Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 469, 2018 г.

В. Г. Журавлев

ЯДЕРНЫЙ АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ В МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Светлой памяти Олега Мстиславовича Фоменко посвящается

Введение

0.1. Симплекс-ядерный алгоритм. В [1] был построен универсальный симплекс-ядерный алгоритм, применимый к точкам

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

с любыми вещественными координатами. Хотя во избежание вырождений, в [1] рассматривался только случай иррациональных точек α, когда числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$.

Симплекс-ядерный алгоритм работает по следующей схеме. Выбирается целевая функция ϱ. Данная функция и точка α определяют некоторую ϱ-стратегию построения бесконечной монотонной последовательности

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 \supset \mathbf{s}_1 \supset \dots \supset \mathbf{s}_n \supset \dots \ni \alpha, \tag{0.1}$$

состоящей из d-мерных открытых симплексов $\mathbf{s}_n$ с рациональными вершинами. Симплексы (0.1) обладают свойством минимальности:

1) любая рациональная точка $\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q}\right)$ не попадает

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s}_n \tag{0.2}$$

в симплекс $\mathbf{s}_n$, если ее общий знаменатель $1 \leqslant Q < \mathbf{Q}_n$, где $\mathbf{Q}_n$ – знаменатель точки Фарея

$$\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n} = \Big(\frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n}\Big) \tag{0.3}$$

симплекса $\mathbf{s}_n$, равной сумме Фарея всех его вершин;

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, наилучшие приближения, симплекс-ядерный алгоритм.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 14-11-00433.

2) единственной точкой $\frac{P}{Q}$ со знаменателем $Q = \mathbf{Q}_n$, содержащейся в симплексе

$$\frac{P}{Q} \in \mathbf{s}_n, \tag{0.4}$$

является точка Фарея $\frac{P}{Q} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$.

Из включения $\alpha \in \mathbf{s}_n$ и свойства минимальности (0.2)–(0.4) симплекса $\mathbf{s}_n$ следует, что точка Фарея $\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$ дает наилучшее приближение для иррациональной точки α относительно $\mathbf{s}_n$-нормы, для которой в качестве выпуклого тела выбран сам симплекс $\mathbf{s}_n$. В этом состоит геометрический смысл минимальности симплексов $\mathbf{s}_n$ в последовательности (0.1).

0.2. Ядерный алгоритм. В настоящей работе предлагается универсальный ядерный алгоритм, также применимый к любым вещественным точкам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и являющийся модификацией указанного выше симплекс-ядерного алгоритма (0.1)–(0.4). Основное отличие состоит в том, что вместо последовательности симплексов (0.1) рассматривается бесконечная последовательность

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 \quad \to \quad \mathbf{T}_1 \quad \to \dots \to \quad \mathbf{T}_n \quad \to \dots \tag{0.5}$$

d-мерных параллелоэдров $\mathbf{T}_n$, в общем случае не связанных, как (0.1), отношениями включения. Каждый параллелоэдр $\mathbf{T}_n$ получается из предыдущего $\mathbf{T}_{n-1}$ с помощью операции дифференцирования

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_{n-1}^{\sigma_n} \tag{0.6}$$

В п. 6 указан некоторый алгоритм (ϱ-стратегия) выбора бесконечной последовательности $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ дифференцирований σ_n в (0.6), обеспечивающий сходимость

$$\varrho(\mathbf{T}_n) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow +\infty,$$

где $\varrho(\mathbf{T}_n)$ обозначает радиус параллелоэдра $\mathbf{T}_n$ в метрике ϱ, выбираемой в указанном алгоритме в качестве целевой функции.

В теореме 5.1 доказано, что параллелоэдры $\mathbf{T}_n$ из последовательности (0.5) также обладают свойством минимальности, аналогичным (0.2)–(0.4), но уже относительно $\mathbf{T}_n$-норм, являющихся ядерными нормами. Отсюда проистекает название рассматриваемого здесь ядерного алгоритма (0.5)–(0.6). Параллелоэдры $\mathbf{T}_n$ предствляют собою ядра некоторых индуцированных торических разбиений. Они подробно исследованны в [2] в случае размерности $d = 2$ и в [3] для произвольного d.

Количественная оценка скорости приближения содержится в теореме 6.1, где приведена следующая формула:

$$\left|\alpha_1 - \frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n}\right| + \dots + \left|\alpha_d - \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n}\right| \leqslant \frac{1}{\mathbf{Q}_n^{1+\eta'}} \tag{0.7}$$

для всех $n \geqslant n_{\eta'}$. *Здесь* $\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n} = \left(\frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n}\right)$; *знаменатели* $\mathbf{Q}_n$ *в аппроксимационной формуле* (0.7) *обладают свойством*

$$\mathbf{Q}_n \longrightarrow +\infty \quad \textit{при} \quad n \longrightarrow +\infty,$$

η' *– произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $\eta' < \eta$, *где*

$$\eta = \eta(\alpha, \varrho) = \sup_{n' \geqslant 0} \inf_{n \geqslant n'} \frac{-\ln \varrho(\mathbf{T}_n)}{\ln \mathbf{Q}_n}$$

– диофантова экспонента; при этом нижняя граница $n_{\eta'}$ *для* n *определяется выбором показателя* η' *и зависит от иррациональной точки* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ *и метрики* ϱ.

Приближение (0.7) нетривиально, если выполняется неравенство $\eta' > 0$. Данное требование можно удовлетворить только в случае, когда диофантова экспонента $\eta(\alpha, \varrho) > 0$ – это основное требование, которое необходимо выполнить при выборе целевой функции ϱ.

0.3. Связи с другими работами. Применение индуцированных торических разбиений к задачам нахождения наилучших многомерных приближений было найдено в [2,3]. Для двумерных приближений операция сложения Фарея точек в разных вариантах использовалась в [4–10]. Обединение этих двух подходов в виде рассмотренного выше симплекс-ядерного алгоритма (0.1)–(0.4) было осуществлено в [1]. Предлагаемый в настоящей работе универсальный ядерный алгоритм (0.5)–(0.6) основывается на идее индуцированных разбиений из [3].

§1. Унимодулярный базисный симплекс

1.1. Линейные унимодулярные преобразования. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_d = (0, \dots, 1) \tag{1.1}$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Пусть, как обычно, $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ обозначает *унимодулярную группу порядка* $d+1$, состоящую из целочисленных квадратных $(d+1)\times(d+1)$-матриц с определителем ±1. Выделим в группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$, образованную матрицами вида

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – произвольный целочисленный столбец. Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{1.3}$$

при этом α рассматривается как столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$. Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

Точку α назовем *иррациональной*, если выполняется условие:

$$\textit{числа}\quad 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом}\quad \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

1.2. Центрированный унимодулярный симплекс.

Предложение 1.1. *Если α – иррациональная точка, то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in \left(\triangle_U^d\right)^{\mathrm{int}}, \tag{1.5}$$

где $(\triangle_U^d)^{\mathrm{int}}$ обозначает внутреннюю часть симплекса $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$.

