Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 469, 2018 г.

В. Г. Журавлев

УНИМОДУЛЯРНОСТЬ ИНДУЦИРОВАННЫХ РАЗБИЕНИЙ ТОРА

Введение

0.1. Перекладывающиеся развертки тора. Разверткой T тора $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$, где $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d]$ – полная решетка в $\mathbb{R}^d$, называется подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$, получающееся подъемом тора $\mathbb{T}^d_L$ в пространство $\mathbb{R}^d$ через биекцию

$$T \overrightarrow{\sim} \mathbb{T}^d_L : \quad x \mapsto x \bmod L. \tag{0.1}$$

Развертка T будет перекладывающейся, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup \ldots \sqcup T_d \tag{0.2}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{0.3}$$

на векторы $v_0, \dots, v_D$, связанные с базисом решетки L равенствами $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \dots, d$. Здесь $\mathrm{col}(x) = k$ обозначает цвет точек x, принадлежащих подмножеству T_k.

В силу существования биекции (0.1) множество T можно отождествить с тором $\mathbb{T}^D_L$. Тогда перекладывание (0.3) будет эквивалентно сдвигу $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{0.4}$$

тора T на вектор $\alpha' \equiv v_0 \bmod L$.

0.2. Вкладывающиеся в тор развертки. Пусть дан еще тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$ и на нем определен

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} : \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L} \tag{0.5}$$

Ключевые слова: перекладывания тора, индуцированные разбиения тора, производные разбиения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 14-11-00433.

сдвиг $S = S_\alpha$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Скажем, что перекладывающаяся развертка T из (0.2) вкладывается

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{0.6}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются условия:

1) развертка $T \subset \mathbb{R}^d$ допускает вложение $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ в качестве его подмножества, т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$;

2) перекладывание (0.3) или сдвиг тора (0.4) являются индуцированными отображениями (отображениями первого возвращения, отображением Пуанкаре) $S' = S|_T$ для сдвига тора S.

0.3. Дифференцирование индуцированных разбиений. Вкладывающаяся в тор (0.6) развертка T порождает индуцированное разбиение

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}|_T = \mathcal{T}_0 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{0.7}$$

тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, где $\mathcal{T}_k$ — орбиты множеств $T_k \subset T$ относительно сдвига тора S. Множество T по отношению ко всему разбиению (0.7) является ядром $T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$ разбиения тора $\mathcal{T}$. Ядро $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ характеризуется тем свойством, что отображение первого возвращения $S' = S|_{\mathrm{Kr}}$, индуцированное сдвигом тора S из (0.5), эквивалентно перекладыванию $d+1$ областей из $\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Kr}_d$.

На множестве индуцированных разбиений (0.7) определены операции дифференцирования

$$\sigma : \quad \mathcal{T} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{T}^\sigma \tag{0.8}$$

таким образом, что в результате получаются снова индуцированные разбиения

$$\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}|_{\mathrm{Kr}^\sigma}$$

того же тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, порождаемые некоторым новым производным ядром $\mathrm{Kr}^\sigma = T^\sigma$.

На языке ядер Kr дифференцирование $\sigma : \ \mathrm{Kr} \ \longrightarrow \ \mathrm{Kr}^\sigma$ сводится к комбинации следующих геометрических преобразований пространства $\mathbb{R}^d$. Все области Kr_k из ядра Kr разбиваются на три класса. Области первого класса сохраняются, второго класса – подвергаются преобразованию косого сдвига, а третьего – с дополнительным сжатием вдоль прямой.

0.4. Основные результаты. Векторы перекладывания v_i в (0.3) имеют вид $v_i = Q_i\alpha + P_i$ для $i = 0, 1, \ldots, d$. Здесь Q_i – целые положительные числа и $P_i = \begin{pmatrix} P_{i1} \\ \vdots \\ P_{id} \end{pmatrix}$ – векторы с целыми координатами. Развертка тора T из (0.2) называется унимодулярной, если квадратная матрица

$$\begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \ldots & P_{d1} \\ & & \ldots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \ldots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \ldots & Q_d \end{pmatrix}$$

размера $d+1$ будет унимодулярной, т.е. с определителем ± 1.

Основными результатами настоящей работы являются следующие.

1. *Если T – унимодулярная развертка тора, то она вкладывается*

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{0.9}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d_{\mathbb{Z}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, определенного в (0.5) (*см. предложение* 6.1).

2. *Пусть сдвиг $S = S_\alpha$ имеет иррациональный вектор*

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d),$$

т.е. числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ линейно независимы над кольцом $\mathbb{Z}$. Тогда любая производная T^σ унимодулярной развертки тора T снова является унимодулярной разверткой и поэтому T^σ вкладывается

$$T^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{0.10}$$

в же тор $\mathbb{T}^d$ (*см. теорему* 6.2).

Используя (0.9) и (0.10), можно построить бесконечное семейство индуцированных разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\alpha, T_*)$ тора $\mathbb{T}^d$, зависящее от двух связанных параметров: вектора сдвига α и начальной развертки тора T_*. В п. 7.4 приведены два алгоритма построения таких разверток T_*.

0.5. История и связи. Метод настоящей работы основан на дифференцировании ядер $\mathrm{Kr}^\sigma = T^\sigma$, вкладывающихся в тор [1, 2], и имеет своим источником разбиения Рози [3, 4]. Индуцированные разбиения тора впервые появились в работе Ж. Рози [3] – это были двумерные самоподобные разбиения с фрактальными границами. Общие же индуцированные разбиения были построены в [2]. Для размерности $d = 1$

операции дифференцирования разбиений (0.8) эквивалентны возвратному отображению для цепных дробей (backward continued fraction map) [5, 6]; для $d = 2$ такие операции были определены в [1] и, наконец, в [2] для произвольной размерности d.

Интерес к индуцированным разбиениям (0.7) вызывается их связями с множествами ограниченного остатка [4, 7–12], многомерными приближениями [2,13–16], сбалансированными словами [17,18], ростом квазикристаллов [19–21] и теорией сложности (complexity) [21].

§1. Звезды и их производные

1.1. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \ldots, d\}$. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1, \ldots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \ldots, d\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетание. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \tag{1.1}$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$.

Определение 1.1. *Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через*

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \ldots + \lambda_{k'_{d-1}} v_{k'_{d-1}};\ \lambda_{k'_1}, \ldots, \lambda_{k'_{d-1}} \in \mathbb{R}\} \tag{1.2}$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ назовем звездой, *если для всех дополнительных (1.1) к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости (1.2) и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.*

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ будут линейно независимы. Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_d v_d;\ \lambda_0 + \ldots + \lambda_d \leqslant 1,\ \lambda_0, \ldots, \lambda_d \geqslant 0\}, \tag{1.3}$$

где коэффициенты $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (1.3). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\mathrm{int}}(v). \tag{1.4}$$

1.2. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \tag{1.5}$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $X_1^{\mathrm{int}} \cap X_2^{\mathrm{int}} = \varnothing$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k.

Из определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Предположим, что для некоторого сочетания*

$$\sigma = \{k_1, k_2\}$$

из Σ *сумма векторов* $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ *звезды* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *не принадлежит плоскости* $H_{\sigma'}$ *из* (1.2), *где* σ' *– дополнительное сочетание* (1.1) *для* σ. *Тогда только одно из множеств*

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.6}$$

будет согласованным. Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \tag{1.7}$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ *или* v_{k_2}, v_σ *принадлежат разным полупространствам* $H^{\pm}_{\sigma'}$, *и* $v(\sigma')$ *– дополнительное для* $v(\sigma)$ *множество векторов из звезды* v.

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (1.7) гарантирована ограничением на сумму векторов $v_\sigma \notin H_{\sigma'}$.

