных выше преобразований важен порядок

$$\triangle \ni \alpha \quad \xrightarrow{\mathfrak{d}} \quad \alpha' \quad \xrightarrow{U_L} \quad \alpha'' \in \mathbb{R}^d \tag{0.8}$$

Если исходить из фиксированной точки α, то как велико получается множество точек α'' в результате всех возможных преобразований (0.8). В п. 12.2 показано, что частичный ответ могут дать связанные между собою инварианты

$$\deg(\alpha'') = \deg(\alpha), \quad \mathbb{Q}(\alpha'') = \mathbb{Q}(\alpha) \tag{0.9}$$

– степень точек и порождаемое ими алгебраическое поле. Отметим еще, что кроме величин (0.9), сохраняются: рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей $R_{1,a}, \ldots, R_{d,a}$, Q_a подходящих дробей в (0.4), а изменяются только начальные условия; и скорость приближения $\varrho(\mathbf{A})^a$, но не константы в неравенствах (0.7).

0.4. История и методы. Доказательство того, что приближения (0.7) являются наилучшими относительно $T^{(i)}$-норм, опирается на метод дифференцирования индуцированных разбиений многомерных торов [1,4,5]. Теорема 0.2 для приближений кубических иррациональностей была доказана в [6], а для иррациональностей произвольной степени (0.3) в [3].

Полугруппа многомерных возвратных отображений $\mathcal{D}_s$ была введена и изучена в [1,6]. Ранее одномерные возвратные отображения применялись в теории динамических систем [7,8], а двумерные возвратные отображения – для проверки периодичности разложений кубических корней [9] и для приближений кубических иррациональностей [6].

§1. Согласованные множества векторов и их производные

1.1. Согласованные множества векторов. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \ldots, d\}$. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1, \ldots, k'_{d-1}\}$ – дополнительное к σ сочетание в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$.

Определение 1.1. *Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через $H_{\sigma'}$ гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ назовем* согласованным, *если для всех дополнительных к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости $H_{\sigma'}$ и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.*

Определение 1.2. *Любое согласованное множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ из $\mathbb{R}^d$ будем для краткости называть* звездой.

1.2. Производные звезды. Из определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ не принадлежит гиперплоскости $H_{\sigma'}$, где σ' – дополнительное сочетание для σ. Тогда только одно из множеств*

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.1}$$

будет согласованным. Здесь $v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\}$ *или* $v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\}$ *в зависимости от того, какие из пар векторов* v_{k_1}, v_σ *или* v_{k_2}, v_σ *принадлежат разным полупространствам* $H^{\pm}_{\sigma'}$, *и* $v(\sigma')$ *– дополнительное для* $v(\sigma)$ *множество векторов из звезды* v.

Определение 1.3. *Обозначим через* $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$ *то множество векторов из* (1.1), *которое является согласованным. Если существуют множества векторов* v^σ *для всех сочетаний* $\sigma \in \Sigma$, *т.е. для всех* σ *выполняется условие леммы* 1.1, *то будем говорить, что согласованное множество векторов* $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ невырождено *или более кратко – звезда* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.3 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma\}, \tag{1.2}$$

где $v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}$, $v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$ или $v_{k_1}^\sigma = v_\sigma$, $v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$ в зависимости от выполнения условия из (1.1), и $v_{k'}^\sigma = v_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$. Звезду v^σ из (1.2) назовем *σ-производной* невырожденой звезды v.

§2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть $L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_d]$ – полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \ldots, l_d$, т.е. векторы $l_1, \ldots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}_L^d = \mathbb{R}^d/L$, если отображение

$$T \overset{\longrightarrow}{\sim} \mathbb{T}_L^d : \ x \mapsto x \bmod L$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_d \tag{2.1}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{2.2}$$

на векторы $v_0, v_1, \ldots, v_d$, связанные с базисом решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, d. \tag{2.3}$$

В формуле (2.2) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (2.1), где $k = 0, 1, \ldots, d$.

Заметим, что при переходе (2.3) от векторов переклыдывания

$$v_0, v_1, \ldots, v_d$$

к базизу $l_1, \ldots, l_d$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{2.4}$$

В частности, из равенств (2.3) и (2.4) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$. Поэтому перекладывание (2.2) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{2.5}$$

на вектор $\alpha' \bmod L$.

2.2. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \ldots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды

$$\bar{T}_m = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \cdots + \lambda_{k_d} v_{k_d};\, 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{2.6}$$

где $k_1, \ldots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ является звездой (см. определение 1.2), то объединение

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \cup \bar{T}_1 \cup \cdots \cup \bar{T}_d \tag{2.7}$$

параллелепипедов (2.6) образует *параллелоэдр* [10, 11].

Для $d = 2$ параллелоэдр $\bar{T}$ из (2.6) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [12], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [13].

По *i-алгоритму* из [11] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\bar{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_d$, имеющее внутреннюю часть $T^{\mathrm{int}} = (\bar{T})^{\mathrm{int}}$ такую же, как и параллелоэдр (2.7), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{l \in L} T[l], \tag{2.8}$$

т.е. $T[l'] \cap T[l''] = \varnothing$, если $l' \neq l''$. Исходя из i-алгоритма [11], можно считать, что выполняются условия

$$0 \in T_0, \;\; v_0 \in T_1, \;\; v_0 + v_1 \in T_2, \;\; \ldots, \;\; v_0 + v_1 + \cdots + v_{d-1} \in T_d. \tag{2.9}$$

Если дополнительно предположить выполненными условия (2.9), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ ставится в соответствие параллелоэдр

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_d, \tag{2.10}$$

являющийся перекладывающейся разверткой тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_d$ в (2.2).

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^d_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}: \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \tag{2.11}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_L$ с изменяющимися решетками L.

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. $\triangleright$ *Перекладывающаяся развертка T из* (2.1) вкладывается

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.12}$$

в тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. *Подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$ является $\mathcal{L}$-*различимым, *т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение*

$$T \overrightarrow{\sim} T \bmod \mathcal{L}: \quad x \mapsto x \bmod \mathcal{L} \tag{2.13}$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (2.13) *можем считать развертку T вложенной как множество $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$.*

2. *Векторы перекладывания* (2.2) *имеют вид $v_k \equiv m_k\alpha \bmod \mathcal{L}$ для всех $k = 0, 1, \ldots, d$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \ldots$*

3. *Пусть*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \{S^j(T_k); \quad j = 1, \ldots, m_k - 1\} \tag{2.14}$$

обозначает орбиту *подмножества* $T_k \subset T$. *В силу включения* $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *будем полагать* $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. *Тогда по определению считается, что орбиты* (2.14) *удовлетворяют условию* $\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \varnothing$ *для* $k = 0, 1, \ldots, d$. $\lhd$

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (2.14) определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k);\ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \tag{2.15}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ из (2.11) *иррациональным*, когда выполняется условие:

$$\textit{числа} \quad 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом} \ \ \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Теорема 2.1. *Пусть развертка* T *вкладывается* (2.12) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, *развертка* T *имеет внутреннюю точку, и пусть вектор* α *для сдвига* $S = S_\alpha$ *из* (2.11) *будет иррациональным* (2.16). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *не пересекаются, т.е.* $S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \varnothing$ *только при условии* $j_1 = j_2$ *и* $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d, \tag{2.17}$$

где $\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \cdots \sqcup S^{m_k - 1}(T_k)$ – *орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (2.15).

Доказательство приведено в [1]. □

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (2.5) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ из 2.11, что символически будем обозначать в виде равенства $S' = S|_T$. Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{2.18}$$

соответственно развертку T из (2.1), (2.10) и *индуцированное разбиение* (2.17) тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [14]) *ядром* (*karyon*) разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ будем использовать обозначения

$$T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}). \tag{2.19}$$

Ядро (2.19) характеризуется следующим свойством: *ядро – это такое подмножество* $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$*, для которого отображение первого возвращения* $S' = S|_{\mathrm{Kr}}$*, индуцированное сдвигом тора* $S = S_\alpha$ *из* (2.11)*, эквивалентно перекладыванию* $d+1$ *подмножеств из разбиения*

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{Kr}_d.$$

2.6. Критерий вложимости развертки тора. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Определенная в* (2.10) *развертка тора* $T = T(v)$ *вкладывается* (2.12) *в тор* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений*:

1) *множество* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d$ *из* (2.18) *является разбиением тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$*;*

2) *внутренняя часть* T^{int} *развертки* $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *не содержит ни одной из точек* x_j *орбиты*

$$\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0);\ j = 1, 2, \ldots, \mathbf{m} - 1\} \tag{2.20}$$

порядка $\mathbf{m} = m_0 + m_1 + \cdots + m_d$.

2.7. Производные вкладывающихся множеств векторов.

Определение 2.2. *Пусть* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *– звезда и* $T = T(v)$ *– отвечающая ей развертка (2.18) тора* $\mathbb{T}^d_L$ *с векторами перекладывания* $v_0, v_1, \ldots, v_d$*. Если данная развертка* T *вкладывается* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно некоторого сдвига* $S = S_\alpha$*, то в этом случае будем говорить, что такая звезда* v вкладывается

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.21}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S*.*

В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть невырожденная звезда* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *вкладывается* (2.21) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ *с иррациональным* (2.16) *вектором* α*. Тогда любая ее* σ*-производная*

$$v^\sigma = \{v^\sigma_0, v^\sigma_1, \ldots, v^\sigma_d\}$$

для $\sigma \in \Sigma$ *также вкладывается* $v^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *в тот же тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S.

§3. Возвратные отображения

Здесь приведы краткие сведения о многомерных возвратных отображениях (backward mappings), изложенные в [1].

3.1. Базисный симплекс и его симметрии. Возвратные отображения – это нормированные дифференцирования (1.2). Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *симплекс* $\triangle = \triangle_d$ с вершинами в точках $(0,\dots,0), (1,\dots,0),\dots,(0,\dots,1)$ из пространства $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $S_\triangle$ *группу* его аффинных симметрий. Она сопряжена с группой метрических симметрий *правильного симплекса* $\triangle'_d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с вершинами $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,\dots,0),\dots,$ $(0,0,\dots,1)$ из $\mathbb{R}^{d+1}$. Чтобы явным образом описать указанную связь, зададим вложение

$$\mathrm{em}:\ \mathbb{R}^d \supset \triangle_d \ \overset{\rightarrow}{\sim}\ \triangle'_d \subset \mathbb{R}^{d+1}: \tag{3.1}$$

$$x = (x_1,\dots,x_d) \ \ \mapsto \ \ x' = (x'_1,\dots,x'_d,x'_{d+1}),$$

где $x'_i = x_i$ для $1 \leqslant i \leqslant d$ и $x'_{d+1} = 1 - x_1 - \dots - x_D$. Симметрии правильного симплекса

$$\sigma:\ \triangle'_d \ \overset{\rightarrow}{\sim}\ \triangle'_d \tag{3.2}$$

задаются перестановками координат точек

$$x' \ \to \ \sigma x' = \bigl(x'_{\sigma(1)}, x'_{\sigma(2)},\dots,x'_{\sigma(d+1)}\bigr), \tag{3.3}$$