Доказательство. Выберем матрицу U' с блоком

$$V' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{d-1,d} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом L' с последним элементом $l'_d = 0$. Имеем

$$U'\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 + a'_{12}\alpha_2 + l'_1 \\ \alpha_2 + a'_{23}\alpha_3 + l'_2 \\ \dots \\ \alpha_{d-1} + a'_{d-1,2}\alpha_d + l'_{d-1} \\ \alpha_d \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Из иррациональности точки α следует, что пары чисел $\alpha_i, 1$ для всех $i = 2, \dots, d$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Поэтому в (1.6) найдутся такие целые числа a'_{ij} и l'_i, что у точки $\alpha' = U'\alpha = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_d \end{pmatrix}$ первые $d-1$ координат попадут в интервал $(0, 1/d)$. Далее выбираем матрицу U'' с блоком

$$V'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a''_{d1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом L'' с элементами $l''_1 = 0, \dots, l''_{d-1} = 0$. Так как $\alpha'_d = \alpha_d$, то получаем

$$U''\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \dots \\ \alpha'_{d-1} \\ u''_{d1}\alpha'_1 + \alpha_d + l''_d \end{pmatrix},$$

где числа $\alpha'_1, 1$ снова линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Поэтому можно подобрать целые числа u''_{d1} и l''_d с условием $u''_{d1}\alpha'_1 + \alpha_d + l''_d \in (0, 1/d)$ и, значит, точка $\alpha'' = U''\alpha'$ содержится

$$\alpha'' \in (\triangle^d_e)^{\mathrm{int}} \tag{1.7}$$

внутри симплекса $\triangle^d_e$. Остается заметить, что матрица $U = (U''U')^{-1}$ принадлежит подгруппе G_0 и для нее в силу (1.7) будет выполняться включение (1.5). $\square$

Построенный в предложении 1.1 симплекс $\triangle = \triangle^d_U$ обладает следующими свойствами:

1) точка α содержится внутри $\triangle^{\mathrm{int}}$ симплекса $\triangle$;

2) векторы, выходящие из одной из вершин симплекса $\triangle$ во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис d-мерной кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

Любой симплекс $\triangle$, удовлетворяющий этим двум свойствам, будем называть *центрированным унимодулярным симплексом*, точнее – *центрированным точкой* α. Чтобы отличать симплексы $\triangle_U^d$ из (1.5) от других используемых далее унимодулярных симплексов $\triangle$, будем $\triangle_U^d$ называть *общими базисными симплексами*. Здесь эпитет "базисный" означает, что симплексы $\triangle = \triangle_U^d$ будут выбираться в качестве основы на первом шаге некоторого алгоритма, генерирующего бесконечную последовательность центрированных унимодулярных симплексов $\triangle, \triangle', \triangle'', \dots,$ диаметры которых стремятся к 0.

1.3. Критерий унимодулярности симплекса. Свойство унимодулярности симплекса $\triangle$ можно переформулировать в более симметричной форме. Пусть

$$\operatorname{ver}\triangle = \{v_0, v_1, \dots, v_d\} \tag{1.8}$$

– множество вершин симплекса $\triangle$. Тогда симплекс $\triangle$ будет унимодулярным тогда и только тогда, когда *матрица симплекса*

$$S_\triangle = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \dots & v_d \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

– квадратная матрица порядка $d+1$ – является унимодулярной, т.е. принадлежащей группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. В первой строке матрицы (1.9) стоят столбцы из координат вершин v_i симплекса $\triangle$.

1.4. Распределение дробных долей. Доказательство предложения 1.1 содержит алгоритм построения центрированных унимодулярных симплексов $\triangle = \triangle_U^d$. Данный алгоритм опирается на решение следующей аппроксимационной задачи: требуется найти целые числа b и c такие, что выполняются неравенства

$$0 < \alpha + b\beta + c < \frac{1}{d}\,, \tag{1.10}$$

где α, β – любые вещественные числа, при этом β иррационально. Задача (1.10) сводится к более привычной задаче о распределении дробных долей

$$\langle \alpha + b\beta \rangle < \frac{1}{d} \tag{1.11}$$

с одной переменной $b = 0, 1, 2, \ldots$, где $\langle x \rangle$ обозначает дробную часть вещественного числа x. По-видимому, в общем случае, самый быстрый способ найти b, удовлетворяющие условию (1.11), состоит в последовательном переборе всех $b = 0, 1, 2, \ldots$

Если воспользоваться техникой разбиений Фибоначчи [12], то можно указать верхнюю границу

$$b < q_n + q_{n+1}, \tag{1.12}$$

в пределах которой существует b с условием (1.11). Здесь q_n – знаменатель первой подходящей дроби для числа β, удовлетворяющий неравенству $q_n \geqslant d$, а q_{n+1} – соответственно знаменатель следущей подходящей дроби. Заметим, что оценка (1.12) справедлива для всех значений параметра α в (1.11).

1.5. Единичные базисные симплексы. Обозначим вершины единичного d-мерного куба $C^d = [0, 1]^d$ через $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, где $\xi_i = 0$ или 1. Каждой вершине куба ξ поставим в соответствие d-мерный симплекс $\triangle_\xi$ с вершинами

$$\operatorname{ver} \triangle_\xi = \{\xi \pm e_i;\ i = 1, \ldots, d\}. \tag{1.13}$$

Здесь e_i – единичные векторы из (1.1) и знак $\pm$ выбирается из условия, что получающаяся в результате точка $\xi \pm e_i$ принадлежит кубу C^d. По определению (1.13) нулевой вершине $\xi = (0, \ldots, 0)$ отвечает симплекс $\triangle_0 = \triangle_e$.

Представим точку $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ в приведенном виде

$$\alpha = \alpha' + l, \tag{1.14}$$

где $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_d)$ имеет координаты $\alpha'_i = \langle \alpha_i \rangle$ для $i = 1, \ldots, d$ и, таким образом, вектор l в разложении (1.14) принадлежит решетке $\mathbb{Z}^d$. Зададим расстояние между точкой α' вершиной куба ξ с помощью *полиэдральной метрики*

$$|\alpha' - \xi| = |\alpha'_1 - \xi_1| + \cdots + |\alpha'_d - \xi_d|. \tag{1.15}$$

Предложение 1.2. 1. *Пусть точка α имеет представление в виде* (1.14). *Тогда если для некоторой вершины ξ куба C^d выполняется неравенство*

$$|\alpha' - \xi| \leqslant 1, \tag{1.16}$$

то

$$\alpha \in \triangle_{\xi,l}, \tag{1.17}$$

где $\triangle_{\xi,l} = \triangle_\xi + l$ – *унимодулярный симплекс, получающийся сдвигом симплекса* $\triangle_\xi$ *на вектор* l *из разложения* (1.14).

2. *Если при этом точка* α *является иррациональной* (1.4), *то имеет место включение*

$$\alpha \in \triangle_{\xi,l}^{\mathrm{int}} \tag{1.18}$$

и, следовательно, унимодулярный симплекс $\triangle_{\xi,l}$ *центрирован точкой* α.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать вектор $l = 0$, т.е. точка $\alpha = \alpha'$ принадлежит единичному кубу C^d.

1. В случае нулевой вершины $\xi = (0, \ldots, 0)$ симплекс $\triangle_0 = \triangle_e$ можно задать следующей системой неравенств

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_d \geqslant 0, \quad x_1 + \cdots + x_d \leqslant 1, \tag{1.19}$$

отвечающих всем его $d+1$ граням. Данная система равносильна неравенству $|x| \leqslant 1$ для точек $x = (x_1, \ldots, x_d)$ из куба C^d. Отсюда и неравенства (1.16) вытекает включение $\alpha = \alpha' \in \triangle_{0,0}$.

Для произвольной вершины ξ куба C^d соответствующий симплекс $\triangle_\xi$ получается из симплекса $\triangle_0$ с помощью некоторой симметрии куба C^d, отображающей нулевую вершину 0 в вершину ξ. При этой симметрии грань $|x| = 1$ симплекса $\triangle_0$ переходит в грань $|x-\xi| = 1$ симплекса $\triangle_\xi$, что доказывает включение $\alpha = \alpha' \in \triangle_{\xi,0}$.

По определению (1.1) симплекс $\triangle_0 = \triangle_e$ унимодулярный. Из приведенных выше рассуждений о симметриях куба или непосредственно из определения (1.13) симплексов $\triangle_\xi$ следует унимодулярность $\triangle_\xi$, а значит, и симплексов $\triangle_{\xi,\,l} = \triangle_\xi + l$.