Определение 1.2. *Обозначим через*

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.8}$$

то множество векторов из (1.6), *которое является звездой. Если существуют множества векторов* v^σ *для всех сочетаний* $\sigma \in \Sigma$, *т.е. для всех* σ *выполняется условие леммы* 1.1, *то будем говорить, что звезда* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.3 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ определено отображение

$$v \quad \xrightarrow{\sigma} \quad v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma\}, \tag{1.9}$$

где
$$v^{\sigma}_{k_1} = v_{k_1}, \quad v^{\sigma}_{k_2} = v_{\sigma}$$
или
$$v^{\sigma}_{k_1} = v_{\sigma}, \quad v^{\sigma}_{k_2} = v_{k_2}$$
в зависимости от выполнения условия из (1.7), и
$$v^{\sigma}_{k'} = v_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' \in \sigma'.$$

Звезду v^{σ} из (1.9) назовем *σ-производной* нерывожденой звезды v. Если нужно выделит индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ-производной (1.9) использовать еще и другое развернутое обозначение
$$v^{\sigma} = v^{\{k_1,k_2\}}. \tag{1.10}$$
По определению (1.9) имеет место формула коммутирования
$$v^{\{k_1,k_2\}} = v^{\{k_2,k_1\}}.$$
Поэтому для нерывожденной звезды v существуют $C^2_{d+1} = \frac{(d+1)d}{2}$ ее производных звезд v^{σ}.

§2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть
$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d] \tag{2.1}$$
– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \dots, l_d$, т.е. векторы $l_1, \dots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$, если отображение
$$T \overset{\longrightarrow}{\sim} \mathbb{T}^d_L : \quad x \mapsto x \bmod L$$
– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение
$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d \tag{2.2}$$
и перекладывание
$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{2.3}$$
на векторы $v_0, v_1, \dots, v_D$, связанные с базисом (2.1) решетки L равенствами
$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, d. \tag{2.4}$$

В формуле (2.3) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (2.2), где $k = 0, 1, \ldots, d$.

Заметим, что при переходе (2.4) от векторов переклыдывания $v_0, v_1, \ldots, v_d$ к базизу $l_1, \ldots, l_d$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{2.5}$$

В частности, из равенств (2.4) и (2.5) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$. Поэтому перекладывание (2.3) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{2.6}$$

на вектор $\alpha' \bmod L$.

2.2. Перекладывающиеся параллелоэдры и их деформации. Определим для $m = 0, 1, \ldots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды

$$\overline{T}_m = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_d} v_{k_d};\ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{2.7}$$

где $k_1, \ldots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ является звездой (см. определение 1.1), то объединение

$$\overline{T} = \overline{T}_0 \cup \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_d \tag{2.8}$$

параллелепипедов (2.7) образует *параллелоэдр* [8] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} \overline{T}[l] \tag{2.9}$$

с помощью параллельных переносов $\overline{T}[l] = \overline{T} + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $\overline{T}[l]$ из (2.9) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (1.5).

Для $d = 2$ параллелоэдр $\overline{T}$ из (2.7) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [22], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [23].

По *i-алгоритму* из [8] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\overline{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d$, имеющее внутреннюю часть $T^{\rm int} = (\overline{T})^{\rm int}$ такую же, как и параллелоэдр (2.8), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{l\in L} T[l] \tag{2.10}$$

в строгом смысле (1.5), т.е. в (2.10) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \varnothing$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (2.10) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$.

Исходя из i-алгоритма [8], можно считать, что

$$0 \in T_0,\ \ v_0 \in T_1,\ \ v_0 + v_1 \in T_2,\ \ \ldots,\ \ v_0 + v_1 + \ldots + v_{d-1} \in T_d. \tag{2.11}$$

Если дополнительно предположить выполненными условия (2.11), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ ставится в соответствие *перекладывающийся параллелоэдр*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d, \tag{2.12}$$

являющийся разверткой тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания v_0, v_1, $\ldots, v_d$ в (2.3).

Приведенная конструкция развертки T не является жесткой. Параллельные $(d-1)$-мерные грани параллелепипедов $T_0, T_1, \ldots, T_d$ из (2.12) допускают малые деформации, при которых измененное множество остается перекладывающейся разверткой тора $\mathbb{T}^d_L$ с прежними векторами перекладывания.

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^d_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}: \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \tag{2.13}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_L$ с изменяющимися решетками L.

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. *Перекладывающаяся развертка T из* (2.2) вкладывается

$$T \overset{\rm em}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.14}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$, *если выполняются следующие условия.*

1. *Подмножество* $T \subset \mathbb{R}^d$ *является* $\mathcal{L}$-различимым, *т.е. для любых элементов* x, y *из* T, *связанных сравнением* $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, *следует их равенство* $x = y$. *Значит, отображение*

$$T \overrightarrow{\sim} T \bmod \mathcal{L}: \ x \mapsto x \bmod \mathcal{L} \tag{2.15}$$

будет взаимно однозначным; поэтому используя отображение (2.15) *можем считать развертку* T *вложенной как множество*

$$T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.16}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$.

2. *Векторы перекладывания (2.3) имеют вид*

$$v_k \equiv m_k \alpha \bmod \mathcal{L} \tag{2.17}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$ *с некоторыми коэффициентами* $m_k = 1, 2, \ldots$, *называемыми* порядками *векторов* v_k.

3. *Пусть*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \{S^j(T_k);\ j = 1, \ldots, m_k - 1\} \tag{2.18}$$

обозначает орбиту *подмножества* $T_k \subset T$. *В силу включения* (2.16) *будем полагать* $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. *Тогда по определению считается, что орбиты* (2.18) *удовлетворяют условию*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \varnothing \tag{2.19}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$.

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (2.18) определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k);\ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \tag{2.20}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из (2.13) *иррациональным*, когда выполняется условие:

$$\text{\textit{числа}}\ \ 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\ \text{\textit{линейно независимы над кольцом}}\ \ \mathbb{Z}. \tag{2.21}$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Теорема 2.1. *Пусть развертка* T *вкладывается* (2.14) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, *развертка* T *имеет внутреннюю точку, и пусть вектор* α *для сдвига*

$S = S_\alpha$ *из* (2.13) *будет иррациональным* (2.21). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *не пересекаются, т.е.*

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \varnothing \tag{2.22}$$

только при условии $j_1 = j_2$ *и* $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d, \tag{2.23}$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \ldots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (2.20).

Доказательство. См. [2]. □

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (2.6) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ из (2.13), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \tag{2.24}$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{2.25}$$

соответственно развертку T из (2.2), (2.12) и *индуцированное разбиение* (2.23) тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [4, 19]) *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ используется обозначение $T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$. Ядро Kr характеризуется следующим свойством: ядро – это такое подмножество $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\mathrm{Kr}}, \tag{2.26}$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (2.13), эквивалентно перекладыванию $D+1$ подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Kr}_D. \tag{2.27}$$

В определении ядра Kr важно, что количество областей в разбиении (2.27) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}^D_L$, а индуцированное отображение (2.26) изоморфно сдвигу этого тора.

2.6. Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 2.2. *Определенная в* (2.12) *развертка тора* $T = T(v)$ *вкладывается* (2.14) *в тор* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) *множество* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d$ *из* (2.25) *является разбиением тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$;

2) *внутренняя часть* T^{int} *развертки* $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *не содержит ни одной из точек* x_j *орбиты*

$$\mathrm{Orb}^+(0, m) = \{x_j = S^j(0);\ j = 1, 2, \ldots, m-1\} \tag{2.28}$$

порядка

$$m = m_0 + m_1 + \ldots + m_d. \tag{2.29}$$

Доказательство. См. [2]. □

Число m из (2.29) называется *порядком* развертки тора $T = T(v)$. Саму развертку $T = T(v)$ и порождающую ее звезду v назовем *минимальными*, если выполняется условие 2) из теоремы 2.2.

Определение 2.2. *Пусть* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ – *звезда и* $T = T(v)$ – *отвечающая ей развертка* (2.25) *тора* $\mathbb{T}^d_L$ *с векторами перекладывания* $v_0, v_1, \ldots, v_D$. *Если данная развертка* T *вкладывается* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно некоторого сдвига* $S = S_\alpha$, *то в этом случае будем говорить, что такая звезда* v вкладывается

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.30}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S.

§3. Симплексы

3.1. Линейные унимодулярные преобразования. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle^d_e$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \ldots, 0), \quad e_1 = (1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_d = (0, \ldots, 1)$$

из пространства $\mathbb{R}^d$. Выделим в группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – произвольный целочисленный столбец. Определим действие группа G_0 на точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{3.2}$$

где α рассматривается как столбец

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

3.2. Унимодулярный базисный симплекс.

Предложение 3.1. *Если α – иррациональная точка, то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in \triangle_U^d, \tag{3.4}$$

где $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$.

