Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 469, 2018 г.

Д. А. Артюшин, А. Л. Смирнов

ФОРМУЛА ЭЙЗЕНШТЕЙНА И СООТВЕТСТВИЕ ДИРИХЛЕ

Введение

В работе [1] Эйзенштейн пишет: "Es giebt Figuren, für welche man durch einfache Formeln die Anzahl der innerhalb derselben liegenden Gitterpuncte bestimmen kann. Stellt man sich z. B. einen Kreis vor, dessen Mittelpunct im Anfangspuncte der Coordinaten liegt und dessen Radius $\sqrt{m}$ ist, so wird die Anzahl der Gitterpuncte S, welche dieser Kreis umschiefst, die aus den Axen liegenden mitgerechnet, durch folgende Formel gegeben

$$S = 1 + 4\left(E(m) - E\left(\frac{1}{3}m\right) + E\left(\frac{1}{5}m\right) - \text{ etc.}\right),$$

bis die Reihe von selbst abbricht"; "Es giebt ähnliche Formeln für die Anzhal der Gitterpuncte eines Systems von Ellipsen oder Hyperbelsectoren; auch finden ähnliche Relationen im Raume und in Fällen mit mehr als 3 Dimensionen Statt. Wir werden auf diesen wichtigen Gegenstand, der aufs genauste mit den Eigenschaften der höheren Formen zusammenhängt, bei einer andern Gelegenheit zurückkommen".

Авторы благодарят М. Капранова, обратившего внимание одного из них на это высказывание. Для наших целей удобно записать формулу Эйзенштейна в виде

$$\frac{N(r)-1}{4} = \left[\frac{r^2}{1}\right] - \left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{5}\right] - \left[\frac{r^2}{7}\right] + \left[\frac{r^2}{9}\right] - \dots, \tag{1}$$

где $N(r)$ – число целых точек в круге радиуса r с центром в нуле.

Интересна история этой формулы. В работе Эрхарта (см. [2, p. 29]) формула (1) приписана Гауссу, но без явной ссылки. Нам не удалось

Ключевые слова: целая точка, теорема Римана–Роха, точная формула, эллипс, арифметический.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-01-00750).

найти этой формулы у Гаусса. Кроме того, в работе Бугаева [3, §35] для $n = 0, 1, 2, \ldots$ доказана формула

$$\left[\sqrt{n^2}\right] + \left[\sqrt{n^2-1}\right] + \left[\sqrt{n^2-4}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2-n^2}\right] = \left[\frac{n^2}{1}\right] - \left[\frac{n^2}{3}\right] + \left[\frac{n^2}{5}\right] - \ldots \quad (2)$$

Левые части (1) и (2) очевидно равны при $r = n$. Поэтому по существу мы видим снова формулу Эйзенштейна. Бугаев приписывает (2) Лиувиллю, но без ссылки. Также формула (1) приведена без ссылки, но с доказательством, в книге Гильберта и Кон-Фоссена (см. [4, гл. 2, §6]). Мы благодарим А. Мошонкина за это замечание.

Обсудим связь формулы Эйзенштейна с арифметической геометрией. Пусть $X = U \cup \{\infty\}$ – наивная компактификация $U = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. При классическом подходе в качестве векторного расслоения на X рассматривают пары $V = (V_U, |*|)$, где V_U – векторное расслоение на U, а $v \mapsto |v| \in \mathbb{R}$ – банахова норма на $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes V_U$.

Одна из проблем этого подхода – отсутствие конечной представимости $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$-модуля $V_\infty = \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{O}_X} V$ для достаточно общей банаховой нормы $v \mapsto |v|$ (см. введение в работу Дурова [5]). Конечная представимость соответствует тем нормам, единичный шар которых является многогранником. Более того, классическая аналогия требует конечной представимости не только над формальной окрестностью точки ∞, но и над некоторой ее окрестностью Зарисского. Таким образом, речь должна идти только о многогранниках, все вершины которых принадлежат $V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes V_U$. В любом случае банаховы нормы, происходящие из квадратичных форм, выпадают из этого подхода. Отметим, однако, что при подходе Харана (см. [6]) в качестве V_∞ возникают именно такие нормы. Обсуждение достоинств и недостатков этого подхода выходит за рамки данной работы.