где σ принадлежат группе перестновок S_{d+1} из $d+1$ элемента $1,\dots,d+1$. Симметрии (3.2) будут изометриями правильного симплекса $\triangle'_d$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \triangle_d \ni x \arrow[r, "\mathrm{em}"] \arrow[d, "\sigma"'] & x' \in \triangle'_d \arrow[d, "\sigma"] \\ \triangle_d \ni \sigma x & \sigma x' \in \triangle'_d. \arrow[l, "\mathrm{pr}"] \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Здесь pr обозначает *проекцию* $\mathrm{pr}\colon \mathbb{R}^{d+1} \ni x' \to (x'_1,\dots,x'_d) \in \mathbb{R}^d$ и левая вертикальная стрелка в диаграмме (3.4) означает отображение, определяемое из условия коммутативности диаграммы равенством

$$\sigma x = \mathrm{pr}(\sigma x'), \tag{3.5}$$

где $\sigma \in S_{d+1}$ и $x' = \mathrm{em}(x)$. Используя диаграмму (3.4), можем отождествить

$$S_\triangle \overset{\rightarrow}{\sim} S_{d+1}: \quad s = s_\sigma \quad \overset{\rightarrow}{\sim} \quad \sigma \tag{3.6}$$

группу аффинных симметрий $S_\triangle$ симплекса $\triangle_d$ с группой перестановок S_{d+1}. Отсюда вытекает, что группа симметрий $S_\triangle$ имеет порядок $\sharp S_\triangle = (d+1)!$ и все симметрии $s = s_\sigma$ из $S_\triangle$ распадаются на два класса собственных и несобственных симметрий $\mathrm{sign}(s) = \pm 1$ в зависимости от знака $\mathrm{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{d+1}. Согласно (3.5) и (3.1) в координатах $(x_1, \dots, x_d) \in \triangle_d$ относительно декартова базиса $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 1)$ симметрии $s = s_\sigma$ из $S_\triangle$ записываются следующим явным образом:

$$s_\sigma(x_1, \dots, x_d) = (\sigma x_1, \dots, \sigma x_d), \tag{3.7}$$

где

$$\sigma x_i = \begin{cases} x_{\sigma(i)}, & \text{если } \sigma(i) \leqslant d, \\ 1 - x_1 - \dots - x_d, & \text{если } \sigma(i) = d+1. \end{cases}$$

3.2. Разбиения базисного симплекса. Выделим в симплексе $\triangle = \triangle_D$ *открытые области*

$$\triangle_k^{kl}, \triangle_l^{kl} \subset \triangle \tag{3.8}$$

с целыми индексами $0 \leqslant k < l \leqslant d$. Замыкания областей $\bar{\triangle}_k^{kl}$, $\bar{\triangle}_l^{kl}$ разбивают симплекс

$$\triangle = \bar{\triangle}_k^{kl} \cup \bar{\triangle}_l^{kl}$$

и пересекаются $\bar{\triangle}_k^{kl} \cap \bar{\triangle}_l^{kl} = \mu^{kl}$ по *медианной гиперплоскости* μ^{kl}, проходящей через концы векторов $e_{kl} = \frac{1}{2}(e_k + e_l)$ и e_m для всех $0 \leqslant m \leqslant d$, $m \neq k, l$, где $e_0 = (0, \dots, 0)$. Нижние индексы в $\triangle_k^{kl}$ и $\triangle_l^{kl}$ указывают на принадлежность вершин с номерами k и l соответственно $\bar{\triangle}_k^{kl}$ и $\bar{\triangle}_l^{kl}$.

Таким образом, области (3.8) представляют собою открытые полусимплексы, замыкание объединения которых

$$\triangle^{kl} = \triangle_k^{kl} \sqcup \triangle_l^{kl} \tag{3.9}$$

совпадает со всем симплексом $\triangle$ и при этом $\triangle_k^{kl} \cap \triangle_l^{kl} = \varnothing$.

3.3. Нормированные дифференцирования звезд. Согласно критерию 1.1, каждая точка $x \in \triangle^{kl}$ задает звезду $w = \{w_0, w_1, \dots, w_d\}$ с лучами $w_m = e_m - x$, выходящими из центра x в вершины симплекса $\triangle$ с соответствующими номерами $0, 1, \dots, d$. При таком выборе центра существует производная звезда

$$w' = \{w'_0, w'_1, \dots, w'_d\}. \tag{3.10}$$

Если $x \in \triangle_k^{kl}$, то лучи в (3.10) имеют вид

$$w'_k = w_k, \quad w'_l = w_k + w_l \quad \text{и} \quad w'_m = w_m \quad \text{для} \quad m \neq k, l;$$

если же $x \in \triangle_l^{kl}$, то – вид

$$w'_k = w_k + w_l, \quad w'_l = w_l \quad \text{и} \quad w'_m = w_m \quad \text{для} \quad m \neq k, l.$$

Из условия $x \in \triangle^{kl}$ вытекает, что векторы

$$e'_1 = w'_1 - w'_0, \dots, \quad e'_D = v'_D - v'_0 \tag{3.11}$$

образуют базис пространства $\mathbb{R}^D$. Пусть A^{kl} – матрица перехода

$$e' = eA^{kl} \tag{3.12}$$

от базиса $\{e_1, \dots, e_d\}$ к базису $\{e'_1, \dots, e'_d\}$ из (3.11). В равенстве (3.12) слева указана строка $e' = (e'_1 \dots e'_d)$, а справа – произведение строки $e = (e_1 \dots e_d)$ на $d \times d$-матрицу A^{kl}. Данная матрица имеет две *специализации*

$$A^{kl} = A_k^{kl} \quad \text{или} \quad A_l^{kl} \tag{3.13}$$

в зависимости от принадлежности x области $\triangle_k^{kl}$ или $\triangle_l^{kl}$:

для $1 \leqslant k < l \leqslant d$ –

$$A_k^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1_{kk} & 1 - x_k & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0_{lk} & 1 - x_l & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & -x_d & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$A_l^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 - x_k & 0_{kl} & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 - x_l & 1_{ll} & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & -x_d & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{3.15}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$ –

$$A_0^{0l} = \begin{pmatrix} 1 & & -x_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 - x_l & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & -x_d & & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

$$A_l^{0l} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & x_1 & & x_1 & & x_1 \\ x_2 & 1 + x_2 & & x_2 & & x_2 \\ & & \ddots & & & \\ -1 + x_l & -1 + x_l & & x_l & & -1 + x_l \\ & & & & \ddots & \\ x_d & & & x_d & & 1 + x_d \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

В координатах формула перехода (3.12) примет вид

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_d' \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Здесь, чтобы не усложнять обозначения, обратные матрицы $(A^{kl})^{-1}$ для A^{kl} обозначили через $\mathcal{A}^{kl}$. С помощью обратных матриц $\mathcal{A}^{kl}$ можно для производной звезды w' из (3.10) определить *нормированную звезду*

$$\mathbf{w}' = \{\mathbf{w}_0', \mathbf{w}_1', \ldots, \mathbf{w}_d'\} \tag{3.19}$$

с *центром* $x' = (x_1', \ldots, x_d')$, вычисляемым по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_d' \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} -w_{01}' \\ \vdots \\ -w_{0d}' \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

где в правом столбце использованы координаты вектора

$$w_0' = (w_{01}', \ldots, w_{0d}')$$

из производной звезды $w' = \{w_0', w_1', \ldots, w_d'\}$, определлнной в (3.10). Если вектор w_0' сохраняется неизменным $w_0' = w_0$, то в формуле (3.18) выбирается центр $x = (x_1, \ldots, x_d) = -w_0 = -w_0'$ первоначальной звезды w. Нормированная звезда $\mathbf{w}'$, как и w, имеет лучи $\mathbf{w}_m' = e_m - x'$ для

$0 \leqslant m \leqslant d$, выходящими теперь уже из нового центра x' в вершины симплекса $\triangle$.

В явном виде координаты $(x'_1, \ldots, x'_d) = \delta^{kl}(x_1, \ldots, x_d)$ центра x' нормированной звезды $\mathbf{w}'$ из (3.19) вычисляются через *дробно-линейные преобразования*:

для $1 \leqslant k < l \leqslant d$ –

$$\begin{aligned} \delta_k^{kl}(x_1, \ldots, x_d) &= \Big(\frac{x_1}{1-x_l}, \ldots, \frac{x_k - x_l}{1-x_l}, \ldots, \frac{x_d}{1-x_l}\Big), \\ \delta_l^{kl}(x_1, \ldots, x_d) &= \Big(\frac{x_1}{1-x_k}, \ldots, \frac{x_l - x_k}{1-x_k}, \ldots, \frac{x_d}{1-x_k}\Big), \end{aligned} \tag{3.21}$$

где элементы $\frac{x_k - x_l}{1-x_l}$ и $\frac{x_l - x_k}{1-x_k}$ стоят соответственно на k и l местах;

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$ –

$$\begin{aligned} \delta_0^{0l}(x_1, \ldots, x_d) &= \Big(\frac{x_1}{1-x_l}, \ldots, \frac{x_d}{1-x_l}\Big), \\ \delta_l^{0l}(x_1, \ldots, x_d) &= \Big(\frac{x_1}{s}, \ldots, \frac{x_1 + \cdots + 2x_l + \cdots + x_d - 1}{s}, \ldots, \frac{x_d}{s}\Big), \end{aligned} \tag{3.22}$$

где средний элемент стоит на l месте, $s = x_1 + \cdots + x_d$.

Преобразования (3.21), (3.22) представляют собою многомерный аналог одномерных [7, 8] и двумерных возвратных отображений [1].

3.4. Возвратные отображения. Дробно-линейные преобразования (3.21), (3.22) задают

$$\triangle \xrightarrow{\delta^{kl}} \triangle : \quad x \mapsto x' = \delta^{kl}(x) \tag{3.23}$$

$\frac{(d+1)d}{2}$ отображений δ^{kl}, нумеруемых индексами $0 \leqslant k < l \leqslant d$:

$$\delta^{kl}(x) = \begin{cases} \delta_k^{kl}(x), & \text{если} \quad x \in \triangle_k^{kl}, \\ \delta_l^{kl}(x), & \text{если} \quad x \in \triangle_l^{kl}, \end{cases}$$

где $\triangle_k^{kl}$ и $\triangle_l^{kl}$ – открытые области из базисного симплекса $\triangle$, определенные в (3.8).

§4. Дробно-линейные и проективные преобразования

4.1. Матрицы возвратных отображений. На языке $(d+1, d+1)$-матриц

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,d+1} \\ & \ldots & \\ a_{d+1,1} & \ldots & a_{d+1,d+1} \end{pmatrix}$$

дробно-линейные преобразования (3.21), (3.22) удобно переписать в свернутом виде

$$M\langle x\rangle = \left(\frac{\lambda_1(M,x)}{\lambda_{d+1}(M,x)},\dots,\frac{\lambda_d(M,x)}{\lambda_{d+1}(M,x)}\right), \tag{4.1}$$

где $\lambda_i(M,x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{id}x_d + a_{i,d+1}$ – линейные формы.