Доказательство. См. [15]. □

Симплекс $\triangle_U^d$ из (3.4) назовем *базисным.* Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис d-мерной решетки $\mathbb{Z}^d$.

Условимся и дале под терминами *унимодулярный базис*, *унимодулярная матрица* и т.д. понимать базис решетки $\mathbb{Z}^d$, матрицу с целыми коэффициентами и определителем ± 1.

3.3. Базисный симплекс. Выберем в качестве **s** *базисный симплекс*

$$\triangle = \triangle_U^d \tag{3.5}$$

из предложения 3.1. Он имеет целочисленные вершины

$$v_i = Ue_i = P_i \tag{3.6}$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, d$. Векторы

$$v_i' = v_i - v_0 = Ve_i \tag{3.7}$$

для $i = 1, \ldots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (3.5) имеет объем

$$\operatorname{vol} \triangle = \frac{1}{d!}. \tag{3.8}$$

3.4. Суперсимплекс. Определим следующий *суперсимплекс*

$$\widehat{\triangle} = \widehat{\triangle}_U^d \subset \mathbb{R}^{d+1}. \tag{3.9}$$

Он имеет $d+2$ вершины: $d+1$ целочисленную вершину

$$\widehat{v}_i = \widehat{U}e_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

с индексами $i = 0, 1, \ldots, d$ и еще одну вершину в начале координат $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$. Из (3.7) и (3.10) следует, что векторы

$$\widehat{v}_i = \widehat{v}_i - 0$$

для $i = 0, 1, \ldots, d$ образуют унимодулярный базис и поэтому суперсимплекс (3.9) имеет объем

$$\operatorname{vol} \widehat{\triangle} = \frac{1}{(d+1)!}. \tag{3.11}$$

Далее выходящие из начала координат векторы и их концы будем отождествлять.

§4. Дифференцирования центрированных унимодулярных базисов

4.1. Центрированный унимодулярный базис. Как уже было сказано, множество ребер

$$\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d\} \tag{4.1}$$

суперсимплекса $\widehat{\triangle}$ из (3.9) образуют унимодулярный базис в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$. Базисный симплекс $\triangle$ из (3.5) является гранью суперсимплекса $\widehat{\triangle}$ и $\triangle$ содержит в качестве внутренней точку α. Такой $\widehat{\triangle}$ назовем *центрированным унимодулярным суперсимплексом* или кратко – *CU-суперсимплексом*.

Ему отвечает *центрированный унимодулярный базис* $\widehat{V}$ из (4.1) (*CU-базис*), центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$. Последнее означает, что внутренняя область *конуса* $\mathbb{R}_+\widehat{V}$ содержит *луч* $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$.

4.2. Пространства. Введем следующие понятия:

$$\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mathbf{K} = \mathbb{R}^d \tag{4.2}$$

– *суперпространство* и *ядерное пространство* (*karyon space*), вложенное

$$\mathbf{K} \quad \hookrightarrow \quad \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{S} \tag{4.3}$$

в $\mathbf{S}$ как гиперплоскость

$$\mathbf{K}_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbf{K}\} \tag{4.4}$$

– *ядерная гиперплоскость*

4.3. Проекции. Определим следующие проекции:

$$\mathbf{S} \quad \xrightarrow{\mathrm{pr}} \quad \mathbf{K}_0 \quad \xrightarrow{\kappa_0} \quad \mathbf{K}, \tag{4.5}$$

где

$$\mathrm{pr} : (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \mapsto (x_1 - \alpha_1 x_{d+1}, \ldots, x_d - \alpha_d x_{d+1}, 0) \tag{4.6}$$

– параллельная проекция вдоль вектора

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

и

$$\kappa_0 : (x_1, \ldots, x_d, 0) \mapsto (x_1, \ldots, x_d) \tag{4.8}$$

– изоморфизм. Обозначим через

$$\kappa = \kappa_0 \circ \mathrm{pr} \tag{4.9}$$

композицию отображений (4.6) и (4.8).

4.4. Центрированные унимодулярные базисы и звезды. Пусть $\widehat{V}$ — центрированный унимодулярный базис (CU-базис), определенный в (4.1). Его проекция (4.9)

$$\kappa : \widehat{V} \to r \tag{4.10}$$

представляет собою множество $r = \{r_0, r_1, \ldots, r_d\}$, состоящее из векторов

$$r_i = \kappa(\widehat{v}_i) = v_i - \alpha \tag{4.11}$$

для $i = 0, 1, \ldots, d$ в ядерном пространстве $\mathbf{K}$ из (4.2), (4.3).

Предложение 4.1. *Если α – иррациональная точка* (2.21) *и $\widehat{V}$ – центрированный унимодулярный базис* (4.1)*, то множество векторов r из* (4.10) *образует невырожденную звезду.*

Доказательство. См. [15]. □

4.5. Дифференцирования центрированных базисов. Как уже отмечалось, отображение (4.10) задает биекцию между векторами CU-базиса $\widehat{V}$ и лучами звезды r. Поскольку оно является линейным отображением, то с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \widehat{V} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\sigma"] & r \arrow[d, "\sigma"] \\ \widehat{V}^{\sigma} \arrow[r, "\kappa"] & r^{\sigma} \end{tikzcd} \tag{4.12}$$

можно перенести операции дифференцирования $\sigma \in \Sigma$ звезд (1.9) на дифференцирования CU-базисов $\widehat{V}$.

Выясним *геометрический смысл* дифференцирований CU-базисов $\widehat{V}$. Пусть σ' — дополнительное сочетание к $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через $\widehat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$, содержащую векторы $\widehat{v}_{k'_j} \in \widehat{V}$ с индексами k'_j из σ' и луч $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$. Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор $\widehat{v}_{k_1}$ и сумма векторов $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\widehat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\widehat{V} \xrightarrow{\sigma} \widehat{V}^{\sigma} \tag{4.13}$$

сводится к замене вектора $\widehat{v}_{k_2}$ на сумму $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$.

Предложение 4.2. *Если α – иррациональная точка* (2.21)*, то для любого $\sigma \in \Sigma$ производное множество векторов $\widehat{V}^{\sigma}$, определенное в*

(4.12) *и* (4.13)*, снова образует* CU*-базис, т.е. унимодулярный базис, центрированный лучом* $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$*.*

Доказательство. См. [15]. $\square$

Определенный в (4.13) CU-базис $\widehat{V}^\sigma$ назовем *σ-производным базисом.*

Используя предложения 4.1 и 4.2, приходим к следующему утверждению (см. подробности в [15]).

Предложение 4.3. 1. *Если* α *– иррациональная точка* (2.21)*, то любой центрированный унимодулярный базис* $\widehat{V}$*, центрированный лучом* $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$*, является бесконечно дифференцируемым.*

2. *При том же условии на* α *звезда* $r = \{r_0, r_1, \ldots, r_d\}$ *из* (4.10) *также будет бесконечно дифференцируемой.*

§5. Проекция унимодулярного базиса

5.1. Произвольный центрированный унимодулярный базис. Пусть

$$\widehat{\mathbf{V}} = \{\widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_d\} \tag{5.1}$$

– произвольный центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}_-$ унимодулярный базис (CU-базис), где

$$\widehat{\alpha}_- = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Такой базис (5.1) образован векторами $\widehat{\mathbf{v}}_i$ с целыми координатами

$$\widehat{\mathbf{v}}_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ Q_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ Q_1 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \widehat{\mathbf{v}}_d = \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ Q_d \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

и он получается

$$\widehat{\mathbf{V}} = U\widehat{V}_- \tag{5.4}$$

с помощью унимодулярного преобразования $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ базиса

$$\widehat{V}_- = \{(\widehat{v}_0)_-, (\widehat{v}_1)_-, \ldots, (\widehat{v}_d)_-\}. \tag{5.5}$$

Здесь векторы $(\widehat{v}_i)_-$ вычисляются аналогично векторам $\widehat{v}_i$ базиса (4.1), если вектор $\widehat{\alpha}$ заменить на вектор $\widehat{\alpha}_-$ из (5.2). Следовательно, базис

(5.5) также унимодулярный. Далее будем предполагать выполненным условие
$$Q_0 \geqslant 1, \quad Q_1 \geqslant 1, \ldots, \quad Q_d \geqslant 1 \tag{5.6}$$
на последние координаты векторов из (5.3). По определению (5.1)–(5.5) составленная из координат векторов (5.3) квадратная матрица
$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \ldots & P_{d1} \\ & & \ldots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \ldots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \ldots & Q_d \end{pmatrix} \tag{5.7}$$
размера $d+1$ унимодулярна. Назовем S *матрицей базиса* $\widehat{\mathbf{V}}$ из (5.1).