2. Если точка α является иррациональной, то в силу (1.4) иррациональной будет и точка $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_d)$ и, следовательно, все ее координаты $\alpha'_i \neq 0$. В случае $\alpha = \alpha' \in \triangle_{0,0}$ точка α' не может принадлежать грани $|x| = 1$ симплекса $\triangle_0 = \triangle_{0,0}$, так как иначе выполнялось бы соотношение $\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_d = 1$, противоречащее определению иррациональности (1.4) точки α'. Таким образом, точка $\alpha = \alpha' \in \triangle_{0,0}$ не принадлежит ни одной грани симплекса $\triangle_{0,0}$ и поэтому она является внутренней точкой данного симплекса. Произвольный случай $\alpha = \alpha' \in \triangle_{\xi,0}$ рассматривается аналогично, что доказывает включение (1.18), а вместе с этим – центрированность симплекса $\triangle_{\xi,0}$ точкой α. Предложение 1.2 доказано. □

Построенные симплексы $\triangle_{\xi,\,l}$, в отличие от общих базисных симплексов $\triangle_U^d$ из (1.5), будем называть *единичными базисными симплексами*, поскольку векторы, выходящие из вершины $\xi + l$ симплекса $\triangle_{\xi,\,l}$ во все остальные его вершины, имеют вид $\pm e_1, \ldots, \pm e_d$, где e_i – единичные векторы из (1.1). В предложении 1.2 приведена явная конструкция единичных базисных симплексов $\triangle_{\xi,\,l}$ для произвольных иррациональных точек α из $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условию (1.16). Для малых размерностей d этого зачастую бывает достаточно.

1.6. Единичные базисные симплексы малых размерностей. *Размерности* $d = 1$ *или* $d = 2$ – это как раз те случаи, когда имеет место покрытие

$$C^d = \bigcup_{\xi \in \operatorname{ver} C^d} \triangle_\xi \tag{1.20}$$

куба C^d (в данном случае – отрезка $C^1 = [0,1]$ или квадрата $C^2 = [0,1] \times [0,1]$) единичными базисными симплексами $\triangle_\xi = \triangle_{\xi,0}$, определенными в (1.13). Из (1.20) следует покрытие

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{\xi \in \operatorname{ver} C^d} \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^d} \triangle_{\xi,l} \tag{1.21}$$

всего пространства $\mathbb{R}^d$ (прямой $\mathbb{R}$ или плоскости $\mathbb{R}^2$). Таким образом, в случае размерностей $d = 1,\, 2$ для всех иррациональных точек $\alpha \in \mathbb{R}^d$ найдется единичный симплекс $\triangle_{\xi,\,l}$, для которого данная точка α является внутренней $\alpha \in \triangle_{\xi,l}^{\mathrm{int}}$.

Размерность $d = 3$. Начиная с размерности $d = 3$ отсутствует покрытие (1.20) куба C^d симплексами $\triangle_\xi$. В трехмерном случае замыкание разности

$$O^3 = \Big(C^3 \setminus \bigcup_{\xi \in \operatorname{ver} C^3} \triangle_\xi\Big)^c \tag{1.22}$$

представляет собою вписанный в куб октаэдр O^3 с вершинами

$$\begin{gathered} \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\Big), \quad \Big(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\Big), \quad \Big(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big), \\ \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\Big), \quad \Big(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\Big), \quad \Big(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big). \end{gathered} \tag{1.23}$$

Данный октаэдр имеет объем $\operatorname{vol} O^3 = 1/6$, поэтому плотность множества из правой части равенства (1.21) равна $5/6$. Это означает, что доля всех точек $\alpha \in \mathbb{R}^3$, для которых найдется содержащий их единичный симплекс $\alpha \in \triangle_{\xi,l}^{\mathrm{int}}$, равна $5/6 \approx 0.83$ всего пространства $\mathbb{R}^3$.

§2. Звезды и их производные

2.1. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Пусть v_0, v_1, $\dots$, v_d – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетение. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \tag{2.1}$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

Определение 2.1. *Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через*

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \dots + \lambda_{k'_{d-1}} v_{k'_{d-1}};\quad \lambda_{k'_1}, \dots, \lambda_{k'_{d-1}} \in \mathbb{R}\} \tag{2.2}$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ назовем звездой, *если для всех дополнительных* (2.1) *к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости* (2.2) *и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.*

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ будут линейно независимы. Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 2.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \big\{\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d;\ \lambda_0 + \dots + \lambda_d \leqslant 1,\ \lambda_0, \dots, \lambda_d \geqslant 0\big\}, \tag{2.3}$$

где коэффициенты $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (2.3). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\mathrm{int}}(v). \tag{2.4}$$

2.2. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \tag{2.5}$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $X_1^{\text{int}} \cap X_2^{\text{int}} = \varnothing$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k.

Из определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Предположим, что для некоторого сочетания*

$$\sigma = \{k_1, k_2\}$$

из Σ *сумма векторов* $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ *звезды* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ *не принадлежит плоскости* $H_{\sigma'}$ *из* (2.2), *где* σ' *– дополнительное сочетание* (2.1) *для* σ. *Тогда при этом условии только одно из множеств*

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{2.6}$$

будет согласованным. Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \textit{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \tag{2.7}$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ *или* v_{k_2}, v_σ *принадлежат разным полупространствам* $H^{\pm}_{\sigma'}$, *и* $v(\sigma')$ *– дополнительное для* $v(\sigma)$ *множество векторов из звезды* v. □

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (2.7) гарантирована ограничением на сумму векторов $v_\sigma \notin H_{\sigma'}$.

Определение 2.2. *Обозначим через*

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{2.8}$$

то множество векторов из (2.6), *которое является звездой. Если существуют множества векторов* v^σ *для всех сочетаний* $\sigma \in \Sigma$, *т.е. для всех* σ *выполняется условие леммы* 2.1, *то будем говорить, что звезда* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.3 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ определено отображение

$$v \quad \xrightarrow{\sigma} \quad v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \tag{2.9}$$

где

$$v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}, \quad v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$$

или

$$v^\sigma_{k_1} = v_\sigma, \quad v^\sigma_{k_2} = v_{k_2}$$

в зависимости от выполнения условия из (2.7), и

$$v^\sigma_{k'} = v_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' \in \sigma'.$$

Звезду v^σ из (2.9) назовем *σ-производной* нерывожденой звезды v. Если нужно выделит индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ-производной (2.9) использовать еще и другое развернутое обозначение

$$v^\sigma = v^{\{k_1,k_2\}}. \tag{2.10}$$

По определению (2.9) имеет место формула коммутирования

$$v^{\{k_1,k_2\}} = v^{\{k_2,k_1\}}.$$

Поэтому для невырожденной звезды v существуют

$$C^2_{d+1} = \frac{(d+1)d}{2} \tag{2.11}$$

ее производных звезд v^σ.

§3. Индуцированные разбиения тора

3.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d] \tag{3.1}$$

– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \dots, l_d$, т.е. векторы $l_1, \dots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$, если отображение

$$T \overset{\longrightarrow}{\sim} \mathbb{T}^d_L : \quad x \mapsto x \bmod L$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d \tag{3.2}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{3.3}$$

на векторы $v_0, v_1, \dots, v_D$, связанные с базисом (3.1) решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, d. \tag{3.4}$$

В формуле (3.3) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (3.2), где $k = 0, 1, \dots, d$.

Заметим, что при переходе (3.4) от векторов переклыдывания v_0, v_1, …, v_d к базизу $l_1, \dots, l_d$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{3.5}$$

В частности, из равенств (3.4) и (3.5) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$

для всех $k = 0, 1, \dots, d$. Поэтому перекладывание (3.3) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{3.6}$$

на вектор $\alpha' \bmod L$.

3.2. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды

$$\overline{T}_m = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d};\ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{3.7}$$

где $k_1, \dots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \dots, d\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (см. определение 2.1), то объединение

$$\overline{T} = \overline{T}_0 \cup \overline{T}_1 \cup \dots \cup \overline{T}_d \tag{3.8}$$

параллелепипедов (3.7) образует *параллелоэдр* [13, 14] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} \overline{T}[l] \tag{3.9}$$

с помощью параллельных переносов $\overline{T}[l] = \overline{T} + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $\overline{T}[l]$ из (3.9) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (2.5).