Согласно определению (4.1), дробно-линейные преобразования (3.21), (3.22) имеют следующие матрицы:

для $0 < k < l \leqslant d$ –

$$\begin{gathered}\widehat{\delta}_k^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & -1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\delta}_l^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\end{gathered} \tag{4.2}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$ –

$$\widehat{\delta}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\delta}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 2_{ll} & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Все матрицы (4.2), (4.3) имеют целые коэффициенты и единичный определитель и, следовательно, они принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

4.2. Обратные возвратные отображения. Отображения δ^{kl} являются дважды накрывающими симплекс $\triangle$, а их специализации δ_*^{kl} задают уже биекции

$$\delta_k^{kl} : \triangle_k^{kl} \xrightarrow{\sim} \triangle^{\mathrm{int}}, \qquad \delta_l^{kl} : \triangle_l^{kl} \xrightarrow{\sim} \triangle^{\mathrm{int}}. \tag{4.4}$$

Поэтому для них существуют *обратные возвратные отображения*

$$\partial_k^{kl} : \triangle^{\mathrm{int}} \rightleftarrows \triangle_k^{kl}, \qquad \partial_l^{kl} : \triangle^{\mathrm{int}} \rightleftarrows \triangle_l^{kl}. \tag{4.5}$$

Матрицами для отображений (4.5) будут обратные матрицы для соответствующих возвратных отображений (4.2), (4.3):

для $0 < k < l \leqslant d$ –

$$\widehat{\partial}_k^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\partial}_l^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4.6}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$ –

$$\widehat{\partial}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\partial}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0_{ll} & \mathbf{-1} & 1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ \mathbf{-1} & -1 & \mathbf{-1} & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Как уже отмечалось, все возвратные отображения δ_*^{kl} имеют унимодулярные матрицы (4.2), (4.3). Поэтому матрицы (4.6), (4.7) обратных отображений ∂_*^{kl} снова будут унимодулярными с единичным определителем.

Через дробно-линейные преобразования обратные отображения ∂_*^{kl} запишутся в следующем виде:

для $1 \leqslant k < l \leqslant d$ –

$$\begin{aligned} \partial_k^{kl}(x_1, \ldots, x_d) &= \Big(\frac{x_1}{x_l+1}, \ldots, \frac{x_k+x_l}{x_l+1}, \ldots, \frac{x_d}{x_l+1}\Big), \\ \partial_l^{kl}(x_1, \ldots, x_d) &= \Big(\frac{x_1}{x_k+1}, \ldots, \frac{x_k+x_l}{x_k+1}, \ldots, \frac{x_d}{x_k+1}\Big), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где элементы $\frac{x_k+x_l}{x_l+1}$ и $\frac{x_k+x_l}{x_k+1}$ стоят соответственно на k и l местах;

для $k=0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$ –

$$
\begin{aligned}
\partial_0^{0l}(x_1,\ldots,x_d) &= \Big(\frac{x_1}{x_l+1},\ldots,\frac{x_d}{x_l+1}\Big),\\
\partial_l^{0l}(x_1,\ldots,x_d) &= \Big(\frac{x_1}{s+2},\ldots,\frac{s-x_l+1}{s+2},\ldots,\frac{x_d}{s+2}\Big),
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

где в последнем случае средний элемент $\frac{s-x_l+1}{s+2}$ стоит на l месте и $s=x_1+\cdots+x_d$.

4.3. Матрицы симметрий базисного симплекса. Симметрии $s=s_\sigma$ из группы $S_\triangle$ базисного симплекса $\triangle=\triangle_d$, определяемые формулой (3.7), также можно представить в матричной форме (4.1). Для них $(d+1,d+1)$-матрицами будут

$$
\widehat{s}=\widehat{s}_\sigma=\begin{pmatrix}
 & & \ldots & & & \\
0 & \ldots & 1_{i,\sigma(i)} & \ldots & 0 & 0_{i,d+1}\\
 & & \ldots & & & \\
-1 & \ldots & -1 & \ldots & -1 & 1_{j,d+1}\\
 & & \ldots & & & \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1_{d+1,d+1}
\end{pmatrix}. \tag{4.10}
$$

Здесь i-строка состоит из 0, кроме элемента $1=1_{i,\sigma(i)}$ на $\sigma(i)$ месте в случае $\sigma(i)\leqslant d$. Если $\sigma(j)=d{+}1$, то строка с номером $j\leqslant d$ принимает иной вид $(-1,\ldots,-1,1)$. Последняя $(d+1)$-строка для всех $\sigma\in S_{d+1}$ имеет вид $(0,\ldots,0,1)$.

Матрицы (4.10) симметрий симплекса $\triangle_D$ отличаются от матриц возвратных отображений (4.2), (4.3) нижней строкой $(0,\ldots,0,1)$. Их определители вычисляются по формуле $\det(\widehat{s}_\sigma)=\operatorname{sign}(\sigma)$, где справа указан знак $\operatorname{sign}(\sigma)=\pm1$ соответствующей подстановки σ из S_{d+1}. Поэтому все матрицы симметрий (4.10) принадлежат группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

Кроме самих матриц (4.10) нам потребуются еще их *однородные части* – верхние левые $(d\times d)$-блоки:

$$
\check{s}=\check{s}_\sigma=\begin{pmatrix}
 & & \ldots & & \\
0 & \ldots & 1_{i,\sigma(i)} & \ldots & 0_{i,d}\\
 & & \ldots & & \\
-1 & \ldots & -1 & \ldots & -1_{j,d}\\
 & & \ldots & &
\end{pmatrix}. \tag{4.11}
$$

Матрицы (4.11) порождают группу $S_{\check{\triangle}}$ аффинных (однородных) симметрий центрированного симплекса $\check{\triangle}=\check{\triangle}_d$, получающегося сдвигом базисного симплекса $\triangle = \triangle_d$ на вектор $\left(-\frac{1}{d+1}, \ldots, -\frac{1}{d+1}\right)$. Следовательно, симплекс $\check{\triangle}$ имеет центр в начале координат $(0, \ldots, 0)$ – неподвижной точке всех симметрий (4.11).

§5. Дифференцирования и нормирования звезды

5.1. Коммутативная диаграмма. Аналогично определению (2.16) для векторов, точку $x = (x_1, \ldots, x_d)$ из $\mathbb{R}^d$ назовем *иррациональной*, если числа

$$1, x_1, \ldots, x_d \ \textit{линейно независимы над кольцом} \ \ \mathbb{Z}. \tag{5.1}$$

Далее будем предполагать, что α – иррациональная точка (5.1) и специализация δ_*, задаваемая точкой α, имеет вид

$$\delta_* = \delta_p \cdots \delta_2 \delta_1, \tag{5.2}$$

где $\delta_i = \delta_*^{k_i l_i}$ – специализации (3.23). Заметим, что отображение (5.2) не содержит симметрии s из группы $S_\triangle$.

Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{w} \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathbf{w}^{(1)} \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "A^{(1)}"] & \ldots \arrow[r, "\delta_p"] & \mathbf{w}^{(p)} \arrow[d, "A^{(p)}"] \\
v \arrow[r, "\sigma_1"] & v^{(1)} \arrow[r, "\sigma_2"] & \ldots \arrow[r, "\sigma_p"] & v^{(p)}
\end{tikzcd} . \tag{5.3}$$

Здесь использовали обозначения: $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ – начальная звезда с центром в точке $x = x^{(0)} = \alpha$; $\mathbf{w}^{(1)} = \delta_1 \mathbf{w}^{(0)}$ – звезда с центром в $x^{(1)} = \delta_1 x^{(0)}$; и т.д., …; $\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p \mathbf{w}^{(p-1)}$ – звезда с центром в $x^{(p)} = \delta_p x^{(p-1)}$. Кратко цепочку преобразований из верхней строки диаграммы (5.3) можем записать в виде композиции

$$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p(\ldots(\delta_2(\delta_1 v))) = \delta_* \mathbf{w}, \quad x^{(p)} = \delta_p(\ldots(\delta_2(\delta_1 x))) = \delta_* x \tag{5.4}$$

из p возвратных отображений δ_*. Так определенные $\mathbf{w}^{(i)}$ для $i = 1, \ldots, p$ будут *нормированными звездами.*

Нижняя строка диаграммы (5.3) содержит обычные (см. определение 1.2) или *динамические* звезды $v^{(i)}$ для $i = 1, \ldots, p$, где $v = v^{(0)} = \mathbf{w}$; $v^{(1)} = v^{(0)\sigma_1}$ – производная звезда относительно дифференцирования $\sigma_1 = \{k_1, l_1\}$, ассоциированного с отображением $\delta_1 = \delta_*^{k_1 l_1}$; и т.д., …;

$v^{(p)} = v^{(p-1)\sigma_p}$ – производная звезда относительно $\sigma_p = \{k_p, l_p\}$, ассоциированного с $\delta_p = \delta_*^{k_p l_p}$. Следовательно, имеем представление

$$v^{(p)} = ((v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \dots)^{\sigma_p} = v^{\sigma} \tag{5.5}$$

звезды $v^{(p)}$ через последовательность дифференцирований

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p,$$

ассоциированную с отображением δ_*.

Теперь опишем вертикальные стрелки из диаграммы (5.3). Первая стрелка обозначет тождественное отображение id, т.е. $v = \mathrm{id}\,\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Далее, выпишем матрицы $A^{(p)}$: $A^{(1)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})$ – матрица (3.13), зависящая от начальной точки $x = x^{(0)}$; $A^{(2)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)})$ – матрица, уже зависящая от двух точек $x = x^{(0)}$ и $x^{(1)}$; и т.д., $\dots$; последняя матрица $A^{(p)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)}) \cdots A_*^{k_p l_p}(x^{(p-1)})$ определяется всеми предыдущими точками $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p-1)}$. Таким образом, по определению матрицы $A^{(i)}$ определяют аффинные изоморфизмы

$$A^{(i)} \colon \mathbf{w}^{(i)} \xrightarrow{\sim} v^{(i)} \tag{5.6}$$

звезд $\mathbf{w}^{(i)}$ и $v^{(i)}$ из верхней и нижней строк диаграммы (5.3) для всех $i = 1, \dots, p$.

5.2. Периодические звезды. Из предложения 6.1 в [3] следует, что нормированная звезда $\mathbf{w}^{(p)}$ из диаграммы (5.3) будет симметричной

$$\mathbf{w} = \check{s}\mathbf{w}^{(p)} \tag{5.7}$$

исходной звезде $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ относительно преобразования $\check{s}$ из группы $S_{\check{\triangle}}$ аффинных однородных симметрий (4.11) симплекса $\check{\triangle}$. В этом случае будем говорить, что звезда $\mathbf{w}$ *периодична* относительно отображения $\delta_s = s\delta_*$, а звезда $v = \mathbf{w}$ *периодична* относительно дифференцирования σ из (5.5), при этом $p > 0$ будет *периодом* звезды $v = \mathbf{w}$.

Заметим, что однородные преобразования $\check{s}$ из (4.11) действуют на векторы звезды $\mathbf{w}$, а преобразования s из группы $S_{\triangle}$ аффинных неоднородных симметрий (3.7) действуют на точки симплекса $\triangle$. В формуле (5.7) звезда $\mathbf{w}$, рассматривается как совокупность из $d+1$ векторов $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$.

5.3. Калибровочная матрица. Поскольку $v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)}$ по формуле (5.6), то с помощью равенства (5.7) получаем $v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)} = A^{(p)}\breve{s}^{-1}\mathbf{w}$. Поэтому, принимая во внимание равенство $\mathbf{w} = v$, можем записать

$$v^{(p)} = \mathbf{A}v, \tag{5.8}$$

где матрица $\mathbf{A} = A^{(p)}\breve{s}^{-1}$ определяет аффинное однородное отображение звезд $\mathbf{A} : v \mapsto v^{(p)}$. Равенство (5.8) означает, что производная звезда $v^{(p)}$ из диаграммы (5.3) *аффинно изоморфна* начальной звезде v. По этой причине $\mathbf{A}$ называется *калибровочной матрицей* периодической звезды v.