5.2. Звезда как проекция унимодулярного базиса. Определим проекцию
$$\mathrm{pr}_- : \quad \widehat{\mathbf{V}} \quad \to \quad \mathbf{r} \tag{5.8}$$
аналогично проекции pr из (4.6), заменяя вектор $\widehat{\alpha}$ на вектор $\widehat{\alpha}_-$ из (5.2). Множество $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d\}$ состоит из векторов
$$\mathbf{r}_i = \mathrm{pr}_-(\widehat{\mathbf{v}}_i) = (Q_i\alpha + P_i, 0) \tag{5.9}$$
для $i = 0, 1, \ldots, d$, расположенных в ядерной гиперплоскости $\mathbf{K}_0$ из (4.4), где
$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad P_d = \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$
По предложению 4.1 множество $\mathbf{r}$ представляет собою звезду. Звезду $\mathbf{r}$, состоящую из лучей вида (5.9), будем называть *целочисленной.*

По определению (2.12) звезда $\mathbf{r}$ порождает d-мерный параллелоэдр – перекладывающуюся развертку тора
$$\mathbf{T} = T(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{T}_D \tag{5.11}$$
с векторами перекладывания $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$, $\ldots, \mathbf{r}_D$ в (5.9). Согласно (2.17) и (5.9), (5.10) данные векторы имеют порядки
$$\mathbf{m}_0 = Q_0, \quad \mathbf{m}_1 = Q_1, \ldots, \quad \mathbf{m}_d = Q_d \tag{5.12}$$
и их сумма
$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \ldots + \mathbf{m}_d \tag{5.13}$$
будет порядком развертки тора $\mathbf{T}$ из (5.11). Как и звезду $\mathbf{r}$ из (5.9), развертку $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ также будем называть *целочисленной.*

Предложение 5.1. *Пусть* $\mathbf{T}^{\,\mathrm{int}}$ *– внутренняя часть параллелоэдра* $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ *из* (5.11),

$$\widehat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ Q \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

– произвольный $(d+1)$*-мерный вектор с целыми координатами* $*, \ldots,$ $Q \in \mathbb{Z}$*; и пусть*

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} = \widehat{\mathbf{v}}_0 + \widehat{\mathbf{v}}_1 + \ldots + \widehat{\mathbf{v}}_d = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_d \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

– сумма всех векторов CU-базиса $\widehat{\mathbf{V}} = \{\widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_d\}$ *из* (5.1)*, удовлетворяющего условию* (5.6)*. Тогда параллелоэдр* $\mathbf{T}$ *обладает следующими свойствами*:

1)

$$\mathbf{v} \notin \mathbf{T}^{\,\mathrm{int}}, \quad \text{*если*} \quad 1 \leqslant Q < \mathbf{m}, \tag{5.16}$$

где $\mathbf{v} = \mathrm{pr}_{-}\, \widehat{\mathbf{v}}$ *– проекция (5.8) вектора* $\widehat{\mathbf{v}}$ *на ядерную гиперплоскость* $\mathbf{K}_0$ *и* $\mathbf{m}$ *– порядок* (5.13) *развертки тора* $\mathbf{T}$;

2) *единственным вектором* $\mathbf{v} = \mathrm{pr}_{-}\, \widehat{\mathbf{v}}$ *с условием*

$$\mathbf{v} \in \mathbf{T}^{\,\mathrm{int}} \quad \text{*и*} \quad Q = \mathbf{m} \tag{5.17}$$

является вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathbf{m}} = \mathrm{pr}_{-}\, \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}}$.

Доказательство. 1. Определим замкнутые $(d+1)$-мерные параллелепипеды

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\varepsilon} = \{\lambda_0\, \varepsilon_0 \widehat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1\, \varepsilon_1 \widehat{\mathbf{v}}_1 \ldots + \lambda_d\, \varepsilon_d \widehat{\mathbf{v}}_d;\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\} \tag{5.18}$$

с индексом $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$; а также определим

$$\widehat{\mathbf{T}} = \bigcup_{\varepsilon} \widehat{\mathbf{T}}_{\varepsilon} \tag{5.19}$$

– симметризованный параллелепипед, где ε пробегает все возможные 2^{d+1} комбинации. В обозначениях (5.18) такой параллелепипед $\widehat{\mathbf{T}}$ можем представить в виде

$$\widehat{\mathbf{T}} = \{\lambda_0 \widehat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1 \widehat{\mathbf{v}}_1 \ldots + \lambda_d \widehat{\mathbf{v}}_d;\ -1 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\}. \tag{5.20}$$

Из определения (5.11) развертки тора $\mathbf{T}$ следует равенство

$$\mathrm{pr}_- \widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{T}^{\,c}, \tag{5.21}$$

где pr_- – проекция (5.8), $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$ – *основной параллелепипед* (5.18) с индексом $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ и $\mathbf{T}^{\,c}$ – замыкание развертки $\mathbf{T}$.

Обозначим через $\mathbf{C}$ полубесконечный цилиндр в суперпространстве $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}$ с основанием $\mathbf{T}^{\,\mathrm{int}} \subset \mathbf{K}_0$ и образующей по направлению вектора центрирования $\widehat{\alpha}_-$ унимодулярного базиса $\widehat{\mathbf{V}}$ из (5.1). Заметим, что по определению само основание $\mathbf{T}^{\,\mathrm{int}}$ принадлежит цилиндру $\mathbf{C}$. Далее нам потребуется

$$\mathbb{R}_+\widehat{\mathbf{V}} = \{\lambda_0\widehat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1\widehat{\mathbf{v}}_1 \ldots + \lambda_d\widehat{\mathbf{v}}_d;\, 0 \leqslant \lambda_i < +\infty\} \tag{5.22}$$

– бесконечный невырожденный конус, порождаемый векторами базиса $\widehat{\mathbf{V}}$, где $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных вещественных чисел. По условию (5.1) базис $\widehat{\mathbf{V}}$ центрирован лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}_-$. Из этого свойства вытекает основное включение

$$\mathbf{C} \subset \mathbb{R}_+\widehat{\mathbf{V}} \cup \widehat{\mathbf{T}}, \tag{5.23}$$

на которое будет опираться доказательство предложения. Доказательство разобъем на три шага.

Шаг 1. Из равенства (5.21) и включения (5.23) вытекает другое включение

$$\mathbf{C} \setminus \widehat{\mathbf{T}}^{\,\mathrm{int}} \quad \subset \quad (\mathbb{R}_+\widehat{\mathbf{V}})^{\,\mathrm{int}}. \tag{5.24}$$

Пусть некоторая точка $\widehat{\mathbf{v}}$ из (5.14) принадлежит пересечению

$$\widehat{\mathbf{v}} \in (\mathbb{R}_+\widehat{\mathbf{V}})^{\,\mathrm{int}} \cap \mathbb{Z}^{d+1}. \tag{5.25}$$

Поскольку базис $\widehat{\mathbf{V}}$ унимодулярный (5.1), то согласно (5.22) любая целая точка $\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}^{d+1}$ из конуса $\mathbb{R}_+\widehat{\mathbf{V}}$ раскладывается

$$\widehat{\mathbf{v}} = \lambda_0\widehat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1\widehat{\mathbf{v}}_1 \ldots + \lambda_d\widehat{\mathbf{v}}_d \tag{5.26}$$

по базису $\widehat{\mathbf{V}}$ с целыми координатами $\lambda_i \geqslant 0$. Если же при этом данная точка $\widehat{\mathbf{v}}$ принадлежит открытому конусу $(\mathbb{R}_+\widehat{\mathbf{V}})^{\,\mathrm{int}}$, то все координаты в разложениии (5.26) будут $\lambda_i > 0$. Отсюда, из включения (5.25) и (5.3) видно, что последняя координата Q у такой точки $\widehat{\mathbf{v}}$ удовлетворяет неравенству

$$Q = \lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_d Q_d + \geqslant \mathbf{m}. \tag{5.27}$$