Для $d = 2$ параллелоэдр $\overline{T}$ из (3.7) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [15], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [16].

По *i-алгоритму* из [13] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\overline{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_d$, имеющее внутреннюю часть $T^{\mathrm{int}} = (\overline{T})^{\mathrm{int}}$ такую же, как и параллелоэдр (3.8), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{l \in L} T[l] \tag{3.10}$$

в строгом смысле (2.5), т.е. в (3.10) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \varnothing$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (3.10) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d / L$.

Исходя из i-алгоритма [13], можно считать, что выполнены условия

$$0 \in T_0, \ \ v_0 \in T_1, \ \ v_0 + v_1 \in T_2, \ \ \ldots, \ \ v_0 + v_1 + \cdots + v_{d-1} \in T_d. \tag{3.11}$$

Если дополнительно предположить выполненными условия (3.11), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ ставится в соответствие *перекладывающийся параллелоэдр*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_d, \tag{3.12}$$

являющийся разверткой тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания v_0, v_1, $\ldots, v_d$ в (3.3).

3.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^d_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d / \mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} : \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \tag{3.13}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_L$ с изменяющимися решетками L.

3.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 3.1. $\triangleright$ *Перекладывающаяся развертка T из* (3.2) вкладывается

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{3.14}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. *Подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$ является* $\mathcal{L}$-различимым, *т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение*

$$T \overset{\rightarrow}{\sim} T \bmod \mathcal{L} : \quad x \mapsto x \bmod \mathcal{L} \tag{3.15}$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (3.15) *можем считать развертку T вложенной как множество*

$$T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{3.16}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$.

2. *Векторы перекладывания* (3.3) *имеют вид*

$$v_k \equiv m_k \alpha \bmod \mathcal{L} \tag{3.17}$$

для всех $k=0,1,\dots,d$ с некоторыми коэффициентами $m_k=1,2,3,\dots$, называемыми порядками *векторов v_k.*

3. *Пусть*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \{S^j(T_k);\ j = 1,\dots,m_k - 1\} \tag{3.18}$$

обозначает орбиту *подмножества $T_k \subset T$. В силу включения* (3.16) *будем полагать $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. Тогда по определению считается, что орбиты* (3.18) *удовлетворяют условию*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \varnothing \tag{3.19}$$

для $k = 0,1,\dots,D$. $\lhd$

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (3.18) определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k); \quad j = 0,1,\dots,m_k - 1\}. \tag{3.20}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ из (3.13) *иррациональным*, когда выполняется условие:

$$\text{числа } 1,\alpha_1,\dots,\alpha_d \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Теорема 3.1. *Пусть развертка T вкладывается* (3.14) *в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор α для сдвига $S = S_\alpha$ из* (3.13) *будет иррациональным* (3.21). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит $\mathrm{Orb}(T_k)$ не пересекаются, т.е.*

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \varnothing \tag{3.22}$$

только при условии $j_1 = j_2$ и $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$:*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d, \tag{3.23}$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \cdots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (3.20).

Доказательство. См. [3]. □

3.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 3.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (3.6) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ из (3.13), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \tag{3.24}$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{3.25}$$

соответственно развертку T из (3.2), (3.12) и *индуцированное разбиение* (3.23) тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [17, 18]) *ядром* (*karyon*) разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ используется обозначение $T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$. Ядро Kr характеризуется следующим свойством: ядро – это такое подмножество $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\mathrm{Kr}}, \tag{3.26}$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (3.13), эквивалентно перекладыванию $D+1$ подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{Kr}_D. \tag{3.27}$$

В определении ядра Kr важно, что количество областей в разбиении (3.27) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}^D_L$, а индуцированное отображение (3.26) изоморфно сдвигу этого тора.

3.6. Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 3.2. *Определенная в* (3.12) *развертка тора* $T = T(v)$ *вкладывается* (3.14) *в тор* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) *множество* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d$ *из* (3.25) *является разбиением тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$*;*

2) *внутренняя часть* T^{int} *развертки* $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *не содержит ни одной из точек* x_j *орбиты*

$$\mathrm{Orb}^{+}(0, m) = \quad \{x_j = S^j(0); \quad j = 1, 2, \dots, m-1\} \tag{3.28}$$

порядка

$$m = m_0 + m_1 + \cdots + m_d. \tag{3.29}$$

Доказательство. См. [3]. □

Число m из (3.29) называется *порядком* развертки тора $T = T(v)$. Саму развертку $T = T(v)$ и порождающую ее звезду v назовем *минимальными*, если выполняется условие 2) из теоремы 3.2.

3.7. Производные вкладывающихся звезд.

Определение 3.2. *Пусть* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ *– звезда и* $T = T(v)$ *– отвечающая ей развертка* (3.25) *тора* $\mathbb{T}^d_L$ *с векторами перекладывания* $v_0, v_1, \dots, v_D$*. Если данная развертка* T *вкладывается* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно некоторого сдвига* $S = S_\alpha$*, то в этом случае будем говорить, что такая звезда* v вкладывается

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{3.30}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S*.*

Теорема 3.3. *Пусть невырожденная звезда* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ *вкладывается* (3.30) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ *с иррациональным* (3.21) *вектором* α*. Тогда любая ее* σ*-производная*

$$v^\sigma = \{v^\sigma_0, v^\sigma_1, \dots, v^\sigma_d\}$$

для $\sigma \in \Sigma$ *также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{3.31}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S*.*

Доказательство см. [3]. □

§4. Матрицы звезд и специализации дифференцирований

4.1. Матрица звезды. За начальный выберем базисный симплекс $\triangle = \triangle_U^d$ из (1.5), центрированный точкой α_-, где

$$\alpha_- = -\alpha = (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_d).$$

Определим звезду $r = r^{[\sigma]_0}$, состоящую из лучей

$$r_i^{[\sigma]_0} = v_i - \alpha_- = v_i + \alpha, \tag{4.1}$$

где v_i – вершины (1.8) симплекса $\triangle$ и $i = 0, 1, \ldots, d$. Таким образом, полагаем

$$r^{[\sigma]_0} = \{r_0^{[\sigma]_0}, r_1^{[\sigma]_0}, \ldots, r_d^{[\sigma]_0}\} = \{v_0 + \alpha, v_1 + \alpha, \ldots, v_d + \alpha\}. \tag{4.2}$$

Согласно предложению 1.1 выполняется включение $\alpha_- \in \triangle^{\mathrm{int}}$, поэтому применяя критерий (2.4) убеждаемся, что множество векторов из (4.2) действительно образует звезду. Определим *матрицу*

$$S^{[\sigma]_0} = \begin{pmatrix} P_{01}^{[\sigma]_0} & P_{11}^{[\sigma]_0} & \ldots & P_{d1}^{[\sigma]_0} \\ & & \ldots & \\ P_{0d}^{[\sigma]_0} & P_{1d}^{[\sigma]_0} & \ldots & P_{dd}^{[\sigma]_0} \\ Q_0^{[\sigma]_0} & Q_1^{[\sigma]_0} & \ldots & Q_d^{[\sigma]_0} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

звезды $r = r^{[\sigma]_0}$ как матрицу (1.9) симплекса $\triangle$; а именно, каждый столбец матрицы $S^{[\sigma]_0}$ состоит из координат вершин v_i симплекса $\triangle$ и коэффициента $Q_i^{[\sigma]_0} = 1$ при α в правой части (4.1). Согласно (1.9) матрица $S^{[\sigma]_0}$ звезды $r = r^{[\sigma]_0}$ является унимодулярной, поэтому определенные в (4.2) звезды будем называть *унимодулярными*.