Обсудим теперь арифметические аналоги когомологий и теоремы Римана–Роха. Для арифметических кривых такое обсуждение можно найти в работе Шпиро [7]. Обычно полагают

$$\chi(X, V) = -\log \operatorname{vol}(V_{\mathbb{R}}/V_U),$$

где подходящая мера Хаара на $V_{\mathbb{R}}/V_{\mathbb{Z}}$ выбирается с помощью банаховой нормы. Кроме того, полагают

$$H^0(X, V) = V_U \cap B,$$

где $B \subset V_{\mathbb{R}}$ – единичный шар банаховой нормы. В геометрии $\chi(X, V) = h^0(X, V) - h^1(X, V)$, где X – гладкая полная кривая, V – векторное расслоение на X, $h^q(X, V) = \mathrm{rk}_F\, H^q(X, V)$, а F – поле констант. Кроме того, если ∞ – некоторая точка X, то $\chi(X, V(r)) = h^0(X, V(r))$, где $V(r)$ – подкрутка V с помощью линейного расслоения $\mathcal{O}_X(r \cdot \infty)$, а r достаточно велико.

Посмотрим с этой точки зрения на формулу (1). В качестве F возьмем моноид, состоящий из нуля и всех корней из единицы, лежащих в поле $K = \mathbb{Q}(i)$. Левая часть (1) в этих терминах не что иное, как $\mathrm{rk}_F\, H^0(Y, \mathcal{O}_Y(r \cdot \infty))$, где $Y = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \cup \{\infty\}$. Поэтому заманчиво считать формулу Эйзенштейна частным случаем не найденной пока арифметической теоремы Римана–Роха.

Настоящая работа имеет двоякую цель. Концептуально вопрос состоит в том, в какой мере формула (1) может служить образцом для арифметической теоремы Римана–Роха. Вторая цель, более конкретная, состоит в том, чтобы продвинуться по реализации программы Эйзенштейна. Поясним это подробнее. В работе [8] помимо формулы Эйзенштейна доказано еще восемь похожих формул. Полученные в итоге девять формул соответствуют девяти одноклассным мнимым квадратичным полям. Основной технический результат данной работы – теорема 3.2.1 – обобщает формулу Эйзенштейна на случай произвольного мнимого квадратичного поля.

§1. E-функции

Целая часть вещественного числа x обычно обозначается $[x]$. В более ранних работах та же самая функция часто обозначалась $E(x)$. Для целей данной работы удобно использовать оба обозначения. Итак,

$$E(x) = [x].$$

1.1. Определение и примеры.

Определение 1.1.1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}$. Функция $h : U \to \mathbb{C}$ называется E-функцией, если равенство $E(x) = E(y)$ влечет за собой равенство $h(x) = h(y)$.*

Ниже $U = \mathbb{R}$, если не оговорено противное. Более того, если некоторая E-функция h естественно определена на меньшем U, например на $U = \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, то мы ее доопределяем на всем $\mathbb{R}$ по правилу:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } U \cap [E(x), E(x)+1) = \varnothing; \\ h(y), & \text{если найдется } y \in U \cap [E(x), E(x)+1). \end{cases}$$

Удобно ввести следующие обозначения:

$$EF^1 = \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | h - E\text{-функция и } h(x) = 0 \text{ при } x < 1\};$$

$$EF^+ = \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | h - E\text{-функция и } h(x) = 0 \text{ при } x << 0\}.$$

Например, для целого $d > 0$ функция $x \mapsto E(x/d)$ является E-функцией.

Теорема 1.1.2 (см. [8])**.** *Для $h \in EF^1$ существуют и единственные $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$, такие, что при $x \geqslant 0$ верно соотношение*

$$h(x) = a_1 E(x) + a_2 E(x/2) + \dots \tag{3}$$

1.1.1. *Пример.* Функция $x \mapsto E(x^\alpha)$ является E-функцией при $0 < \alpha \leqslant 1$. Для $\alpha = 1/2$ имеется любопытная формула:

$$E(\sqrt{x}) = \lambda(1) E\left(\frac{x}{1}\right) + \lambda(2) E\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda(3) E\left(\frac{x}{3}\right) + \dots,$$

где λ – функция Лиувилля (см. [9, 2.12]). По определению,

$$\lambda(n) = (-1)^{v_2(n) + v_3(n) + v_5(n) + \dots},$$

где $v_p(n)$ – кратность простого p как делителя n. Таким образом, в некотором смысле квадратный корень можно извлекать с помощью линейных операций. Симпатичные формулы имеются и для некоторых других α. Например,

$$E(\sqrt[4]{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \sum_{d^2 | n} \lambda(d) E\left(\frac{x}{n}\right).$$

Отметим, что в [10], наряду с разложением E-функций в ряд по $E(x/n)$, рассматриваются разложения по $E\left((x/n)^\alpha\right)$ при фиксированном α, особенно при $\alpha = 1/m$.