Далее мы хотим воспользоваться равенством (5.8) несколько раз. С этой целью рассмотрим бесконечную периодическую комбинированную последовательность $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ с периодом p, где $\xi_1 = \sigma_1$, $\xi_2 = \sigma_2, \dots, \xi_p = \sigma_p\breve{s}^{-1}$, $\xi_{p+1} = \sigma_1, \dots$ С помощью последовательности ξ определим для звезды v по индукции звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, полагая

$$v^{(i)} = (v^{(i-1)})^{\xi_i} \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \tag{5.9}$$

где $v^{(0)} = v$ и $v'^{\xi_i} = \breve{s}(v'^{\sigma_p})$ для $i = p, 2p, 3p, \dots$ Чтобы не вводить нового термина, будем так определенные звезды $v^{(i)}$ продолжать называть *производными* для звезды v.

В [1] доказана следующая

Теорема 5.1. *Пусть звезда v периодична относительно дифференцирования σ из* (5.5) *с периодом p, и пусть $\mathbf{A}$ – ее калибровочная матрица, определенаая в* (5.8). *Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ справедлива формула*

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}, \tag{5.10}$$

если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$.

§6. Метрические характеристики ядер производных разбиений тора

6.1. Генерации вкладывающихся разверток. По определению (2.21) и теореме 2.3 производные звезды $v^{(i)}$ из (5.9) вкладываются

$$v^{(i)} \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{6.1}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. По соглашению (2.18) это означает, что порождаемые ими развертки тора или иначе – многогранники, ядра разбиений тора –

$$T^{(i)} = T(v^{(i)}) \tag{6.2}$$

вкладываются в тор $T^{(i)} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$. Из построения (5.9) производной звезды $v^{(i)} = \{v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_d^{(i)}\}$ следует, что ее векторы перекладывания $v_k^{(i)}$ имеют вид

$$v_k^{(i)} \equiv m_k^{(i)} \alpha^- \bmod \mathbb{Z}^d \tag{6.3}$$

для $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k^{(i)} = 1, 2, 3, \dots$, которые назовем *порядками* лучей $v_k^{(i)}$ звезды $v^{(i)}$. Здесь $\alpha^- = -\alpha \in \mathbb{R}^d$ – вектор сдвига $S = S_{\alpha^-}$ тора $\mathbb{T}^d$ и порядки $m_k^{(i)}$ вычисляются по правилу (1.2). Сумму данных коэффициентов

$$m^{(i)} = m_0^{(i)} + m_1^{(i)} + \dots + m_d^{(i)} \tag{6.4}$$

назовем *порядком* производной звезды $v^{(i)}$. С ним свяжем конечные орбиты

$$\mathrm{Orb}'(0, m^{(i)}) = \big\{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^d;\ j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1\big\}. \tag{6.5}$$

6.2. Спектральный радиус. Далее нас будут интересовать метрические характеристики ядер производных разбиений $T^{(i)}$ из (6.2), а именно поведение их радиусов и объемов при $i \to \infty$. Для этого потребуются спектральные радиусы матриц и формулы объемов ядер. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ – собственные значения невырожденной комплексной $d \times d$-матрицы A и

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|\} \tag{6.6}$$

– ее *спектральный радиус.*

6.3. Константа $c_s(\mathbf{A})$. Названная константа определяется из неравенства

$$|\mathbf{A}x|_s \leqslant c_s(\mathbf{A})\varrho(\mathbf{A})|x|_s, \tag{6.7}$$

выполняющегося для всех $x \in \mathbb{R}^d$ с минимально возможным значением $c_s(\mathbf{A})$. Здесь $|x|_s = |x_1| + \dots + |x_d|$ обозначает многогранную *s-метрику.* В силу однородности метрики $|x|_s$ для константы $c_s(\mathbf{A})$ получаем равенство

$$c_s(\mathbf{A}) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{A})} \max_{|x|_s = 1} |\mathbf{A}x|_s. \tag{6.8}$$

Множество $|x|_s = 1$ представляет собою поверхность выпуклого центрально симметричного многогранника $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, состоящего из точек

$|x|_s \leqslant 1$ и имеющего центр в 0. Отсюда и аффинности отображения $x \mapsto \mathbf{A}x$ следует, что

$$\max_{|x|_s=1} |\mathbf{A}x|_s = \max_{x \in V(\mathcal{P})} |\mathbf{A}x|_s, \tag{6.9}$$

где $V(\mathcal{P})$ обозначает множество вершин многогранника $\mathcal{P}$. Из (6.8) и (6.9) для константы $c_s(\mathbf{A})$ выводим явную формулу

$$c_s(\mathbf{A}) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{A})} \max_{x \in V(\mathcal{P})} |\mathbf{A}x|_s. \tag{6.10}$$

6.4. Радиусы и объемы производных параллелоэдров. Вычислим метрические характеристики производных параллелоэдров $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ из (6.2). Обозначим через $r_s(T^{(i)})$ *радиус* параллелоэдра $T^{(i)}$ в s-метрике $|x|_s$. В [3] доказана

Лемма 6.1. *Если параллелоэдр $T(v)$ порождается звездой*

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\},$$

то его радиус $r_s(T(v))$ вычисляется по формуле

$$r_s(T(v)) = \frac{1}{2} \max_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d} |\varepsilon_0 v_0 + \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_D v_d|_s. \tag{6.11}$$

Максимум в (6.11) *вычисляется по всем наборам $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$, таким что $\varepsilon_i = \pm 1$, при этом количество отрицательных ε_i меняется в интервале $[1, \dots, \frac{d+1}{2}]$.*

□

Многогранник $T^{(i)}$ является разверткой тора $\mathbb{T}^d_{L^{(i)}} = \mathbb{R}^d / L^{(i)}$ для решетки $L^{(i)} = \mathbb{Z}[l_1^{(i)}, \dots, l_d^{(i)}]$ с базисом $l_k^{(i)} = v_k^{(i)} - v_0^{(i)}$ для $k = 1, \dots, d$, где $v_k^{(i)}$ – лучи звезды $v^{(i)}$ из (6.1). Поэтому *объем* $s(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ равен

$$s(T^{(i)}) = \left| \det \begin{pmatrix} l_{11}^{(i)} & \dots & l_{1d}^{(i)} \\ & \dots & \\ l_{d1}^{(i)} & \dots & l_{dd}^{(i)} \end{pmatrix} \right| \tag{6.12}$$

– объему фундаментальной области решетки $L^{(i)}$, где $l_{kl}^{(i)}$ – координаты базисных векторов $l_k^{(i)}$ для $k = 1, \dots, d$.

§7. Порядковые и калибровочные матрицы

7.1. Определение порядковых матриц. Составим из порядков лучей (6.3) звезды v матрицу-столбец

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(v) = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_D \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

и выясним, как она меняется под действием симметрий базисного симплекса $\triangle = \triangle_D$ и дифференцирований v^σ на звезду v.

Для этого поставим в соответствие любой перестановке σ элементов $0, 1, \ldots, d$ ее *перестановочную матрицу*

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} \cdots & 1_{0,\sigma(0)} & \cdots \\ \cdots & 1_{1,\sigma(1)} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & 1_{d,\sigma(d)} & \cdots \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

с единицами $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $(i, \sigma(i))$-местах. Если заменить 0 на $d+1$, то получим перестановку (3.2), определяющую симметрию базисного симплекса $s = s_\sigma$ из группы $S_\triangle$. Дифференцированиям же δ_k^{kl} и δ_l^{kl} из (3.23) с произвольными индексами $0 \leqslant k < l \leqslant d$ поставим в соответствие матрицы

$$D_k^{kl} = E + E_{lk}, \quad D_l^{kl} = E + E_{kl}, \tag{7.3}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица порядка $d+1$, а матрицы E_{ij} имеют нулевые элементы, кроме $1 = 1_{ij}$ на (i, j)-месте. Матрицы M из (7.2) и (7.3) имеют целые коэффициенты и определители

$$\det M = \pm 1,$$

поэтому принадлежат $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

7.2. Порядки лучей производных звезд. Данные матрицы позволяют вычислять порядки лучей m_0^σ, $m_1^\sigma, \ldots,$ m_d^σ преобразованной звезды $v^\sigma = (v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma)$:

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}(v^\sigma) = M^\sigma(v)\mathbf{m}. \tag{7.4}$$

Здесь, согласно определению производной (1.2), имеем $M^\sigma(v) = D_*^{k_1 k_2}$, если $\sigma = \{k_1, k_2\}$ – дифференцирование, где в качестве специализации $*$ выбирается k_1 или k_2 в зависимости от того, какое из условий (1.2) выполняется; и $M^\sigma(v) = M^\sigma = S_\sigma$ в случае преобразования симметрии $\sigma = s = s_\sigma$ звезды v, где S_σ – соответствующая матрица из (7.2).

В [3] доказана

Лемма 7.1. *Пусть v – периодическая звезда $v^{(p)} = \mathbf{A}v$ периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A} = A^{(t)}\breve{s}$ из* (5.8), *и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ определены по формуле* (5.9). *Тогда если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \ldots$ и $b = 0, \ldots, p - 1$, то*

$$\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}(v^{(i)}) = \mathbf{M}^a \mathbf{m}^{(b)}. \tag{7.5}$$

Здесь

$$\mathbf{M} = SM^{(p)} \tag{7.6}$$

с матрицей S из (7.2), *соответствующей обратной симметрии для $\breve{s}$, и*

$$M^{(p)} = D_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)}) \cdots D_*^{k_2 l_2}(v^{(1)}) D_*^{k_1 l_1}(v^{(0)}), \tag{7.7}$$

где у порядковых матриц $D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)}) = D_*^{k_j l_j}$ из (7.4) *специализации $*$ определяются производной звездой $v^{(j-1)}$.*

Назовем $\mathbf{M}$ *порядковой матрицей* периодической звезды v, отвечающей калибровочной матрице $\mathbf{A}$.

§8. Рекуррентные последовательности

Здесь устанавливается связь между векторными и скалярными рекуррентными последовательностями. Пусть дана векторная рекуррентная последовательность

$$\mathbf{f}^{i+1} = M\mathbf{f}^i \tag{8.1}$$

с нумерацией $i = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь M – квадратная матрица порядка $d + 1$,

$$\mathbf{f}^i = \begin{pmatrix} f_0^i \\ f_1^i \\ \vdots \\ f_d^i \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{f}^0$ – некоторый фиксированный столбец. Из (8.1) следует формула

$$\mathbf{f}^i = M^i \mathbf{f}^0. \tag{8.2}$$

Наша цель – используя (8.1) найти формулу рекуррентной зависимости для скалярной последовательности

$$f^i = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^i, \tag{8.3}$$

где $\mathbf{1} = (1\,1 \ldots 1)$ – строка длины $d+1$, т.е. $f^i = f_0^i + f_1^i + \cdots + f_d^i$ определяются как суммы элементов столбов $\mathbf{f}^i$.