4.2. Специализации дифференцирований. Дифференцированиям $\sigma = \{k, l\}$ из множества Σ с произвольными индексами $0 \leqslant k < l \leqslant d$ (см. п. 2.1) поставим в соответствие матрицы

$$D_k^{kl} = E + E_{lk}, \quad D_l^{kl} = E + E_{kl}, \tag{4.4}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица порядка $d+1$, а матрицы E_{ij} имеют нулевые элементы, кроме $1 = 1_{ij}$ на (i, j)-месте. Матрицы M из (4.4) имеют целые коэффициенты и определители $\det M = \pm 1$, поэтому принадлежат группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

По определению (2.9) производная звезда $r^\sigma = \{r_0^\sigma, r_1^\sigma, \dots, r_d^\sigma\}$ имеет вид

$$r^\sigma = \{r_0, \dots, \underbrace{r_k + r_l}_{k}, \dots, \underbrace{r_l}_{l}, \dots, r_d\} \tag{4.5}$$

или

$$r^\sigma = \{r_0, \dots, \underbrace{r_k}_{k}, \dots, \underbrace{r_k + r_l}_{l}, \dots, r_d\}. \tag{4.6}$$

Скажем, что относительно звезды r дифференцирование $\sigma = \{k, l\}$ имеет *специализацию*

$$\operatorname{sp}(\sigma, r) = \operatorname{sp}_k^{kl} \quad \text{или} \quad \operatorname{sp}(\sigma, r) = \operatorname{sp}_l^{kl} \tag{4.7}$$

в зависимости от того, какой случай (4.5) или (4.6) имеет место. Каждой специализации (4.7) поставим в соответствие

$$D(\operatorname{sp}_k^{kl}) = D_k^{kl} \quad \text{или} \quad D(\operatorname{sp}_l^{kl}) = D_l^{kl} \tag{4.8}$$

свою матрицу из (4.4). Таким образом, в силу (4.7) и (4.8) однозначно определена *матрица специализации*

$$D(\sigma, r) = D(\operatorname{sp}(\sigma, r)) \tag{4.9}$$

дифференцирования $\sigma \in \Sigma$ относительно произвольной невырожденной звезды r.

4.3. Матрицы производных звезд. Пусть

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ & & \dots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

– матрица некоторой невырожденной звезды r и σ – некоторое дифференцирование из множества Σ. Выясним, какова матрица

$$S^\sigma = \begin{pmatrix} P_{01}^\sigma & P_{11}^\sigma & \dots & P_{d1}^\sigma \\ & & \dots & \\ P_{0d}^\sigma & P_{1d}^\sigma & \dots & P_{dd}^\sigma \\ Q_0^\sigma & Q_1^\sigma & \dots & Q_d^\sigma \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

производной звезды r^σ.

Лемма 4.1. *Матрицы исходной звезды* (4.10) *и ее производной* (4.11) *связаны между собою формулой*

$$S^\sigma = S \cdot D(\sigma, r), \tag{4.12}$$

где $D(\sigma, r)$ – матрица специализации (4.9) *дифференцирования σ относительно звезды r.*

Доказательство. Пусть матрица-строка $(r_0 r_1 \dots r_d)$ состоит из лучей звезды r и аналогично $(r_0^\sigma r_1^\sigma \dots r_d^\sigma)$ для производной звезды r^σ. Тогда из равенств (4.5), (4.6) и определения (4.8), (4.9) матрицы специализации $D(\sigma, r)$ вытекает формула

$$(r_0^\sigma r_1^\sigma \dots r_d^\sigma) = (r_0 r_1 \dots r_d) \cdot D(\sigma, r), \tag{4.13}$$

из которой, если ее перенести на матрицы звезд S^σ и S, следует формула (4.12). □

§5. Аппроксимация

5.1. Бесконечные итерации дифференцирований. Рассмотрим

$$\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}} \tag{5.1}$$

– множество всех бесконечных последовательностей

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\},$$

состоящих из произвольных сочетаний σ_i из Σ; и пусть

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \tag{5.2}$$

обозначает *отрезок* из первых n членов последовательности σ, при этом полагаем, что $[\sigma]_0 = \varnothing$. Используя определение производной звезды (2.9), индукцией по $n = 0, 1, 2, \dots$ определим $[\sigma]_n$-*производные*

$$r^{[\sigma]_n} = (r^{[\sigma]_{n-1}})^{\sigma_n} \tag{5.3}$$

произвольной звезды r; при этом условимся $r^{[\sigma]_0} = r$ для $n = 0$.

5.2. Радиус производных разверток. Пусть $[\sigma]_n$-производные $r^{[\sigma]_n}$ звезды r состоят из лучей

$$r^{[\sigma]_n} = \{r_0^{[\sigma]_n}, r_1^{[\sigma]_n}, \dots, r_d^{[\sigma]_n}\}. \tag{5.4}$$

Если $T = T(r)$ – развертка (3.25) для звезды r, то обозначим через

$$T^{[\sigma]_n} = T(r^{[\sigma]_n}) \tag{5.5}$$

соответствующие развертки, порождаемые производными звездами $r^{[\sigma]_n}$.

Размер развертки (5.5) будем контролировать с помощью *радиуса развертки*

$$\varrho^{[\sigma]_n} = \varrho(T^{[\sigma]_n}) = \max_{v\in \operatorname{ver} T^{[\sigma]_n}} |v|, \tag{5.6}$$

где $\operatorname{ver} T^{[\sigma]_n}$ – множество вершин развертки $T^{[\sigma]_n}$ и $|v| = |v_1| + \dots + |v_d|$ для $v = (v_1, \dots, v_d)$ из $\mathbb{R}^d$. Из определений развертки (3.25) и ее радиуса (5.6) следует равенство

$$\varrho^{[\sigma]_n} = \max_{v} |v|. \tag{5.7}$$

Здесь максимум берется по всем векторам v, представимым в виде суммы k различных лучей $r_i^{[\sigma]_n}$ звезды $r^{[\sigma]_n}$ из (5.4), где k пробегает все значения от 1 до d. Таким образом, радиус развертки $\varrho^{[\sigma]_n}$ равен радиусу минимальной сферы в полиэдральной метрике (1.15) с центром в точке 0, содержащей развертку $T^{[\sigma]_n}$.

5.3. Основная теорема об аппроксимации.

Лемма 5.1. 1. *Для произвольной бесконечной последовательности дифференцирований $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества Ξ, матрицы*

$$S^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{01}^{[\sigma]_n} & P_{11}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{d1}^{[\sigma]_n} \\ & & \dots & \\ P_{0d}^{[\sigma]_n} & P_{1d}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{dd}^{[\sigma]_n} \\ Q_0^{[\sigma]_n} & Q_1^{[\sigma]_n} & \dots & Q_d^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

производных звезд $r^{[\sigma]_n}$ из (5.4) вычисляются по формуле

$$S^{[\sigma]_n} = S^{[\sigma]_0} \cdot D^{[\sigma]_n}(r). \tag{5.9}$$

Здесь $S^{[\sigma]_0} = S$ – матрица (4.3) начальной звезды $r = r^{[\sigma]_0}$ и

$$D^{[\sigma]_n}(r) = D(\sigma_1, r^{[\sigma]_0}) \cdot D(\sigma_2, r^{[\sigma]_1}) \cdot \dots \cdot D(\sigma_n, r^{[\sigma]_{n-1}}), \tag{5.10}$$

где $D(\sigma^*, r^*)$ – матрицы специализации (4.9) дифференцирований σ^* относительно звезд r^*.