Из (5.24), (5.25) и (5.27) выводим следующее свойство:

$$\widehat{\mathbf{v}} \quad \in \quad (\mathbf{C} \ \setminus \ \widehat{\mathbf{T}}^{\,\mathrm{int}}) \cap \mathbb{Z}^{d+1} \quad \Rightarrow \quad Q \geqslant \mathbf{m}. \tag{5.28}$$

Шаг 2. Начнем с очевидного включения

$$\mathbf{C} \cap \widehat{\mathbf{T}}^{\,\mathrm{int}} \quad \subset \quad \widehat{\mathbf{T}}^{\,\mathrm{int}}. \tag{5.29}$$

Определенный в (5.21) параллелепипед $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$ является фундаментальной областью решетки $\mathbb{Z}^{d+1}$. Отсюда, определения (5.19), (5.20) параллелепипеда $\widehat{\mathbf{T}}$ и унимодулярности базиса $\widehat{\mathbf{V}}$ получаем

$$\widehat{\mathbf{T}}^{\,\mathrm{int}} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{0\}. \tag{5.30}$$

Объединяя (5.29) и (5.30), приходим к еще одному свойству:

$$\widehat{\mathbf{v}} \quad \in \quad (\mathbf{C} \ \cap \ \widehat{\mathbf{T}}^{\,\mathrm{int}}) \cap \mathbb{Z}^{d+1} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mathbf{v}} = 0. \tag{5.31}$$

Шаг 3. Таким образом, из свойств (5.28) и (5.31) следует, что если целый вектор $\widehat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ Q \end{pmatrix} \neq 0$ принадлежит цилиндру $\mathbf{C}$, то его последняя координата $Q \geqslant \mathbf{m}$. Пусть целый вектор $\widehat{\mathbf{v}}$ с координатой $Q \geqslant 0$ такой, что его проекция $\mathbf{v} = \mathrm{pr}_-\,\widehat{\mathbf{v}}$ принадлежит внутренности $\mathbf{T}^{\,\mathrm{int}}$ развертки тора (5.11). Тогда из определений проекции (5.8) и цилиндра $\mathbf{C}$ будет следовать включение $\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbf{C}$. Отсюда и предыдущего утверждения выводим $Q \geqslant \mathbf{m}$, что доказывает требуемое свойство (5.16).

2. Свойство (5.17) вытекает из определения (5.15) вектора $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}}$ и приведенных выше рассуждений. □

5.3. Звезды и центрированные базисы.

Лемма 5.1. *Пусть в пространстве* $\mathbb{R}^{d+1}$ *задана произвольная система* $\widehat{\mathbf{V}} = \{\widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_d\}$ *векторов* (5.3) *с последними координатами* $Q_0 > 0$, $Q_1 > 0, \ldots, Q_d > 0$, $\alpha \neq 0$ *– некоторый вектор из* $\mathbb{R}^d$; *и пусть множество векторов* $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d\}$ *из ядерной гиперплоскости* $\mathbf{K}_0$ *получается* $\mathrm{pr}_-:\ \widehat{\mathbf{V}} \to \mathbf{r}$ *проекцией* (5.8). *В этих условиях множество* $\mathbf{r}$ *будет звездой тогда и только тогда, система векторов* $\widehat{\mathbf{V}}$ *образует базис, центрированный лучом* $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}_-$, *где* $\widehat{\alpha}_-$ *– вектор* (5.2).

Доказательство. Прямое утверждение вытекает непосредственно из определений звезды $\mathbf{r}$ (см. определение 1.1) и центрированного лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}_-$ базиса $\widehat{V}$ из п. 5.1; обратное является частным случаем предложения 4.1. $\square$

Пусть $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d\}$ – произвольное множество из ядерной гиперплоскости $\mathbf{K}_0$, состоящее из векторов

$$\mathbf{r}_i = (Q_i\alpha + P_i, 0) \tag{5.32}$$

для $i = 0, 1, \ldots, d$. Здесь Q_i – целые положительные числа и векторы $P_i = \begin{pmatrix} P_{i1} \\ \vdots \\ P_{id} \end{pmatrix}$ имеют целые координаты. Поставим множеству векторов (5.32) в соответствие квадратную матрицу

$$s: \quad \mathbf{r} \quad \mapsto \quad S = s(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \ldots & P_{d1} \\ & & \ldots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \ldots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \ldots & Q_d \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

размера $d+1$. Скажем, что множество векторов $\mathbf{r}$ *унимодулярно*, если унимодулярна отвечающая (5.33) ему матрица $S = s(\mathbf{r}) \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. Если при этом множество векторов $\mathbf{r}$ образует звезду, то будем говорить, что данная звезда $\mathbf{r}$ *унимодулярна*, а $S = s(\mathbf{r})$ – *матрица звезды* $\mathbf{r}$.

Пусть снова $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d\}$ – произвольное множество векторов на гиперплоскости $\mathbf{K}_0$, состоящее из векторов (5.32). Определим *подъем*

$$\mathrm{em}_-: \quad \mathbf{r} \quad \mapsto \quad \widehat{\mathbf{V}} = \mathrm{em}_-(\mathbf{r}) \tag{5.34}$$

множества векторов $\mathbf{r}$ из ядерной гиперплоскости $\mathbf{K}_0$ в суперпространство $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}$, ставя в соответствие $\mathbf{r}$ систему векторов $\widehat{\mathbf{V}} = \{\widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_d\}$ в $\mathbf{S}$, состоящую из векторов (5.3). Таким образом, координаты векторов $\widehat{\mathbf{v}}_i$ из системы $\widehat{\mathbf{V}} = \mathrm{em}_-(\mathbf{r})$ – это в точности столбцы матрицы $S = s(\mathbf{r})$ из (5.33).

Предложение 5.2. *Множество векторов* $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_d\}$ *из ядерной гиперплоскости* $\mathbf{K}_0$ *образует унимодулярную звезду тогда и только тогда, когда получающаяся подъемом* (5.34) *система векторов* $\widehat{\mathbf{V}} = \mathrm{em}_-(\mathbf{r})$ *из суперпространства* $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}$ *является унимодулярным базисом, центрированным лучом* $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}_-$.

Доказательство. Прежде всего, отметим *свойство обратимости*

$$\mathbf{r} = \mathrm{pr}_{-}(\widehat{\mathbf{V}}) \tag{5.35}$$

для системы векторов $\widehat{\mathbf{V}} = \mathrm{em}_{-}(\mathbf{r})$, получающейся подъемом (5.34) множества векторов $\mathbf{r}$. Из свойства (5.35) и леммы 5.1 получаем утверждение предложения для связки:

$$\mathbf{r} \text{ -- звезда} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\mathbf{V}} \text{ -- центрированный базис.}$$

Передача же свойства унимодулярности от $\mathbf{r}$ к $\widehat{\mathbf{V}}$ и обратно вытекает из определений матрицы звезды (5.33), матрицы базиса (5.7) и отображения подъема (5.34). □

§6. Унимодулярность и вложение разверток в тор

6.1. Тройка: звезда – вектор – центрированный базис. Основу конструкции, используемой в настоящей работе, составляет тройка

$$\mathbf{r} \quad \overset{\alpha}{\Longleftrightarrow} \quad \widehat{\mathbf{V}}, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{r}$ – звезда, $\widehat{\mathbf{V}}$ – центрированный базис и α – связывающий их вектор. Звезда $\mathbf{r}$ получается проекцией (5.8) базиса $\mathbf{r} = \mathrm{pr}_{-}(\widehat{\mathbf{V}})$, а базис – подъемом (5.34) звезды $\widehat{\mathbf{V}} = \mathrm{em}_{-}(\mathbf{r})$. При этом указанные проекция pr_{-} и подъем em_{-} взаимно обратимы (5.35). Благодаря этому все свойства звезды $\mathbf{r}$ (невырожденность, дифференцируемость, целочисленность и т.д.) переносятся на соответствующий (6.1) центрированный базис $\widehat{\mathbf{V}}$ и обратно. В следующих разделах данный вопрос будет рассмотрен более подробно.

6.2. Эквивалентность основных свойств звезды. Начнем со сравнения различных свойств звезды.