Для матрицы M запишем ее характеристический многочлен в виде

$$ch_M(x) = \det(xE - M) = x^{d+1} - b_d x^2 - \cdots - b_1 x - b_0. \tag{8.4}$$

По теореме Гамильтона–Кэли M удовлетворяет матричному уравнению

$$M^{d+1} - b_d M^d - \cdots - b_1 M - b_0 E = 0. \tag{8.5}$$

Перепишем (8.5) в виде равенства $M^{d+1} = b_d M^d + \cdots + b_1 M + b_0 E$. Умножая его на столбец $\mathbf{f}^i$, получаем равенство

$$M^{d+1}\mathbf{f}^i = b_d M^d \mathbf{f}^i + \cdots + b_1 M \mathbf{f}^i + b_0 \mathbf{f}^i. \tag{8.6}$$

Теперь применяем к равенству (8.6) формулу (8.2) и приходим к новой рекуррентной формуле

$$\mathbf{f}^{i+d+1} = b_d \mathbf{f}^{i+d} + \cdots + b_1 \mathbf{f}^{i+1} + b_0 \mathbf{f}^i \tag{8.7}$$

для столбцов $\mathbf{f}^i$. После этого умножим обе части равенства (8.7) на строку $\mathbf{1}$ и воспользуемся равенством (8.3). Таким образом, приходим к следующему результату.

Предложение 8.1. *Если числа f^i для $i = 0, 1, 2, \ldots$ определены равенством* (8.3)*, то они удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$f^{i+d+1} = b_d f^{i+d} + \cdots + b_1 f^{i+1} + b_0 f^i, \tag{8.8}$$

где $b_d, \ldots, b_1, b_0$ – коэффициенты характеристического многочлена (8.4) *и начальные условия*

$$f^d = \mathbf{1} \cdot M^d \mathbf{f}^0, \ldots, \quad f^1 = \mathbf{1} \cdot M \mathbf{f}^0, \quad f^0 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^0 \tag{8.9}$$

задаются матрицей M и фиксированным столбцом $\mathbf{f}^0$ из (8.1)*.*

§9. Многомерная ядерная аппроксимация: общая теорема

9.1. Возвратные матрицы для периодических точек и рекуррентные последовательности. Перепишем звезды

$$v^{(i)} = \left(v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \ldots, v_d^{(i)}\right)$$

из (5.9) в виде столбцов $v^{(i)} = \begin{pmatrix} v_0^{(i)} \\ v_1^{(i)} \\ \vdots \\ v_d^{(i)} \end{pmatrix}$. По определению имеем

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} v_0^{(0)} \\ v_1^{(0)} \\ \vdots \\ v_d^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha + e_1 \\ \vdots \\ -\alpha + e_d \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

или по-другому –

$$v^{(0)} = v = -\alpha E_0 + e_1 E_1 + \cdots + e_d E_d, \tag{9.2}$$

где

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, d \tag{9.3}$$

– столбцы высоты $d+1$, при этом в столбцах E_i единица стоит на i-ом месте и нумерация элементов в E_i начинается с 0. Кроме того, векторы α, $e_1, \ldots$, e_d в (9.2) рассматриваются как коэффициенты.

Пусть $i = ap + b$ с фиксированным $0 \leqslant b < p$. Определим следующие *сдвиги*: $\overrightarrow{j} \equiv j + b \bmod p$ и число $\overrightarrow{j}$ выбирается из интервала $[1, \ldots, p]$; для порядковой матрицы $\mathbf{M} = D_p \cdots D_1$ из (7.6), (7.7) с множителями $D_j = D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)})$ и $D_p = SD_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)})$ соответственно для $j < p$ и $j = p$ полагаем $\overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{D}_p \cdots \overrightarrow{D}_1$, где $\overrightarrow{D}_j = D_{\overrightarrow{j}}$. Тогда в этих обозначениях из диаграммы (5.3) будет следовать формула

$$v^{(i)} = \overrightarrow{\mathbf{M}}^a v^{(b)}, \tag{9.4}$$

аналогичная (5.10), при этом

$$v^{(b)} = -\alpha E_0^{(b)} + e_1 E_1^{(b)} + \cdots + e_d E_d^{(b)}, \tag{9.5}$$

а столбцы $E_i^{(b)}$ вычисляются по формуле

$$E_i^{(b)} = D_*^{k_b l_b} \cdots D_*^{k_1 l_1} E_i^{(0)} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant b < p.$$

Здесь полагаем $E_i^{(0)} = E_i$ и $D_*^{k_j l_j}$ – порядковые матрицы из (7.7). Тогда из (9.4) и (9.5) получаем равенство

$$v^{(i)} = -\alpha \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_0^{(b)} + e_1 \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_1^{(b)} + \dots + e_d \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_d^{(b)}. \tag{9.6}$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{Q}_a = \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_0^{(b)}, \ \ \mathbf{R}_{1,a} = \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_1^{(b)}, \ \ \dots, \ \ \mathbf{R}_{d,a} = \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_d^{(b)}, \tag{9.7}$$

перепишем равенство (9.6) в виде

$$v^{(i)} = -\alpha \mathbf{Q}_a + e_1 \mathbf{R}_{1,a} + \dots + e_d \mathbf{R}_{d,a}. \tag{9.8}$$

Пусть $\mathbf{1} = (1\,1\dots1)$ – строка из (8.3). Тогда по теоремам 2.2 и 2.3 сумма

$$v_{\min}^{(i)} = \mathbf{1} \cdot v^{(i)} = v_0^{(i)} + v_1^{(i)} + \dots + v_d^{(i)} \tag{9.9}$$

будет *минимальным вектором*, который в силу (9.8) можно записать в виде линейной комбинации

$$v_{\min}^{(i)} = -\alpha Q_a + e_1 R_{1,a} + \dots + e_d R_{d,a} \tag{9.10}$$

с коэффициентами $Q_a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}_a$, $R_{1,a} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{1,a}, \dots, R_{d,a} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{d,a}$.

Из (9.7), (9.10) и предложения 8.1 следует, что Q_a, $R_{1,a}$, ..., $R_{d,a}$ являются *рекуррентными последовательностями* от параметра a (напомним, что параметр b фиксирован):

$$\begin{aligned} Q_{a+d+1} &= b_d Q_{a+d} + \dots + b_1 Q_{a+1} + b_0 Q_a, \\ R_{k,a+d+1} &= b_d R_{k,a+d} + \dots + b_1 R_{k,a+1} + b_0 R_{k,a} \end{aligned} \tag{9.11}$$

для $k = 1, \dots, d$. Здесь $b_d, \dots, b_1$, b_0 – коэффициенты характеристического многочлена $ch_{\overrightarrow{\mathbf{M}}}(x) = ch_{\mathbf{M}}(x)$ порядковой матрицы $\mathbf{M}$, определенного в (8.4). Для последовательностей Q_a и $R_{k,a}$ будут следующие *начальные условия*:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}_0 = \mathbf{1} \cdot E_0^{(b)}, \\ Q_1 &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}_1 = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}} E_0^{(b)}, \ \dots, \ Q_d = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}_d = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}^d E_0^{(b)}, \\ R_{k,0} &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{k,0} = \mathbf{1} \cdot E_k^{(b)}, \\ R_{k,1} &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{k,1} = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}} E_k^{(b)}, \ \dots, \ R_{d,k} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_{k,d} = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}^d E_k^{(b)} \end{aligned} \tag{9.12}$$

для $k = 1, \dots, d$.

9.2. Общая теорема. В [3] доказана следующая теорема об аппроксимации периодических точек.

Теорема 9.1. 1. *Для иррациональной периодическойой* (5.10) *точки* $\alpha \in \triangle$ *периода* p *и любого* $i = ap+b$, *где* $0 \leqslant b < p$ *фиксировано, вектор*

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q_a\alpha_1 + R_{1,a}, \dots, -Q_a\alpha_d + R_{d,a}) \tag{9.13}$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \textit{с минимальным целым} \quad Q_a \geqslant 1. \tag{9.14}$$

Свойство (9.14) *означает, что ни одна из точек орбиты*

$$x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$$

не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \textit{для всех} \quad 1 \leqslant j < Q_a \tag{9.15}$$

в ядро $T^{(i)}$ *– многогранник из* (6.2).

2. *Объем* $s(T^{(i)})$ *ядра* $T^{(i)}$ *находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \tag{9.16}$$

где $\det \mathbf{A}$ *обозначает определитель матрицы* $\mathbf{A}$, *удовлетворяющий неравенствам* $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, *и объемы* $s(T^{(b)})$ *для начальных номером* $b = 0, \dots, p-1$ *вычисляются по формуле* (6.12).

3. *В случае калибровочной матрицы* $\mathbf{A}$ *с простым спектром* $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ *для любых* $i \neq i'$ *имеют место неравенства*:

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + \dots + |Q_a\alpha_d - R_{d,a}| \leqslant c_s^{(b)} \varrho(\mathbf{A})^a. \tag{9.17}$$

Здесь $c_s^{(b)} = c_s(\overrightarrow{\mathbf{A}}) r_s(v_{\min}^{(b)})$, *где* $c_s(\overrightarrow{\mathbf{A}})$ *– константа* (6.10), $r_s(v_{\min}^{(b)})$ *– длина вектора* (9.9) *в* s*-метрике и* $\varrho(\mathbf{A})$ *– спектральный радиус* (6.6) *матрицы* $\mathbf{A}$.

4. *Коэффициенты* Q_a, $R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$ *из* (9.13) *образуют рекуррентные последовательности от параметра* $a = 0, 1, 2, \dots$ *с уравнением* (9.11) *и начальными условиями* (9.12).

5. *Если $b = 0$, то начальные условия рекуррентных последовательностей Q_a, $R_{1,a}, \ldots, R_{d,a}$ принимают вид:*

$$\begin{aligned}
&Q_0 = d+1, \quad && Q_1 = \sum_{k,l} m_{kl}, \ldots, \quad && Q_d = \sum_{k,l} m_{kl}^d, \\
&R_{1,0} = 1, && R_1,1 = \sum_k m_{k1}, \ldots, && R_1,d = \sum_k m_{k1}^d, \\
& && \ldots\ldots\ldots && \\
&R_{d,0} = 1, && R_{d,1} = \sum_k m_{kd}, \ldots, && R_{d,d} = \sum_k m_{kd}^d,
\end{aligned} \tag{9.18}$$

где $\mathbf{M} = (m_{kl})_{(d+1)\times(d+1)}$ – порядковая матрица из (7.6), имеющая нумерацию строк и столбцов $0, 1, \ldots, d$, и $\mathbf{M}^i = (m_{kl}^i)_{(d+1)\times(d+1)}$ обозначает i-ую степень матрицы $\mathbf{M}$.

§10. Стволовые точки

10.1. Циклические множества. Определим *полугруппу* $\mathcal{D}$ преобразований симплекса $\triangle$, порожденную возвратными отображениями δ_*^{kl} из (3.21) и (3.22), а также определим *расширенную полугруппу* $\mathcal{D}_s$, добавляя к $\mathcal{D}$ все симметрии (3.7) симплекса $s \in S_\triangle$.