2. *Производные звезды $r^{[\sigma]_n} = \{r_0^{[\sigma]_n}, r_1^{[\sigma]_n}, \dots, r_d^{[\sigma]_n}\}$ состоят из лучей*

$$r_i^{[\sigma]_n} = Q_i^{[\sigma]_n}\alpha + P_i^{[\sigma]_n} \tag{5.11}$$

порядков $Q_i^{[\sigma]_n} \geqslant 1$ для $i = 0, 1, \dots, d$, где $P_i^{[\sigma]_n} = (P_{i1}^{[\sigma]_n}, \dots, P_{id}^{[\sigma]_n})$ – вектор из $\mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Формула (5.9) вытекает из формулы (4.12), а из (5.9) следует явный вид (5.8) матрицы $S^{[\sigma]_n}$. Равенство (5.11) для лучей $r_i^{[\sigma]_n}$ выводится из определения (4.1) лучей $r_i^{[\sigma]_0}$ начальной звезды $r = r^{[\sigma]_0}$ и из (5.8). □

Далее нам потребуется матрица-столбец

$$\begin{pmatrix} P_{\max}^{[\sigma]_n} \\ Q_{\max}^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{01}^{[\sigma]_n} + P_{11}^{[\sigma]_n} + \cdots + P_{d1}^{[\sigma]_n} \\ \cdots \\ P_{0d}^{[\sigma]_n} + P_{1d}^{[\sigma]_n} + \cdots + P_{dd}^{[\sigma]_n} \\ Q_0^{[\sigma]_n} + Q_1^{[\sigma]_n} + \cdots + Q_d^{[\sigma]_n} \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

равная сумме всех столбцов матрицы (5.8), и соответствующая точка

$$r_{\max}^{[\sigma]_n} = Q_{\max}^{[\sigma]_n} \alpha + P_{\max}^{[\sigma]_n} \tag{5.13}$$

порядка $Q_{\max}^{[\sigma]_n} = Q_0^{[\sigma]_n} + Q_1^{[\sigma]_n} + \cdots + Q_d^{[\sigma]_n} \geqslant 1$. Из определений (5.12) и (5.13) следует, что $r_{\max}^{[\sigma]_n}$ получается как сумма

$$r_{\max}^{[\sigma]_n} = r_0^{[\sigma]_n} + r_1^{[\sigma]_n} + \cdots + r_d^{[\sigma]_n} \tag{5.14}$$

всех лучей (5.11) производной звезды $r^{[\sigma]_n}$.

Теорема 5.1. *Пусть α – иррациональная точка (1.4), r – звезда (4.2) и $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$ – произвольная бесконечная последовательность дифференцирований σ_i из множества Σ. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Звезда $r = \{r_0, r_1, \ldots, r_d\}$ является бесконечно дифференцируемой и, значит, существуют $[\sigma]_n$-производные звезды $r^{[\sigma]_n}$ из (5.4) всех порядков $n = 0, 1, 2, \ldots$*

2. *Порождаемые производными звездами $r^{[\sigma]_n}$ развертки $T^{[\sigma]_n}$ из (5.5) обладает свойством минимальности:*

$$Q\alpha + P \notin (T^{[\sigma]_n})^{\mathrm{int}}, \tag{5.15}$$

если $1 \leqslant Q < Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ и P – любая точка из $\mathbb{Z}^d$; единственная точка

$$Q\alpha + P \in (T^{[\sigma]_n})^{\mathrm{int}} \tag{5.16}$$

порядка $Q = Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ есть точка $r_{\max}^{[\sigma]_n} = Q_{\max}^{[\sigma]_n} \alpha + P_{\max}^{[\sigma]_n}$, определенная в (5.14).

3. *Имеют место неравенства*

$$\left|\alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}\right| \leqslant \frac{\varrho^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \tag{5.17}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Здесь* $\varrho^{[\sigma]_n} = \varrho(T^{[\sigma]_n})$ *обозначает радиус развертки* $T^{[\sigma]_n}$ $[\sigma]_n$*-производной* $r^{[\sigma]_n}$ *звезды* r*, определенный в* (5.6).

4. *Знаменатели* $Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ *в аппроксимационной формуле* (5.17) *обладают свойством*

$$Q_{\max}^{[\sigma]_n} \longrightarrow +\infty \quad \textit{при} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{5.18}$$

Доказательство. Утверждения 1 и 4 были доказаны в [3] и [1].

Согласно определению 2.1 начальная звезда $r = r^{[\sigma]_0}$, определенная в (4.2), вкладывается

$$r^{[\sigma]_0} \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{5.19}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^d_{\mathbb{Z}^d}$ относительно сдвига $S = S_{\alpha_-}$. По утверждению 1 для звезды $r = r^{[\sigma]_0}$ существуют производные звезды $r^{[\sigma]_n}$ всех порядков $n = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда из (5.19) и теоремы 3.3 следуют вложения

$$r^{[\sigma]_n} \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{5.20}$$

в тор $\mathbb{T}^d$ производных звезд $r^{[\sigma]_n}$ относительно того же сдвига $S = S_{\alpha_-}$. Теперь из существования вложений (5.20) звезд $r^{[\sigma]_n}$ и критерия вложимости отвечающих им разверток тора $T^{[\sigma]_n} = T(r^{[\sigma]_n})$ (см. теорему 3.2) вытекает минимальность (5.15), (5.16) разверток $T^{[\sigma]_n}$.

Что касается неравенств (5.17), то они непосредственно получаются из (5.16) и определения (5.6) радиуса развертки $\varrho^{[\sigma]_n} = \varrho(T^{[\sigma]_n})$. □

5.4. Минимальное свойство и $T^{[\sigma]_n}$-нормы. Минимальное свойство (5.15)–(5.16) указывает на *наилучшее ядерное приближение* (karyon approximation). Это означает, что точки $r_{\max}^{[\sigma]_n} = Q_{\max}^{[\sigma]_n}\alpha + P_{\max}^{[\sigma]_n}$ наилучшим образом приближаются к 0 mod $\mathbb{Z}^d$ относительно $T^{[\sigma]_n}$*-норм* (*ядерных норм*) $||\cdot|| = ||\cdot||_\alpha^{[\sigma]_n}$, в качестве выпуклых тел для которой выбраны выпуклые многогранники $\mathrm{Kr}^n = T^{[\sigma]_n}$ – ядра (3.27) индуцированных разбиений d-мерного тора $\mathbb{T}^d$. Так определенные $T^{[\sigma]_n}$-нормы обладают следующими свойствами:

$$
\begin{gathered}
||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\
||ax|| = a\,||x||, \quad a \geqslant 0, \\
c_1\,||x|| \leqslant ||-x|| \leqslant c_2\,||x||, \\
||x+y|| \leqslant c_3\,(||x|| + ||y||),
\end{gathered}
\tag{5.21}
$$

где $0 < c_1 \leqslant c_2$, $c_3 > 0$ – некоторые константы. Как видно из (5.21), $T^{[\sigma]_n}$-нормы не удовлетворяют свойству $||-x|| = ||x||$ – это следствие того, что 0 не находится в центре симметрии многогранников $\mathrm{Kr}^n = T^{[\sigma]_n}$, хотя сами они являются центрально симметричными.

Неравенство (5.17) записано в фиксированной многогранной норме $|x|_s = |x_1| + \cdots + |x_d|$. Можно было взять и любую другую норму, например, – шаровую или евклидову $|x|_e = (|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{1/2}$. Фиксированные нормы удобны для количественных оценок скорости приближений, но они не прослеживают наилучшие приближения.

Замечание 5.1. Приближения (5.17) будут нетривиальны только в случае, когда радиус разверток

$$
\varrho^{[\sigma]_n} = \varrho(T^{[\sigma]_n}) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{5.22}
$$

Описанию того, как можно обеспечить выполнение последнего свойста, посвящен следующий раздел.

§6. Локальные стратегии

6.1. Целевая функция. Из неравенств (5.17) видно, что приближение иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ подходящими дробями $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$ полностью зависит от величины радиуса $\varrho^{[\sigma]_n} = \varrho(T^{[\sigma]_n})$ разверток тора $T^{[\sigma]_n} = T(r^{[\sigma]_n})$, порождаемых производными звездами $r^{[\sigma]_n}$. В свою очередь, сами производные звезды $r^{[\sigma]_n}$ определяются бесконечной последовательностью дифференцирований $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$.