Теорема 6.1. *Для целочисленной звезды* $\mathbf{r}$ *следующие свойства эквивалентны*:

1) *звезда* $\mathbf{r}$ *унимодулярная*;
2) *звезда* $\mathbf{r}$ *минимальная*;
3) *звезда* $\mathbf{r}$ *вкладывается*

$$\mathbf{r} \quad \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \quad \mathbb{T}^d \tag{6.2}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d_{\mathbb{Z}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ (2.13).

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть звезда $\mathbf{r}$ будет унимодулярной. Тогда, согласно 5.2 система векторов $\widehat{\mathbf{V}} = \mathrm{em}_-(\mathbf{r})$ из суперпространства $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}$ является унимодулярным базисом, центрированным лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}_-$. Применяя к унимодулярному базису $\widehat{\mathbf{V}}$ предложение 5.1, получаем минимальность звезды $\mathbf{r}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Предположим теперь, что целочисленная звезда $\mathbf{r}$ минимальная. Снова рассмотрим соответствующий (5.34) ей целочисленный базис $\widehat{\mathbf{V}} = \mathrm{em}_-(\mathbf{r})$ и порождаемый им основной параллелепипед $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$ с индексом $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ из (5.18). Поскольку звезда $\mathbf{r}$ минимальная, то внутри параллелепипеда $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}^{\mathrm{int}}$ не могут содержаться целые точки $\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}^{d+1}$, иначе их проекции $\mathbf{v} = \mathrm{pr}_-(\widehat{\mathbf{v}})$ — точки порядка $< \mathbf{m}$ — попадут во внутрь $\mathbf{T}^{\mathrm{int}}$ развертки тора $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ из (5.11).

Чтобы показать, что базис $\widehat{\mathbf{V}}$ унимодулярный, нужно доказать, что целые точки в параллелепипеде $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$ — это только его вершины $\mathrm{ver}\,\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$. В силу предыдущего осталось проверить точки $\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbb{Z}^{d+1}$ из множества $\partial\,\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}} \setminus \mathrm{ver}\,\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$, где $\partial\,\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$ обозначает границу параллелепипеда $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$. Из минимальности развертки тора $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ следует, что для любой такой точки $\widehat{\mathbf{v}}$ ее проекция $\mathbf{v} = \mathrm{pr}_-(\widehat{\mathbf{v}})$ не должна попасть во внутрь развертки тора $\mathbf{T}^{\mathrm{int}}$, а только возможно на множество

$$\mathbf{v} \quad \in \quad \partial\,\mathbf{T} \setminus \mathrm{ver}\,\mathbf{T}. \tag{6.3}$$

Здесь $\partial\,\mathbf{T}$ и $\mathrm{ver}\,\mathbf{T}$ — соответственно граница и вершины развертки $\mathbf{T}$. Из разбиения (5.11) развертки тора $\mathbf{T} = T(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{T}_D$ тогда будет следовать попадание точки $\mathbf{v}$ на границу $\partial\,\mathbf{T}_k$ некоторого параллелепипеда $\mathbf{T}_k$, а значит, на одну из $2d$ его граней $\partial\,\mathbf{T}_k^f$, принадлежащей границе развертки $\partial\,\mathbf{T}$. По определению (2.7) у этой грани $\partial\,\mathbf{T}_k^f$ в параллелепипеде $\mathbf{T}_k$ имеется параллельная ей грань

$$\mathbf{T}_k^f - v_k \subset \overline{\mathbf{T}}_k, \tag{6.4}$$

проходящая через начало координат 0. Но тогда точка $\mathbf{v} - v_k$ принадлежит грани $\mathbf{T}_k^f - v_k$. Отсюда, из (6.3) и (6.4) следует включение

$$\mathbf{v} - v_k \quad \in \quad \mathbf{T}^{\mathrm{int}}. \tag{6.5}$$

По построению $\mathbf{v} - v_k$ является целой точкой положительного порядка $< \mathbf{m}$, то включение (6.5) противоречит условию минимальности развертки тора $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$.

Таким образом, мы проверили, что базис $\widehat{\mathbf{V}}$ унимодулярный. Применяя предложение 5.2, убеждаемся в унимодулярности звезды $\mathbf{r}$.

1) $\Rightarrow$ 3). Если звезда $\mathbf{r}$ унимодулярная, то согласно определению (2.30) нужно доказать, что отвечающая ей развертка тора $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ вкладывается

$$\mathbf{T} \quad \stackrel{\text{em}}{\hookrightarrow} \quad \mathbb{T}^d \tag{6.6}$$

в тор $\mathbb{T}^d$. По свойству 1) $\Rightarrow$ 2) для унимодулярной звезды $\mathbf{r}$ развертка тора $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ обладает свойством минимальности (6.7) и, тем самым, в теореме 2.2 выполняется второе утверждение. Поэтому из теоремы 2.2 следует существование вложения (6.8).

3) $\Rightarrow$ 1). Данная импликация получается по следующей схеме: по теореме 2.2 имеем 3) $\Rightarrow$ 2), а по-предыдущему 2) $\Rightarrow$ 1).

Поскольку из доказанных выше импликаций вытекают все оставшиеся, то теорема доказана. □

6.3. Вложения унимодулярных разверток в тор. Из теоремы 6.1 вытекает свойство минимальности унимодулярных разверток тора – перекладывающихся параллелоэдров $\mathbf{T}$, а также вложимость данных параллелоэдров в тор.

Предложение 6.1. *Пусть* $\mathbf{r}$ *– унимодулярная звезда и* $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ *– отвечающая ей унимодулярная развертка тора – параллелоэдр* (5.11). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\mathbf{m}$ *– порядок развертки тора* $\mathbf{T}$, *определенный в* (5.12), (5.13), *то*

$$\mathbf{T}^{\,\mathrm{int}} \quad \cap \quad \mathrm{Orb}^{+}(0,\mathbf{m}) \quad = \varnothing, \tag{6.7}$$

где $\mathrm{Orb}^{+}(0,\mathbf{m})$ *– орбита* (2.28) *порядка* $\mathbf{m}$;

2) *развертка тора* $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ *вкладывается*

$$\mathbf{T} \quad \stackrel{\text{em}}{\hookrightarrow} \quad \mathbb{T}^d \tag{6.8}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d_{\mathbb{Z}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ (2.13).

Доказательство. 1) Если звезда $\mathbf{r}$ унимодулярная, то по теореме 6.1 она будет минимальной, а тогда этим свойством обладает и развертка тора $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$, т.е. выполняется равенство (6.7).

2) По-предыдущему для унимодулярной звезды $\mathbf{r}$ развертка тора $\mathbf{T}$ обладает свойством минимальности (6.7) и, тем самым, в теореме 2.2 выполняется второе утверждение. Поэтому из теоремы 2.2 следует существование вложения (6.8). □

6.4. Вложения производных унимодулярных звезд в тор. Переходим к изучению производных звезд. В этом разделе мы покажем, что при дифференцировании $\sigma: \ \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}^\sigma$ унимодулярных звезд $\mathbf{r}$ сохраняется свойство унимодулярности, т.е. оно является инвариантом. Отсюда будет вытекать инвариантность свойства вложимости таких звезд в тор. Доказательство опирается на следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Если $\mathbf{r}$ – невырожденная унимодулярная звезда, то любая ее производная $\mathbf{r}^\sigma$ для $\sigma \in \Sigma$, определенная в* (1.8)*, также является унимодулярной звездой.*

Доказательство. Рассмотрим систему векторов $\widehat{\mathbf{V}} = \mathrm{em}_-(\mathbf{r})$ из суперпространства $\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}$, получающуюся подъемом (5.34) звезды $\mathbf{r}$. По предложению 5.2 данная система векторов $\widehat{\mathbf{V}}$ является унимодулярным базисом, центрированным лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}_-$.

По определению 1.3 у невырожденной звезды $\mathbf{r}$ существует любая производная звезда $\mathbf{r}^\sigma$ для $\sigma \in \Sigma$, которую с помощью коммутативной диаграммы (4.12) можно перенести на производную базиса $\widehat{\mathbf{V}}^\sigma$. Используя геометрический смысл дифференцирования центрированных базисов (4.13) убеждаемся, что производная система векторов $\widehat{\mathbf{V}}^\sigma$ снова будет центрированным унимодулярным базисом. Еще раз применяя диаграмму (4.12) и свойство обратимости (5.35), можем записать

$$\mathrm{pr}_-(\widehat{\mathbf{V}}^\sigma) = \mathbf{r}^\sigma. \tag{6.9}$$

Теперь из равенства (6.9) и предложения 5.2 вытекает унимодулярность производной звезды $\mathbf{r}^\sigma$. □

6.5. Унимодулярность и вложение производных звезд в тор.