Пусть $\alpha \in \triangle$ – периодическая иррациональная точка относительно полугруппы $\mathcal{D}_s$, т.е.

$$\delta(\alpha) = \alpha, \tag{10.1}$$

где отображение $\delta = \delta_p \cdots \delta_1$, при этом $\delta_i = \delta_*^{kl}$ или s – одна из образующих полугруппы $\mathcal{D}_s$. Более подробно равенство (10.1) можно записать в виде цепочки отображений

$$\alpha = \alpha^{(0)} \xrightarrow{\delta_1} \alpha^{(1)} \xrightarrow{\delta_2} \ldots \xrightarrow{\delta_p} \alpha^{(p)} = \alpha. \tag{10.2}$$

Множество

$$\mathcal{O}(\alpha) = \left\{\alpha = \alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(p-1)}\right\} \tag{10.3}$$

назовем *стволом* точки α или кратко – *α-стволом* (trunk).

Используя отображения (10.2), с оставимим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha^{(0)} & \xrightarrow{\delta_1} & \alpha^{(1)} & \xrightarrow{\delta_2} & \ldots & \xrightarrow{\delta_p} & \alpha^{(p)} = \alpha^{(0)} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
v^{(0)} & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \ldots & \xrightarrow{\sigma_p} & v^{(p)} = \mathbf{A}v^{(0)} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
T^{(0)} & \xrightarrow{\sigma_1} & T^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \ldots & \xrightarrow{\sigma_p} & T^{(p)} = \mathbf{A}T^{(0)}
\end{array} \tag{10.4}$$

Здесь $\sigma = \sigma_p \cdots \sigma_1$ – последовательность дифференцирований звезд $v^{(i)}$, соответствующих возвратным отображениям $\delta^{(i)}$.

10.2. Циклические сдвиги. Для фиксированного $0 \leqslant t < p$ определим следующие сдвиги:

$\vec{\alpha}^{(i)} = \alpha^{(\vec{i}\,)}$, где $\vec{i} \equiv i + t \bmod p$ и $0 \leqslant \vec{i} < p$;

$\vec{\delta} = \vec{\delta}_p \cdots \vec{\delta}_1$, где $\vec{\delta}_k = \delta_{\vec{k}}$, $\vec{k} \equiv k + t \bmod p$ и $1 \leqslant \vec{k} \leqslant p$;

$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_p \cdots \vec{\sigma}_1$,

калибровочная $\vec{\mathbf{A}}$ и порядковая $\vec{\mathbf{M}}$ матрицы определяются аналогично $\vec{\delta}$.

Применяя введенные сдвиги, преобразуем диаграмму (10.4) к виду

$$\begin{array}{ccccccc}
\vec{\alpha}^{(0)} & \xrightarrow{\vec{\delta}_1} & \vec{\alpha}^{(1)} & \xrightarrow{\vec{\delta}_2} & \ldots & \xrightarrow{\vec{\delta}_p} & \vec{\alpha}^{(p)} = \vec{\alpha}^{(0)} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vec{v}^{(0)} & \xrightarrow{\vec{\sigma}_1} & \vec{v}^{(1)} & \xrightarrow{\vec{\sigma}_2} & \ldots & \xrightarrow{\vec{\sigma}_p} & \vec{v}^{(p)} = \vec{\mathbf{A}}\vec{v}^{(0)} \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vec{T}^{(0)} & \xrightarrow{\vec{\sigma}_1} & \vec{T}^{(1)} & \xrightarrow{\vec{\sigma}_2} & \ldots & \xrightarrow{\vec{\sigma}_p} & \vec{T}^{(p)} = \vec{\mathbf{A}}\vec{T}^{(0)}
\end{array} . \tag{10.5}$$

Заметим, что по определению звезда $\vec{v}^{(0)}$ и развертка тора $\vec{T}^{(0)}$ являются теперь нормированными, т.е. приведенными к базису $e_1, \ldots, e_q$. Они не совпадают со звездой $v^{(t)}$ и разверткой $T^{(0)}$ в диаграмме (10.4).

Пусть $i = ap$ и, значит, $b = 0$. Определим рекуррентные последовательности $\vec{Q}_a$, $\vec{R}_{1,a}, \ldots, \vec{R}_{d,a}$ от параметра a через рекуррентное соотношение (9.11) и начальные условия:

$$\begin{array}{lll}
\vec{Q}_0 = \mathbf{1} \cdot E_0, & \vec{Q}_1 = \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}} E_0, \ldots, & \vec{Q}_d = \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}}^d E_0, \\
\vec{R}_{k,0} = \mathbf{1} \cdot E_k, & \vec{R}_{k,1} = \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}} E_k, \ldots, & \vec{R}_{d,k} = \mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{M}}^d E_k
\end{array} \tag{10.6}$$

для $k = 1, \ldots, d$, где E_k – столбцы (9.3).

Теорема 10.1. 1. *Пусть $i = ap$, $0 \leqslant t < p$ и*

$$\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_d) = \delta_t \cdots \delta_1(\alpha) \tag{10.7}$$

– иррациональная стволовая точка (10.3). *Тогда вектор*

$$\vec{v}^{(i)}_{\min} = (-\vec{Q}_a \vec{\alpha}_1 + \vec{R}_{1,a}, \ldots, -\vec{Q}_a \vec{\alpha}_d + \vec{R}_{d,a}), \tag{10.8}$$

где $\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_d)$, обладает минимальным свойством:

$$\vec{v}^{(i)}_{\min} \in \vec{T}^{(i)} \quad \text{с минимальным целым} \quad \vec{Q}_a \geqslant 1. \tag{10.9}$$

Свойство (10.9) *означает, что ни одна из точек орбиты* $x_j \equiv -j \overrightarrow{\alpha} \mod \mathbb{Z}^d$ *не попадает*

$$x_j \notin \overrightarrow{T}^{(i)} \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j < \overrightarrow{Q}_a \tag{10.10}$$

в ядро $\overrightarrow{T}^{(i)}$ *– многогранник, соответствующий звезде* $\overrightarrow{v}^{(i)}$ *из диаграммы* (10.4).

2. *Объем* $s(\overrightarrow{T}^{(i)})$ *ядра* $\overrightarrow{T}^{(i)}$ *находится по формуле*

$$s(\overrightarrow{T}^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(\overrightarrow{T}^{(0)}), \tag{10.11}$$

где определитель $\det \mathbf{A}$ *удовлетворяет неравенствам* $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, *и объем* $s(\overrightarrow{T}^{(0)})$ *вычисляется по формуле* (6.10).

3. *В случае калибровочной матрицы* $\mathbf{A}$ *с простым спектром имеют место неравенства*:

$$|\overrightarrow{Q}_a \overrightarrow{\alpha}_1 - \overrightarrow{R}_{1,a}| + \dots + |\overrightarrow{Q}_a \overrightarrow{\alpha}_d - \overrightarrow{R}_{d,a}| \leqslant \overrightarrow{c}_s^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a. \tag{10.12}$$

Здесь $\overrightarrow{c}_s^{(0)} = c_s(\overrightarrow{\mathbf{A}}) r_s(\overrightarrow{v}^{(0)}_{\min})$, *где* $\overrightarrow{v}^{(0)}_{\min}$ *– минимальный вектор* (10.8), *и* $\varrho(A)$ *– спектральный радиус* (6.6) *матрицы* $\mathbf{A}$*; кроме того,* $\overrightarrow{Q}_a$ *и* $\overrightarrow{R}_{k,a}$ *для* $k = 1, \dots, d$ *– рекуррентные последовательности* (10.6).

Доказательство. Диаграмма (10.5) есть не что иное, как диаграмма (10.4) с начальной периодической точкой $\overrightarrow{\alpha}^{(0)} = \overrightarrow{\alpha}$ из (10.7) вместо $\alpha^{(0)} = \alpha$. Совершая указанный переход видим, что порядковая $\mathbf{M}$ и калибровочная $\mathbf{A}$ матрицы заменяются матрицами $\overrightarrow{\mathbf{M}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ соответственно, при этом характеристические многочлены и определители остаются инвариантными

$$ch_{\overrightarrow{\mathbf{M}}}(x) = ch_{\mathbf{M}}(x), \quad ch_{\overrightarrow{\mathbf{A}}}(x) = ch_{\mathbf{A}}(x), \quad \det \mathbf{A} = \det \overrightarrow{\mathbf{A}}. \tag{10.13}$$

Поэтому доказываемая теорема является переформулировкой теоремы 9.1. □

§11. Первообразные точки

11.1. Ветви: $\mathfrak{D}_s$-множество. Пусть $\mathfrak{D}_s$ – *полугруппа*, порождающаяся обратными возвратными отображениями ∂_*^{kl} из (4.8), (4.9) и симметриями $s = s_\sigma$ симплекса $\triangle$, определенными в (3.7).

Для периодической точки α определим множество ее *ветвей* (branches)

$$\mathfrak{D}_s\mathcal{O}(\alpha) \quad = \{\partial_*^{kl}\alpha^{(i)}; \quad \partial_*^{kl} \in \mathfrak{d}, \alpha^{(i)} \in \mathcal{O}(\alpha)\}. \tag{11.1}$$

Поскольку

$$\alpha^{(i)} = \partial_{i+1}\cdots\partial_p\alpha^{(0)},$$

то множество ветвей (11.1) будет порождаться

$$\mathfrak{D}_s\mathcal{O}(\alpha) = \mathfrak{D}_s(\alpha) \tag{11.2}$$

образами одной точки $\alpha = \alpha^{(0)}$ относительно действия полугруппы $\mathfrak{D}_s$. Вместо точки $\alpha = \alpha^{(0)}$ можно выбирать любую другую точку $\alpha^{(i)}$ из α-ствола $\mathcal{O}(\alpha)$.

11.2. Расширенная диаграмма. Пусть $\alpha = \alpha^{(0)} \in \triangle$ – периодическая иррациональная точка $\delta(\alpha) = \alpha$ из (10.1) относительно полугруппы $\mathcal{D}_s$. Рассмотрим для нее *первообразную точку*

$$\alpha^{(-t)} = \partial^{(t)}\alpha^{(0)} \tag{11.3}$$

из множества ветвей

$$\mathfrak{D}_s(\alpha) = \mathfrak{D}_s\mathcal{O}(\alpha),$$

где

$$\partial^{(t)} = \partial_t^{(t)}\cdots\partial_1^{(t)} \tag{11.4}$$

– произвольное отображение из полугруппы $\mathfrak{D}_s$. Первообразная точка (12.12) снова принадлежит симплексу $\triangle$.