Воспользуемся функцией ϱ для формирования стратегии выбора дифференцирований $\sigma_n \in \Sigma$ в последовательности

$$
\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\},
$$

применяя индукцию по $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$
\varrho(T^{[\sigma]_n}) = \min_{\sigma'_n \in \Sigma} \varrho(T^{[\sigma']_n}), \tag{6.1}
$$

где через $[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ и $[\sigma']_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n\}$ обозначены отрезки длины n. Смысл стратегии (6.1) состоит в том, что если отрезок $[\sigma]_{n-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ уже определен, то дифференцирование $\sigma_n \in \Sigma$ выбрается из условия минимизации (6.1). Определенную в (6.1) стратегию будем называть *ϱ-стратегией*, явно указывая на ее зависимость от целевой функции $\varrho(T)$ из (5.6).

6.2. Диофантовы экспоненты. Из неравенства (5.17) следует, что выбранная ϱ-стратегия применительно к данной точке α срабатывает, если выполняется условие (5.22). Если же попытаться как-то количественно оценить ϱ-стратегию, то с этой целью можно использовать, например, *диофантову экспоненту*

$$\eta = \eta(\alpha, \varrho) = \sup_{n' \geqslant 0} \inf_{n \geqslant n'} \frac{-\ln \varrho(T^{[\sigma]_n})}{\ln Q_{\max}^{[\sigma]_n}}. \tag{6.2}$$

Ее роль видна из следующего утверждения.

Теорема 6.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 5.1*, выбрана целевая функция* $\varrho(T)$ *из* (5.6) *и по ϱ-стратегии* (6.1) *построена бесконечная последовательность производных* $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ *из множества* $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. *Кроме того, пусть* η' *– произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $\eta' < \eta$, *где* $\eta = \eta(\alpha, \varrho)$ *– диофантова экспонента* (6.2). *Тогда в метрике* (1.15) *справедлива оценка*

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right| \leqslant \frac{1}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\eta'}} \tag{6.3}$$

для всех $n \geqslant n_{\eta'}$. *Здесь нижняя граница* $n_{\eta'}$ *для* n *определяется выбором показателя* η' *и зависит от иррациональной точки* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ *и целевой функции* $\varrho(T)$.

Доказательство. непосредственно следует из неравенства (5.17) в теореме 5.1 и определения (6.2) диофантовой экспоненты η. □

6.3. Многошаговые стратегии. Определенную в (6.1) ϱ-стратегию, естественно назвать *одношаговой.* Если возникнет задача увеличения значения диофантовой экспоненты (6.2) и, значит, увеличения скорости приближения в неравенстве (6.3), то для этого можно попытаться применить многошаговую стратегию:

$$\min_{\substack{\sigma_{n+1}\in\Sigma,\\ \dots\\ \sigma_{n+\omega-1}\in\Sigma}} \varrho(T^{[\sigma]_{n+\omega-1}}) = \min_{\substack{\sigma'_n\in\Sigma,\\ \sigma_{n+1}\in\Sigma,\\ \dots\\ \sigma_{n+\omega-1}\in\Sigma}} \varrho(T^{[\sigma']_{n+\omega-1}}), \tag{6.4}$$

где через

$$[\sigma]_{n+\omega-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+\omega-1}\},$$
$$[\sigma']_{n+\omega-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+\omega-1}\}$$

обозначены отрезки длины $n+\omega-1$ в последовательности

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}.$$

Если отрезок $[\sigma]_{n-1}$ уже построен, то следующий отрезок $[\sigma]_n$ находится по правилу (6.4). Определенную таким образом стратегию будем называть *ω-шаговой стратегией* с оценочной функцией $\varrho(T^{)}$ или кратко – *ϱ^ω-стратегией*. Стратегия из (6.1) – это одношаговая ϱ^1-стратегия.

Замечание 6.1. Все определяемые таким образом стратегии относятся к классу *локальных*, когда каждый шаг определяется по возможным результатам конечного отрезка следующих за ним шагов.

§7. Числовые примеры

7.1. Степень точки и локальные экспоненты. Определим *степень* $\deg\alpha$ точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ равенством

$$\deg\alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}], \tag{7.1}$$

где $\mathbb{Q}(\alpha)$ – поле, полученное расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ и $\deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ обозначает степень расширения $\mathbb{Q}(\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$.

Пусть точка α имеет алгебраические координаты. Будем говорить, что она является *полной*, если выполненяетя соотношение

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha). \tag{7.2}$$

Здесь $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d]$ обозначает *модуль* с базисом $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ над полем $\mathbb{Q}$. Если α – полная точка, то ее степень (7.1) равна

$$\deg\alpha = d + 1. \tag{7.3}$$

Определенная в (6.2) диофантова экспонента $\eta = \eta(\alpha, \varrho)$ имеет в большей степени чисто теоретическое значение. При работе с числовыми данными удобнее опираться на *локальные диофантовы экспоненты*

$$\eta_n = \eta_n(\alpha, \varrho) = \frac{-\ln\, \varrho(r^{[\sigma]_n})}{\ln\, Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \tag{7.4}$$

с индексами $n = 1, 2, 3, \ldots$

7.2. Кубические иррациональности. Сначала рассмотрим точки $\alpha = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$, где $a = 7$ и 10. Согласно определению (7.1) их степени равны

$$\begin{gathered} \deg\left((\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{49})\right) = \deg \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})/\mathbb{Q} = 3, \\ \deg\left((\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{100})\right) = \deg \mathbb{Q}(\sqrt[3]{10})/\mathbb{Q} = 3. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Поэтому согласно (7.2) они будут полными точками и для них выполняется свойство (7.3).

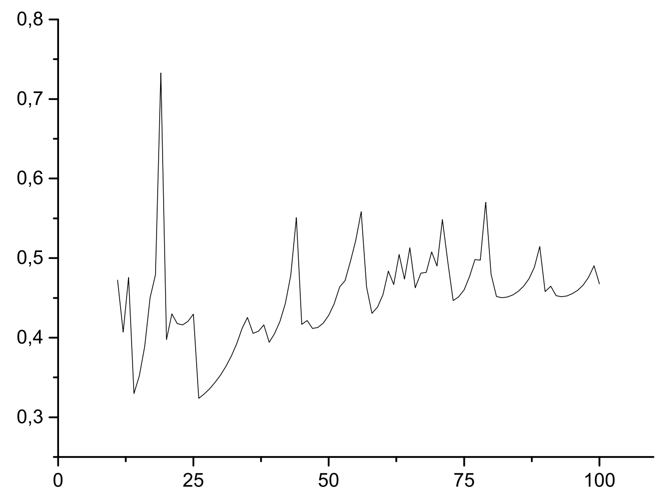

Рис. 8.1. График локальных диофантовых экспонент η_n для полной точки $\alpha = (\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{49})$ степени $\deg \alpha = 3$.

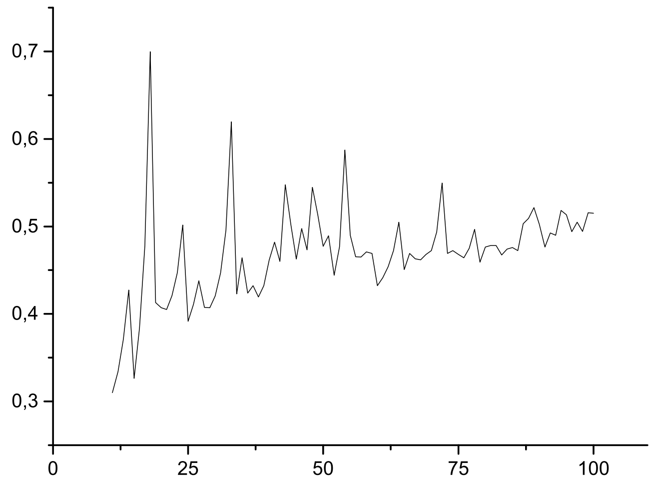

Рис. 8.2. График локальных диофантовых экспонент η_n для полной точки $\alpha = (\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{100})$ степени $\deg \alpha = 3$.