Теорема 6.2. *Если невырожденная целочисленная звезда $\mathbf{r}$ вкладывается $\mathbf{r} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$ в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d_{\mathbb{Z}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ с иррациональным* (2.21) *вектором α, то любая ее σ-производная $\mathbf{r}^\sigma$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается*

$$\mathbf{r}^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{6.10}$$

в тор $\mathbb{T}^d$ относительно сдвига S.

Доказательство. По теореме 6.1 если звезда $\mathbf{r}$ вкладывается в тор $\mathbf{r} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$, то она должна быть унимодулярной. Таким образом, $\mathbf{r}$ — невырожденная унимодулярная звезда. Следовательно, по лемме 6.1

для нее существует любая σ-производная $\mathbf{r}^\sigma$, где $\sigma \in \Sigma$, и эта производная снова является унимодулярной звездой. Еще раз применяя теорему 6.1, убеждаемся в существовании вложения (6.10) производной звезды $\mathbf{r}^\sigma$ в тор $\mathbb{T}^d$. □

Замечание 6.1. Другим методом теорема 6.2 была доказана в [1] для двумерного случая $d = 2$ и в [2] для произвольной размерности d.

Замечание 6.2. Согласно предложению 4.3 требование иррациональности (2.21) вектора сдвига α обеспечивает бесконечную дифференцируемость звезды $\mathbf{r}$, состоящей из векторов (5.32). В частности, из предположения иррациональности вектора α вытекает существование для соответствующей (5.32) ему звезды $\mathbf{r}$ любой ее σ-производной звезды $\mathbf{r}^\sigma$ для $\sigma \in \Sigma$.

§7. Унимодулярные разбиения тора

7.1. Унимодулярные разбиения тора. Основная теорема.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathbf{r}$ – унимодулярная звезда с матрицей*

$$S = s(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

где в нижней строке стоят целые элементы $Q_k \geqslant 1$ для $k = 0, \dots, d$; и пусть $\mathbf{T} = T(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbf{T}_d$ – развертка тора (5.11) и $\mathbf{T}_k$ – составляющие ее d-мерные параллелепипеды (2.7). Тогда существует индуцированное разбиение

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{r}) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_D \tag{7.2}$$

тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d_{\mathbb{Z}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $\mathbf{T} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$ разверткой $\mathbf{T}$. Здесь

$$\mathcal{T}_k = \mathbf{T}_k \sqcup S^1(\mathbf{T}_k) \sqcup \dots \sqcup S^{\mathbf{m}_k - 1}(\mathbf{T}_k) \tag{7.3}$$

– орбитное разбиение порядка $\mathbf{m}_k = Q_k$, составленное из S-сдвигов

$$S^i(\mathbf{T}_k) \quad \equiv \quad \mathbf{T}_k \alpha \bmod \mathbb{Z}^d \tag{7.4}$$

параллелепипеда $\mathbf{T}_k$. Таким образом, в разбиение (7.2) входит $\mathbf{m}_k$ параллелепипедов вида $\mathbf{T}_k$, где $k = 0, 1, \dots, d$, и общее количество всех параллелепипедов в разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{r})$, т.е. порядок развертки тора $\mathbf{T}$, равно $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \dots + \mathbf{m}_d$.

Доказательство. Согласно предложению 5.1 развертка тора $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ вкладывается $\mathbf{T} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$ в тор $\mathbb{T}^d$. Поэтому по теореме 2.2 существует индуцированное разбиение тора $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{r})$ из (7.2). Равенства $\mathbf{m}_k = Q_k$ для порядков орбитных разбиений (7.3) вытекают из (5.12), а величина порядка развертки тора $\mathbf{T}$ получается из (5.13). □

По теореме 7.1 любая унимодулярная звезда $\mathbf{r}$ с матрицей (7.1) индуцирует разбиение тора $\mathcal{T}(\mathbf{r})$ вида (7.2). Такие $\mathcal{T}(\mathbf{r})$ будем называть *унимодулярными разбиениями*.

7.2. Бесконечные итерации дифференцирований. Рассмотрим

$$\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}} \tag{7.5}$$

– множество всех бесконечных последовательностей

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\},$$

состоящих из произвольных сочетаний σ_i из Σ; и пусть

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \tag{7.6}$$

обозначает *отрезок* из первых n членов последовательности σ, при этом полагаем, что $[\sigma]_0 = \varnothing$. Используя определение производной звезды (1.9), индукцией по $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим $[\sigma]_n$-*производные*

$$\mathbf{r}^{[\sigma]_n} = (\mathbf{r}^{[\sigma]_{n-1}})^{\sigma_n} \tag{7.7}$$

произвольной звезды $\mathbf{r}$; при этом условимся $\mathbf{r}^{[\sigma]_0} = \mathbf{r}$ для $n = 0$.

Если α – иррациональная точка (2.21), то в силу предложения 4.3 звезда $\mathbf{r}$ будет $[\sigma]_n$-*дифференцируемым* для всех значений $n = 0, 1, 2, \ldots$ при любом выборе последовательности дифференцируемостей σ из множества (7.5).

7.3. Производные унимодулярные разбиения тора.

Предложение 7.1. *Пусть* $\mathbf{r}$ *– произвольная унимодулярная звезда и* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{r})$ *– индуцированное разбиение* (7.2) *тора* $\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d_{\mathbb{Z}}$*, порождаемое вкладывающейся в тор* $\mathbf{T} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$ *разверткой тора* $\mathbf{T} = T(\mathbf{r})$ *из* (5.11) *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ *с иррациональным* (2.21) *вектором* α*. Тогда для любой бесконечной последовательности* $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$ *из множества* Ξ *существует бесконечное семейство*

$$\mathcal{T}(\alpha, \mathbf{r}, \sigma) = \{\mathcal{T}^{[\sigma]_n}(\mathbf{r}) : n = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{7.8}$$

разбиений тора $\mathbb{T}^d$. *Здесь*

$$\mathcal{T}^{[\sigma]_n}(\mathbf{r}) = \mathcal{T}(\mathbf{r}^{[\sigma]_n}) \tag{7.9}$$

– $[\sigma]_n$*-производное разбиение тора, т.е. индуцированное разбиение* (7.2) *для производной звезды* $\mathbf{r}^{[\sigma]_n}$, *определенной в* (7.7).

Доказательство. Для произвольной звезды $\mathbf{r}$ с иррациональным вектором α по предложению 4.3 существуют $[\sigma]_n$-производные звезды $\mathbf{r}^{[\sigma]_n}$ при любом выборе последовательности $\sigma \in \Xi$. Обозначим через

$$\mathbf{T}^{[\sigma]_n} = T(\mathbf{r}^{[\sigma]_n}) \tag{7.10}$$

$[\sigma]_n$*-производную развертку тора*, построенную по звезде $\mathbf{r}^{[\sigma]_n}$. По условию звезда $\mathbf{r}$ унимодулярная, поэтому согласно лемме 6.1 все ее производные звезды $\mathbf{r}^{[\sigma]_n}$ также будут унимодулярными. Отсюда и предложения 5.1 будет следовать, что развертка (7.10) вкладывается $\mathbf{T}^{[\sigma]_n} \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$ в тор $\mathbb{T}^d$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Теперь применяя теорему 2.1, получаем существование разбиений тора $\mathcal{T}(\alpha, \mathbf{r}, \sigma)$ из (7.8). $\square$

Разбиения тора $\mathcal{T}(\alpha, \mathbf{r}, \sigma)$ вида (7.8) назовем *производными унимодулярными разбиениями*, порождаемыми унимодулярной звездой $\mathbf{r}$ и бесконечной последовательностью дифференцирований σ из множества Ξ.