Расширим диаграмму (10.4) следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\alpha^{(-t)} & \xrightarrow{\delta_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\delta_1^{(t)}} & \alpha^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \alpha^{(i)} & \rightarrow & \dots \\
\downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
v^{(-t)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & v_t^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & v_t^{(i)} & \rightarrow & \dots \\
\downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
T^{(-t)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \dots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & T_t^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & T_t^{(i)} & \rightarrow & \dots
\end{array} \tag{11.5}$$

Здесь

$$\delta^{(t)} = \delta_1^{(t)}\cdots\delta_t^{(t)} \tag{11.6}$$

– отображение из полугруппы $\mathcal{D}_s$, обратное $\partial^{(t)}$ из (11.4), и

$$\sigma^{(t)} = \sigma_1^{(t)}\cdots\sigma_t^{(t)} \tag{11.7}$$

– последовательность дифференцирований звезд $v^{(i)}$, соответствующих возвратным отображениям из (11.6), при этом начальная звезда $v^{(-t)}$ во второй строке диаграммы (11.5) является нормированной звездой. Звезды $v_t^{(i)}$ для $i \geqslant 0$ из диаграммы (11.5) и звезды $v^{(i)}$ из диаграммы (5.3) связаны между собою

$$v_t^{(i)} = A_t v^{(i)} \tag{11.8}$$

невырожденным аффинным преобразованием пространства $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ с матрицей

$$A_t = A_*^{k_t^{(t)} l_t^{(t)}}(x^{(-t)}) \cdots A_*^{k_1^{(t)} l_1^{(t)}}(x^{(-1)}). \tag{11.9}$$

Если какое-то отображение $\delta_j^{(t)}$, входящее в (11.6), окажется симметрией s, то соответствующий множитель в (11.9) заменяется на симметрию. Поэтому, применяя теорему 5.1 для $i = ap \geqslant 0$, получаем формулу

$$v_t^{(i)} = \mathbf{A}_t^a v_t^{(0)} \tag{11.10}$$

преобразования звезд $v_t^{(i)}$ из диаграммы (11.5) с новой калибровочной матрицей

$$\mathbf{A}_t = A_t \mathbf{A} A_t^{-1}, \tag{11.11}$$

подобной через аффинный изоморфизм (11.8) матрице $\mathbf{A}$. Аналогично (11.8) связаны между собою и развертки тора

$$T_t^{(i)} = A_t T^{(i)}, \tag{11.12}$$

соответствующие звездам $v_t^{(i)}$ и $v^{(i)}$.

11.3. Аппроксимация первообразных точек. Следуя (9.1) разобъем звезду

$$\widehat{v}^{(-t)} = \begin{pmatrix} v_0^{(-t)} \\ v_1^{(-t)} \\ \vdots \\ v_d^{(-t)} \end{pmatrix}$$

на единичные столбцы

$$\widehat{v}^{(-t)} = \begin{pmatrix} -\alpha^{(-t)} \\ -\alpha^{(-t)} + e_1 \\ \vdots \\ -\alpha^{(-t)} + e_d \end{pmatrix} = -\alpha^{(-t)} E_0^{(-t)} + e_1 E_1^{(-t)} + \dots + e_d E_d^{(-t)}, \tag{11.13}$$

где $E_i^{(-t)}$ – столбцы (9.3). Напомним, что в столбцах E_i единица стоит на i-ом месте и нумерация элементов в E_i начинается с 0.

Дифференцированиям звезд $\sigma^{(t)}$ из (11.7) отвечает порядковая матрица

$$D^{(t)} = D_1^{(t)} \cdots D_t^{(t)},$$

переводящая

$$\widehat{v}_t^{(0)} = D^{(t)} \widehat{v}^{(-t)} \tag{11.14}$$

звезду $\widehat{v}^{(-t)}$ из (11.13) сразу в звезду $\widehat{v}_t^{(0)}$ из диаграммы (11.5). Подставляя (11.13) в равенство (11.14), имеем

$$\widehat{v}_t^{(0)} = -\alpha^{(-t)} D^{(t)} E_0^{(-t)} + e_1 D^{(t)} E_1^{(-t)} + \dots + e_d D^{(t)} E_d^{(-t)} \tag{11.15}$$

или, вводя обозначения

$$E_0^{(0)} = D^{(t)} E_0^{(-t)}, \quad E_1^{(0)} = D^{(t)} E_1^{(-t)}, \quad \dots, \quad E_d^{(0)} = D^{(t)} E_d^{(-t)} \tag{11.16}$$

можем равенство (11.15) записать в более кратком виде

$$\widehat{v}_t^{(0)} = -\alpha^{(-t)} E_0^{(0)} + e_1 E_1^{(0)} + \dots + e_d E_d^{(0)}. \tag{11.17}$$

Если $i = ap$, то по теореме 5.1 имеем

$$v_t^{(i)} = \mathbf{M}^a v_t^{(0)}, \tag{11.18}$$

поэтому в силу (11.17) можем записать

$$v_t^{(i)} = -\alpha^{(-t)} \mathbf{Q}_a^{(t)} + e_1 \mathbf{R}_{1,a}^{(t)} + \dots + e_d \mathbf{R}_{d,a}^{(t)}, \tag{11.19}$$

где

$$\mathbf{Q}_a^{(t)} = \mathbf{M}_a E_0^{(0)}, \quad \mathbf{R}_{1,a}^{(t)} = \mathbf{M}^a E_1^{(0)}, \dots, \ \mathbf{R}_{d,a}^{(t)} = \mathbf{M}^a E_d^{(0)}. \tag{11.20}$$

Пусть $\mathbf{1} = (1\,1\dots1)$ – строка длины $d+1$. Тогда по теоремам 2.2 и 2.3 сумма

$$v_{\min,t}^{(i)} = \mathbf{1} \cdot v_t^{(i)} = v_{t,0}^{(i)} + v_{t,1}^{(i)} + \dots + v_{t,d}^{(i)} \tag{11.21}$$

будет *минимальным вектором*, который в силу (11.19) можно записать в виде линейной комбинации

$$v^{(i)}_{\min,t} = -\alpha^{(-t)} Q^{(t)}_a + e_1 R^{(t)}_{1,a} + \dots + e_d R^{(t)}_{d,a} \tag{11.22}$$

с коэффициентами

$$Q^{(t)}_a = \mathbf{1}\cdot \mathbf{Q}^{(t)}_a, \quad R^{(t)}_{1,a} = \mathbf{1}\cdot \mathbf{R}^{(t)}_{1,a}, \quad \dots, \quad R^{(t)}_{d,a} = \mathbf{1}\cdot \mathbf{R}^{(t)}_{d,a}.$$

Из предложения 8.1 следует, что $Q^{(t)}_a$, $R^{(t)}_{1,a}, \dots, R^{(t)}_{d,a}$ являются *рекуррентными последовательностями* от параметра a:

$$\begin{aligned} Q^{(t)}_{a+d+1} &= b_d Q^{(t)}_{a+d} + \dots + b_1 Q^{(t)}_{a+1} + b_0 Q^{(t)}_a, \\ R^{(t)}_{k,a+d+1} &= b_d R^{(t)}_{k,a+d} + \dots + b_1 R^{(t)}_{k,a+1} + b_0 R^{(t)}_{k,a} \end{aligned} \tag{11.23}$$

для $k = 1, \dots, d$. Здесь $b_d, \dots, b_1, b_0$ – коэффициенты характеристического многочлена $ch_{\mathbf{M}}(x)$ порядковой матрицы $\mathbf{M}$, см. (8.4).

Найдем начальные условия для последовательности $Q^{(t)}_a$. По (11.16, (11.20) и (11.22) имеем

$$Q^{(t)}_0 = \mathbf{1}\cdot \mathbf{Q}^{(t)}_0 = \mathbf{1}\cdot E^{(0)}_0 = \mathbf{1}\cdot D^{(t)}_0 E^{(-t)}_0. \tag{11.24}$$

Продолжая по аналогии видим, что для последовательностей $Q^{(t)}_a$ и $R^{(t)}_{k,a}$ будут следующие *начальные условия*:

$$\begin{aligned} &Q^{(t)}_0 = \mathbf{1}\cdot D^{(t)}_0 E^{(-t)}_0, \\ &Q^{(t)}_1 = \mathbf{1}\cdot \mathbf{M} D^{(t)}_0 E^{(-t)}_0, \quad \dots, \quad Q^{(t)}_d = \mathbf{1}\cdot \mathbf{M}^d D^{(t)}_0 E^{(-t)}_0, \\ &R^{(t)}_{k,0} = \mathbf{1}\cdot D^{(t)}_0 E^{(-t)}_k, \\ &R^{(t)}_{k,1} = \mathbf{1}\cdot \mathbf{M} D^{(t)}_0 E^{(-t)}_k, \quad \dots, \quad R^{(t)}_{k,d} = \mathbf{1}\cdot \mathbf{M}^d D^{(t)}_0 E^{(-t)}_k \end{aligned} \tag{11.25}$$

для $k = 1, \dots, d$.

Теорема 11.1. 1. *Для $i = ap$ и иррациональной точки $\alpha^{(-t)}$, принадлежащей множеству ветвей $\mathfrak{D}_s(\alpha)$ из* (11.1), *вектор*

$$v^{(i)}_{\min} = (-Q^{(t)}_a \alpha^{(-t)}_1 + R^{(t)}_{1,a}, \dots, -Q^{(t)}_a \alpha^{(-t)}_d + R^{(t)}_{d,a}) \tag{11.26}$$

обладает минимальным свойством:

$$v^{(i)}_{\min} \in T^{(i)}_t \quad \text{с минимальным целым} \quad Q^{(t)}_a \geqslant 1. \tag{11.27}$$

Свойство (11.27) *означает, что ни одна из точек орбиты*

$$x_j \equiv -j\alpha^{(-t)} \bmod \mathbb{Z}^d$$

не попадает

$$x_j \notin T_t^{(i)} \quad \textit{для всех} \quad 1 \leqslant j < Q_a \tag{11.28}$$

в ядро $T_t^{(i)}$ *– многогранник* (11.12)*, соответствующий звезде* $v_t^{(i)}$ *из диаграммы* (11.5)*.*

2. *Объем* $s(T_t^{(i)})$ *ядра* $T_t^{(i)}$ *находится по формуле*

$$s(T_t^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T_t^{(0)}), \tag{11.29}$$

где определитель $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$*.*

3. *В случае калибровочной матрицы* $\mathbf{A}$ *с простым спектром имеют место неравенства:*

$$|Q_a^{(t)}\alpha_1^{(-t)} - R_{1,a}^{(t)}| + \cdots + |Q_a^{(t)}\alpha_d^{(-t)} - R_{d,a}^{(t)}| \leqslant c_{s,t}^{(0)}\varrho(\mathbf{A})^a. \tag{11.30}$$

Здесь $c_{s,t}^{(0)} = c_s(\mathbf{A}_t) r_s(v_{\min,t}^{(0)})$*, где* $\mathbf{A}_t$ *– калибровочная матрица* (11.11)*,* $v_{\min,t}^{(0)}$ *– минимальный вектор* (11.22)*, и* $\varrho(A)$ *– спектральный радиус* (6.6) *матрицы* $\mathbf{A}$*; кроме того,* $Q_a^{(t)}$ *и* $R_{k,a}^{(t)}$ *для* $k=1,\ldots,d$ *– рекуррентные последовательности* (11.23) *с начальными условиями* (11.25)*.*

Доказательство. По построению все звезды $v^{(*)}$ и $v_t^{(*)}$ из диаграммы (11.5) вкладываются в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Применяя к точке $\alpha^{(-t)} \in \triangle$ теорему 2.3 о дифференцировании звезд и учитывая формулу (11.12), получаем первое утверждение.

При переходе (11.11) от старой калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ к новой $\mathbf{A}_t$ характеристические многочлены и определители остаются инвариантными

$$ch_{\mathbf{A}_t}(x) = ch_{\mathbf{A}}(x), \quad \det \mathbf{A}_t = \det \mathbf{A}. \tag{11.31}$$

Поэтому формула (11.29) и третье утверждение вытекают из теоремы 9.1, диаграммы (11.5) и равенств (11.31). □

§12. Крона

12.1. Линейные унимодулярные преобразования. Выделим в группе целочисленных унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 подгруппу $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$U_L = \begin{pmatrix} U & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12.1}$$

где $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – целочисленный столбец. Группа G_0 действует на точки $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U_L\alpha = U\alpha + L. \tag{12.2}$$

Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$. Определим *α-крону* (coma), полагая

$$\mathcal{C}(\alpha) = G_0(\mathfrak{D}_s\mathcal{O}(\alpha)), \tag{12.3}$$

или в силу равенства (11.2) будем иметь

$$\mathcal{C}(\alpha) = G_0\mathfrak{D}_s(\alpha). \tag{12.4}$$

Из определения (12.3) следует инвариантность

$$G_0 \cdot \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(\alpha) \tag{12.5}$$

α-кроны $\mathcal{C}(\alpha)$ относительно действия группы G_0.