На рис. 8.1 и 8.2 по горизонтальной оси отложены значения последовательных итераций $1 \leqslant n \leqslant 10^2$, а по вертикальной – соответствующие значения локальных экспонент $\eta_n = \eta_n(\alpha, \varrho)$ из (7.4) с ограничением на знаменатели

$$Q_{\max}^{[\sigma]_n} \geqslant 10^3 \tag{7.6}$$

подходящих двумерных дробей $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$ в неравенствах (5.17) и (6.3). Условие (7.6) введено для начальной стабилизации процесса приближения

$$\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \to \alpha \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

подходящими дробями точек α. Ниже приведены приближенные наименьшее $\underline{\eta}$, среднее $\underline{\overline{\eta}}$ и наибольшее $\overline{\eta}$ значения экспонент η_n для $n \leqslant 10^2$:

$$\begin{array}{llll} a = 7: & \underline{\eta} = 0.324, & \underline{\overline{\eta}} = 0.450, & \overline{\eta} = 0.733; \\ a = 10: & \underline{\eta} = 0.310, & \underline{\overline{\eta}} = 0.468, & \overline{\eta} = 0.7. \end{array} \tag{7.7}$$

7.3. Биквадратичные иррациональности. Выберем биквадратичную точку $\alpha = (\sqrt{7}, \sqrt{10})$. По определению (7.1) ее степень равна

$$\deg\left((\sqrt{7}, \sqrt{10})\right) = \deg \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{10})/\mathbb{Q} = 4.$$

Следовательно в отличие от рассмотренных выше полных кубических точек, данная точка $\alpha = (\sqrt{7}, \sqrt{10})$ не является полной (7.2) и для нее свойство (7.3) уже не выполняется.

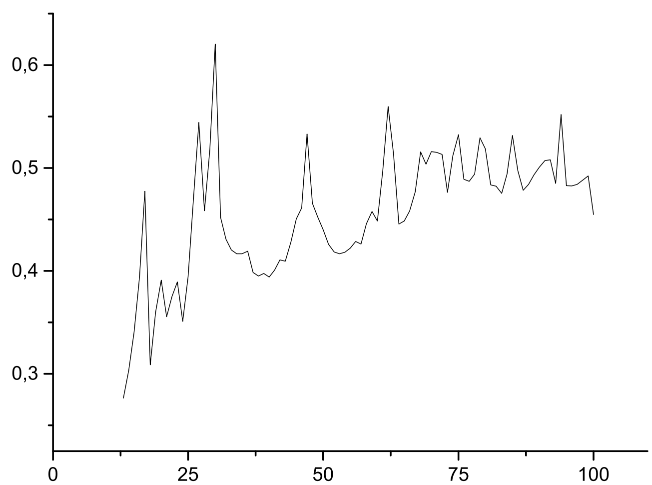

Рис. 8.3. График локальных диофантовых экспонент η_n
для неполной точки $\alpha = (\sqrt{7}, \sqrt{10})$ степени $\deg \alpha = 4$.

Для точки $\alpha = (\sqrt{7}, \sqrt{10})$ наименьшее $\underline{\eta}$, среднее $\underline{\overline{\eta}}$ и наибольшее $\overline{\eta}$ значения экспонент η_n соответственно равны:

$$\underline{\eta} = 0.276, \quad \underline{\overline{\eta}} = 0.456, \quad \overline{\eta} = 0.620. \tag{7.8}$$

7.4. Выводы. 1. Из результатов (7.7) и (7.8) видно, что для всех приведенных выше точек α наименьшие значения экспонент $\underline{\eta} > 0$ и, следовательно, то же самое справедливо для всех значениях $\eta_n > 0$ локальных диофантовых экспонент (7.4). Поэтому оценки приближений указанных точек α в неравенствах (5.17) и (6.3) нетривиальны. Это означает, что определенная в (6.1) одношаговая ϱ-стратегия работает.

2. В [11] было доказано, что для кубических иррациональностей с комплексным сопряжением и, в частности, для точек $\alpha = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$, где $a = 7$ или 10, существуют периодические приближения (6.3) с диофантовой экспонентой (6.2), равной $\eta = 0.5$ – наибольшей возможной экспонентой для отмеченных кубических иррациональностей. Из графиков на рис. 8.1 и 8.2 видно, что локальные экспоненты η_n регулярно принимают значения $\eta_n > 0.5$ для $n \leqslant 10^2$.

3. В одномерном случае $d = 1$, т.е. для обычных цепных дробей, пики значений локальных экспонент η_n связаны с большими неполными частными в разложении вещественного числа в цепную дробь. Поэтому и для высших размерностей $d \geqslant 2$ пики значений η_n гипотетично можно ассоциировать с большими "неполными частными" в ϱ-стратегии (6.1) последовательных приближений точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

4. В (6.1) стратегия приближения подходящими цепными дробями $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$ к точке α была выбрана так, чтобы получающиеся в теореме 5.1 развертки $T^{[\sigma]_n}$ не сильно вытягивались, т.е. развертки $T^{[\sigma]_n}$ при $n \longrightarrow +\infty$ удерживали бы форму, близкую к шаровой. Последнее означает ограниченность отношения $\frac{R_n}{r_n}$ радиусов описанного и вписанного шаров для многогранников $T^{[\sigma]_n}$ при $n \longrightarrow +\infty$. Данное свойство обеспечивает хорошие приближения (5.17) точки α подходящими дробями $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$ в выбранной нами ромбической норме $|x| = |x_1| + \cdots + |x_d|$ или эквивалентной ей евклидовой норме $|x|_e = (|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{1/2}$.

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Совр. пробл. матем., МИАН, 2017, том 299, стр. 1–20.
2. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
3. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
4. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres.* — In Treizieme congres des mathematiciens scandinaves, tenu a Helsinki 18–23 aout (1957), 45–64. Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958.
5. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions.* — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.

6. A. Nogueira, The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm. — Israel J. Math. **90** (1995), No. 1–3, 373–401.
7. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction.* Oxford Univ. Press, New York, 2000.
8. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the arnoux–rauzy–poincare algorithm.* — Advances in Applied Mathematics **63** (2015), 90–130.
9. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms.* — `arXiv:1508.07814`, August 2015.
10. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexite lineaire.* — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
11. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
12. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем. **71** (2007), № 2, 89-122.
13. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
14. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102.
15. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах.* М., 1953.
16. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2. Киев, 1952.
17. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, 2005, т. 322, с. 83–106.
18. V. G. Zhuravlev, *On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling.* — Anal. Probab. Methods Number Theory, E. Manstavicius et al. (Eds), TEV, Vilnius, 2007, p. 240–254.

Zhuravlev V. G. The karyon algorithm for decomposition into multidimensional continued fractions.

In this paper we propose a universal karyon algorithm, applicable to any set of real numbers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, which is a modification of the simplex-karyon algorithm. The main difference is an infinite sequence $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n, \dots$ of d-dimensional parallelohedra $\mathbf{T}_n$ instead of the simplex sequence. Each parallelohedron $\mathbf{T}_n$ is obtained from the previous $\mathbf{T}_{n-1}$ by means of the differentiation $\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_{n-1}^{\sigma_n}$. Parallelohedra $\mathbf{T}_n$ represent itself karyons of certain induced toric tilings. A certain algorithm (ϱ-strategy) of the choice of infinite sequences $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ of derivations σ_n is specified. This algorithm provides the convergence $\varrho(\mathbf{T}_n) \longrightarrow 0$ if $n \longrightarrow +\infty$, where $\varrho(\mathbf{T}_n)$ denotes the radius of the parallelohedron $\mathbf{T}_n$ in the metric ϱ chosen as an objective function. It is proved that the parallelohedra $\mathbf{T}_n$ have the minimum property, i.e. the karyon approximation algorithm is the best with respect to karyon $\mathbf{T}_n$-norms. Also we get an estimate for the approximation rate of real numbers $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ by multidimensional continued fractions.

Математический
институт им. В. А. Стеклова РАН
Москва;
Владимирский государственный
университет,
пр. Строителей, 11,
600024, Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 9 февраля 2018 г.