7.4. Построение унимодулярных звезд. Алгоритм 1. Из трех параметров разбиений тора $\mathcal{T}(\alpha, \mathbf{r}, \sigma)$ первые два α и $\mathbf{r}$ связанные, а третий σ свободный. Если параметры α и $\mathbf{r}$ заданы, то они порождают более широкое, чем (7.8), семейство унимодулярных разбиений

$$\mathcal{T}(\alpha, \mathbf{r}) = \{\mathcal{T}(\alpha, \mathbf{r}, \sigma) : \sigma \in \Xi\} \tag{7.11}$$

тора $\mathbb{T}^d$.

Пусть точка α фиксирована. Тогда задача построения разбиений $\mathcal{T}(\alpha, \mathbf{r})$ сводится к нахождению унимодулярных звезд $\mathbf{r}$. В предложении 3.1 по заданной иррациональной точке α были построены унимодулярные звезды $\mathbf{r}$.

Алгоритм 1 построения унимодулярных звезд $\mathbf{r}$ имеет схему

$$\triangle \quad \xrightarrow{\alpha} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\triangle, \alpha) \tag{7.12}$$

и состоит из следующих шагов:

1) *по схеме из доказательства предложения* 3.1 *находятся* d*-мерные унимодулярные базисные симплексы* $\triangle = \triangle_U^d$ *из* (3.4)*, содержащие точку* $-\alpha$;

2) *каждому такому симплексу* $\triangle$ *соответствует своя унимодулярная звезда* $\mathbf{r}$*; она образуется из векторов, соединяющих точку* α *со всеми вершинами симплекса* $\triangle$.

7.5. Построение унимодулярных звезд. Алгоритм 2. Если для унимодулярной звезды $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d\}$ известна ее матрица $S = s(\mathbf{r})$, определенная в (5.33), то лучи звезды $\mathbf{r}_i$ вычисляются по формуле

$$\mathbf{r}_i = Q_i\alpha + P_i \tag{7.13}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ (ср. (5.32)), если рассматривать звезду $\mathbf{r} \subset \mathbf{K}$, расположенной в ядерном пространстве $\mathbf{K}$ из (4.2), а не в ядерной гиперплоскости $\mathbf{K}_0$. На этом пути вместо (7.12) возникает новая схема построения

$$\alpha \quad \xrightarrow{S} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, S) \tag{7.14}$$

унимодулярных звезд $\mathbf{r}$. Теперь S – произвольная фиксированная унимодулярная матрица вида (5.7) с условием (5.6) на ее нижнюю строку и лучи $\mathbf{r}_i$ определяются по формуле (7.13). Требуется выяснить каким условиям должна удовлетворять точка $\alpha \in \mathbb{R}^d$, чтобы получающееся множество векторов $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d\}$ образовывало звезду (см. определение 1.1).

Предложение 7.2. *Пусть* S *– унимодулярная матрица вида* (5.6), (5.7)*,* $\widehat{\mathbf{V}} = \{\widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_d\}$ *– унимодулярный базис* (5.1) *с векторами* $\widehat{\mathbf{v}}_i$ *из* (5.3)*, равными столбцам матрицы* S*; и пусть* $\widehat{\alpha}_- = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}$ *– вектор* (5.2)*. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1) *Множество векторов* $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d\}$*, определяемых по формуле* (7.13)*, является звездой тогда и только тогда, когда в разложении*

$$\widehat{\alpha}_- = \lambda_0\widehat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1\widehat{\mathbf{v}}_1 + \ldots + \lambda_d\widehat{\mathbf{v}}_d \tag{7.15}$$

вектора $\widehat{\alpha}_-$ *по базису* $\widehat{\mathbf{V}}$ *все коэффициенты* $\lambda_i > 0$ *для* $i = 0, 1, \dots, d$.

2) *При выполнении условия* (7.15) *звезда* $\mathbf{r}$ *будет унимодулярной.*

Доказательство вытекает из предложения 5.2, если заметить, что только при выполнении условия (7.15) базис $\widehat{\mathbf{V}}$ будет центрирован лучом $\mathbb{R}_{+}\widehat{\alpha}_{-}$. □

Используя предложение 7.2, приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм 2 построения унимодулярных звезд $\mathbf{r}$ имеет схему (7.14) и состоит из следующих шагов:

1) *выбирается произвольная унимодулярная матрица* S *вида* (5.6), (5.7);

2) *далее находится вектор* $\widehat{\alpha}_{-}$ *с разложением* (7.15);

3) *проверяется иррациональность* (2.21) *вектора* $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$, *получаемого из вектора центрирования* $\widehat{\alpha}_{-}$;

4) *по формуле* (7.13) *получаем унимодулярную звезду* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, S)$ *из схемы* (7.14).

Сравнивая приведенные выше способы построения унимодулярных звезд $\mathbf{r}$, сделаем следующее

Замечание 7.1. Предполагая заданной иррацинальную точку α, в алгоритме 1 по схеме (7.12) с помощью d-мерных унимодулярных базисных симплексов $\triangle$ строятся унимодулярные звезды $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\triangle, \alpha)$. Наоборот, в алгоритме 2 предполагается заданными унимодулярные матрицы S – аналог унимодулярных симплексов $\triangle$. Затем по таким матрицам подбираются иррациональные точки α с разложением (7.15); и уже по схеме (7.14) строятся унимодулярные звезды $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, S)$. И в том и другом случаях появляются начальные звезды $\mathbf{r}$ – основа, на которой возникают определенные в (7.11) унимодулярные разбиения $\mathcal{T}(\alpha, \mathbf{r})$ тора $\mathbb{T}^d$.

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 99–122.
2. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
3. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
4. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.

5. Z. Coelho, A. Lopes, L. F. Da Rocha, *Absolutely Continuous Invariant Measures for a Class of Affine Interval Exchange Maps.* — Proccedings of The American Mathematical Society **123** (1995), no. 11, 3533–3542.
6. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivaties of circle rotations and similarity of orbits.* — Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint Series **62** (2004), 1–11.
7. G. Rauzy, *Ensembles à restes bornés.* — Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux. 1984. exposé 24.
8. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
9. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102.
10. В. Г. Журавлев, *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей.* — Алгебра и анализ **24**, no. 1 (2012), 95–130.
11. S. Grepstad, N. Lev, *Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation.* — Geometric and Functional Analysis **25**, no. 1 (2014), 87–133.
12. В. Г. Журавлев, *Множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 93–174.
13. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface.* — Experemental Mathematics **23**, no. 4 (2014), 390–410.
14. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
15. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
16. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби.* — Совр. пробл. матем., МИАН (2016), Вып. 23, 41–66.
17. M. Morse, C. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics II: Sturmian trajectories.* — Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
18. В. Г. Журавлев, *Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова.* — Алгебра и анализ **24**, no. 4 (2012), 97–136.
19. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Послойный рост квазипериодического разбиения Рози.* — Кристаллография **52**, no. 2 (2007), 204–210.
20. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
21. V. G. Zhuravlev, *On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling.* – Anal. Probab. Methods Number Theory, E. Manstavicius et al. (Eds), TEV, Vilnius, 2007, 240–254.
22. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах.* М., 1953.
23. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2. Киев, 1952.

Zhuravlev V. G. The unimodularity of the induced toric tilings.

Induced tilings $\mathcal{T} = \mathcal{T}|_{\mathrm{Kr}}$ of the d-dimensional torus $\mathbb{T}^d$, generated by the embedded karyon Kr, are considered. The operations of differentiation are defined $\sigma : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^\sigma$, as a result we get again induced partitions $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}|_{\mathrm{Kr}^\sigma}$ of the same torus $\mathbb{T}^d$, generated by the derived karyon Kr^σ. In the language of the karyons Kr the derivations of σ reduce to a combination of geometric transformations of the space $\mathbb{R}^d$. It is proved that if the karyon Kr is unimodular, then it generates an induced tiling $\mathcal{T} = \mathcal{T}|_{\mathrm{Kr}}$ and the derivative karyon Kr^σ is unimodular again. So there exists the corresponding derivative tiling $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}|_{\mathrm{Kr}^\sigma}$. Using unimodular karyons one can build an infinite family of induced tilings $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\alpha, \mathrm{Kr}_*)$ depending on a shift vector α of the torus $\mathbb{T}^d$ and the initial karyon Kr_*. Two algorithms are presented for constructing such unimodular karyons of Kr_*.

Математический
институт им. В. А. Стеклова РАН
Москва;
Владимирский государственный
университет,
пр. Строителей, 11,
600024, Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 8 февраля 2018 г.