12.2. Свойства кроны. Имеют место следующие включения

$$\mathcal{O}(\alpha) \subset \mathfrak{D}_s(\alpha) \subset \triangle, \quad \mathcal{C}(\alpha) \subset \mathbb{R}^d. \tag{12.6}$$

Для любой точки $\mathfrak{a}$ из α-кроны $\mathcal{C}(\alpha)$ найдется такая матрица $U_L \in G_0$, что

$$\mathfrak{a} = U_L\alpha^{(-t)}, \tag{12.7}$$

где точка $\alpha^{(-t)} = \partial_t \cdots \partial_1\alpha \in \triangle$ принадлежит множесту α-ветвей $\mathfrak{d}(\alpha)$. Из (12.7), в частности, находим следующие *инварианты*:

$$\mathbb{Q}(\mathfrak{a}) = \mathbb{Q}(\alpha), \quad \deg(\mathfrak{a}) = \deg(\alpha). \tag{12.8}$$

12.3. Аппроксимация точек кроны. По теореме 11.1 для $i = ap$ имеем неравенство

$$|Q_a^{(t)}\alpha_1^{(-t)} - R_{1,a}^{(t)}| + \cdots + |Q_a^{(t)}\alpha_d^{(-t)} - R_{d,a}^{(t)}| \leqslant c_{s,t}^{(0)}\varrho(\mathbf{A})^a. \tag{12.9}$$

Здесь $c_{s,t}^{(0)} = c_s(\mathbf{A}_t)r_s(v_{\min,t}^{(0)})$ и $\mathbf{A}_t$ – калибровочная матрица (11.11). Введем обозначение

$$v_{\min,t}^{(i)} = -Q_a^{(t)}\alpha^{(-t)} + R_a^{(t)}, \tag{12.10}$$

где $\alpha^{(-t)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(-t)} \\ \vdots \\ \alpha_d^{(-t)} \end{pmatrix}$ и $R_a^{(t)} = \begin{pmatrix} R_{1,a}^{(t)} \\ \vdots \\ R_{d,a}^{(t)} \end{pmatrix}$. Из (12.9) для вектора-столбца $v_{\min,t}^{(i)}$ следует неравенство

$$|v_{\min,t}^{(i)}|_s \leqslant c_{s,t}^{(0)} \varrho(\mathbf{A})^a \tag{12.11}$$

в s-метрике $|\cdot|_s$.

Используя представление (12.7) записываем

$$\alpha^{(-t)} = U_L^{-1} \begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{12.12}$$

где

$$U_L^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_d \end{pmatrix}.$$

Поэтому имеем

$$\alpha^{(-t)} = U^{-1}\mathfrak{a} - U^{-1}L. \tag{12.13}$$

Подставляя (12.13) в (12.10) получаем

$$v_{\min,t}^{(i)} = U^{-1} w_{\min}^{(i)}, \tag{12.14}$$

где

$$w_{\min}^{(i)} = -Q_a^{(-t)}\mathfrak{a} + (UR_a^{(-t)} + L). \tag{12.15}$$

Если обозначить

$$q_a = Q_a^{(-t)}, \quad r_a = UR_a^{(-t)} + L, \tag{12.16}$$

то (12.15) можем переписать в виде

$$w_{\min}^{(i)} = -q_a\mathfrak{a} + r_a. \tag{12.17}$$

Согласно равенству (12.14)

$$w_{\min}^{(i)} = Uv_{\min,t}^{(i)}, \tag{12.18}$$

поэтому в s-метрике $|\cdot|_s$ будет выполняться неравенство

$$|w_{\min}^{(i)}|_s \leqslant c_s(U)|v_{\min,t}^{(i)}|_s. \tag{12.19}$$

Вспоминая неравенство (12.11), получаем оценку

$$|w_{\min}^{(i)}|_s \leqslant c_{s,U}\, \varrho(\mathbf{A})^a \tag{12.20}$$

с константой $c_{s,U} = c_s(U)c_{s,t}^{(0)}$, где $c_s(U)$ и $c_{s,t}^{(0)}$ – константы (6.10) и (11.30). В силу (12.17) неравенство (12.20) можем записать более развернуто

$$|q_a\mathfrak{a}_1 - r_{1,a}| + \cdots + |q_a\mathfrak{a}_d - r_{d,a}| \leqslant c_{s,U}\,\varrho(\mathbf{A})^a, \tag{12.21}$$

где q_a и $r_{k,a}$ для $k = 1, \ldots, d$ – рекуррентные последовательности (12.16), имеющие рекуррентное соотношение такое же, как у $Q_a^{(t)}$, $R_{k,a}^{(t)}$ и, значит, как у последовательностей Q_a, $R_{k,a}$ для точки α. Что касается начальных условий, то у последовательности q_a они совпадают с условими для $Q_a^{(t)}$ из (11.20), а у дополнительной последовательности $r_a = \begin{pmatrix} r_{1,a} \\ \vdots \\ r_{d,a} \end{pmatrix}$ по определению (12.16) будем иметь

$$r_0 = UR_0^{(t)} + L, \quad \ldots, \quad r_d = UR_d^{(t)} + L. \tag{12.22}$$

Теперь расширим диаграмму (11.5) дополнительной строкой:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha^{(-t)} & \xrightarrow{\delta_t^{(t)}} & \ldots & \xrightarrow{\delta_1^{(t)}} & \alpha^{(0)} & \to \ldots \to & \alpha^{(i)} & \to & \ldots \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
v^{(-t)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \ldots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & v_t^{(0)} & \to \ldots \to & v_t^{(i)} & \to & \ldots \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
T^{(-t)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \ldots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & T_t^{(0)} & \to \ldots \to & T_t^{(i)} & \to & \ldots \\
\downarrow U & & & & \downarrow U & & \downarrow U & & \\
T_w^{(0)} & \xrightarrow{\sigma_t^{(t)}} & \ldots & \xrightarrow{\sigma_1^{(t)}} & T_{t,U}^{(0)} & \to \ldots \to & T_{t,U}^{(i)} & \to & \ldots
\end{array} \tag{12.23}$$

Здесь

$$T_{t,U}^{(i)} = UT_t^{(i)} \tag{12.24}$$

– унимодулярные образы многогранников $T_t^{(i)}$ из диаграммы (11.5), где $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ – матрица (12.1).

Теорема 12.1. 1. *Для* $i = ap$ *и любой иррациональной* $\mathfrak{a}$ *– точки* α*-кроны* $\mathcal{C}(\alpha)$ *из* (12.4) *вектор*

$$w_{\min}^{(i)} = (-q_a\mathfrak{a}_1 + r_{1,a}, \ldots, -q_a\mathfrak{a}_d + r_{d,a}) \tag{12.25}$$

обладает минимальным свойством:

$$w_{\min}^{(i)} \in T_{t,U}^{(i)} \quad \text{с минимальным целым} \quad q_a \geqslant 1. \tag{12.26}$$

Свойство (12.26) *означает, что ни одна из точек орбиты*

$$x_j \equiv -j\mathfrak{a} \bmod \mathbb{Z}^d$$

не попадает в ядро $T^{(i)}_{t,U}$ *– многогранник* (12.24),

$$x_j \notin T^{(i)}_{t,U} \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j < q_a. \tag{12.27}$$

2. *Объем* $s(T^{(i)}_{t,U})$ *ядра* $T^{(i)}_{t,U}$ *находится по формуле*

$$s(T^{(i)}_{t,U}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(0)}_t), \tag{12.28}$$

где $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$.

3. *В случае калибровочной матрицы* $\mathbf{A}$ *с простым спектром имеют место неравенства:*

$$|q_a\mathfrak{a}_1 - r_{1,a}| + \dots + |q_a\mathfrak{a}_d - r_{d,a}| \leqslant c_{s,U}\,\varrho(\mathbf{A})^a, \tag{12.29}$$

где $c_{s,U}$ *– константа из* (12.20) *и* q_a, $r_{k,a}$ *для* $k = 1, \dots, d$ *– рекуррентные последовательности* (12.16) *с начальными условиями* (11.25) *и* (12.22).

Доказательство. По условию (12.1) матрица $U \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, поэтому отображение

$$\mathbb{T}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^d \colon x \bmod \mathbb{Z}^d \ \mapsto\ Ux \bmod \mathbb{Z}^d \tag{12.30}$$

является автоморфизмом тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Применяя теорему 2.3 для точки $\alpha^{(-t)}$, из диаграммы (12.23) и (12.30) получаем первое утверждение. Формула (12.28) вытекает из теоремы 11.1, если заметить, что $s(T^{(i)}_{t,U}) = s(UT^{(i)}_t) = s(T^{(i)}_t)$ по определению (12.24) многогранника $T^{(i)}_{t,U}$. Третье утверждение было ранее доказано в (12.21). □

Из теоремы 12.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 12.1. 1. *Рекуррентное соотношения для числителей и знаменателей* $R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$, Q_a *подходящих дробей в* (12.25) *является инвариантом относительно произведения* $G_0 \times \mathfrak{D}_s$ *группы* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ *и полугруппы* $\mathfrak{D}_s$.

2. *Все точки* $\mathfrak{a}$ *из кроны* $\mathcal{C}(\alpha)$, *определенной в* (12.3), *имеют одну и ту же скорость приближения* $\varrho(\mathbf{A})^a$ *в неравенстве* (12.29).

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
2. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, четвертое изд. М.: Наука, 1978.
3. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения единиц алгебраических полей в цепные дроби.* Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 84–129.
4. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
5. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 99–122.
6. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби.* — Совр. пробл. матем., **23**, МИАН, М., (2016), 41–66.
7. Z. Coelho, A. Lopes, L. F. Da Rocha, *Absolutely Continuous Invariant Measures for a Class of Affine Interval Exchange Maps.* — Proccedings of The American Mathematical Society **123** (1995), No. 11, 3533–3542.
8. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivaties of circle rotations and similarity of orbits.* — Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint Series **62** (2004), 1–11.
9. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface.* — Experemental Mathematics **23** (2014), No. 4, 390–410.
10. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102.
11. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
12. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, М., 1953.
13. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2, Киев, 1952.
14. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.

Zhuravlev V. G. Unimodular invariance of karyon decompositions of algebraic numbers in multidimensional continued fractions.

By the differentiation method of induced toric tilins we find periodic expansions for algebraic irrationalities in multidimensional continued fractions. These expansions give the best karyon approximations with respect to polyhedral norms. The above irrationalities are obtained by the composition of backward continued fraction mappings and unimodular transformations of algebraic units that decompose into a purely periodic continued fractions. The artifact of this expansion several invariants has become:

recurrence relations for numerators and denominators of convergent fractions and the rate of multidimensional approximation of irrationalities by rational numbers.

Математический
институт им. В. А. Стеклова РАН
Москва;
Владимирский государственный
университет,
пр. Строителей, 11,
600024, Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 6 марта 2018 г.