1.2. E-функции и ряды Дирихле. С каждым рядом Дирихле

$$L(s) = \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots,$$

где $a_i \in \mathbb{C}$, свяжем E-функцию

$$h(x) = a_1E(x/1) + a_2E(x/2) + a_3E(x/3) + \dots$$

Отметим следующую переформулировку теоремы 1.1.2.

Теорема 1.2.1. *Соответствие $L \mapsto h$ – биекция между пространством рядов Дирихле и пространством EF^1.*

Ряд Дирихле, соответствующий h, обозначим $L(h,s)$.

1.2.1. *Пример.* Здесь и далее $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана.

$$L(E(\sqrt{x}), s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

Действительно, $\zeta(2s)/\zeta(s) = \prod(1+p^{-s})^{-1} = \prod(1-p^{-s}+p^{-2s}-\dots) = \sum\lambda(n)n^{-s}$. Осталось воспользоваться определением соответствия и формулой из 1.1.1.

1.2.2. *Пример.* Пусть $m \geqslant 0$ и $h(x) = \sigma_m(k) + \sigma_m(k-1) + \dots$, $(k = E(x), x \geqslant 1)$. Здесь $\sigma_m(k) = \sum d^m$, где d пробегает делители k. Тогда

$$h(x) = E(x) + 2^mE(x/2) + 3^mE(x/3) + \dots \quad \text{и} \quad L(h,s) = \zeta(s-m).$$

1.2.3. Для функции $h \in EF^+$ положим

$$(\delta h)(x) = h(x) - h(x-1). \tag{4}$$

$$(\sigma h)(x) = h(x) + h(x-1) + h(x-2) + \dots. \tag{5}$$

Предложение 1.2.2. *Предположим, что $h(x) = a_1[x] + a_2[x/2] + \dots$ Тогда*

$$(\delta h)(n) = \sum_{d|n} a_d \ \text{ и } \ a_n = \sum_{d|n}\mu(n/d)(\delta h)(d). \tag{6}$$

Это утверждение доказано в [8, Предл. 1.1.2]. Вот его переформулировка:

$$L(h,s)\zeta(s) = L(\delta h, s).$$

1.2.4. *E-функции и интегральные преобразования.* Преобразование из теоремы 1.2.1 можно представить в интегральной форме. А именно:

$$L(h,s) = \frac{s}{\zeta(s)} \int\limits_0^\infty h(t) t^{-s} \frac{dt}{t}.$$

Эта формула вытекает из того, что $\int E(t/n) t^{-s} d \ln t = n^{-s}\zeta(s)/s$.

§2. Соответствие Дирихле

Соответствие Дирихле введено для прояснения гауссовой композиции квадратичных форм. Оно связывает классы идеалов колец целых квадратичных расширений $\mathbb{Q}$ с бинарными квадратичными формами над кольцом целых чисел (см. [11, II, §7, п. 5]) и опирается на специфику $\mathbb{Z}$ (см. 2.8). Так как соответствие Дирихле играет важную роль для целей данной работы, то целесообразно получить по меньшей мере часть этой конструкции в более общей ситуации.

Пусть A – дедекиндова область. Положим

$$X = \operatorname{Spec} A.$$

Таким образом, X – целая регулярная схема, $\dim X = 1$.

Конформное соответствие Дирихле устанавливает эквивалентность двух группоидов, связанных с A: категории изоморфизмов конформных ортогональных плоскостей $\mathcal{C}onfOSpc_2$ (см. 2.1) и категории изоморфизмов конформных унитарных прямых $\mathcal{U}Spc_1$ (см. 2.2.5). На категориях $\mathcal{C}onfOSpc_2$ и $\mathcal{C}onfUSpc_1$ имеется дополнительная структура, связанная с мерой вырождения δ. Соответствие Дирихле сохраняет эту структуру и может быть представлено диаграммой

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}onfOSpc_2 \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, "\delta"'] & & \mathcal{C}onfUSpc_1 \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, "\delta"] \\ & \Delta & \end{tikzcd} \tag{7}$$

Обычно не будем отличать модуль над кольцом от соответствующего $\mathcal{O}$-модуля на спектре этого кольца. Наоборот, $\mathcal{O}$-модуль на аффинной схеме не отличаем от модуля его глобальных сечений. Кроме того, производные функторы со значениями в категори $\mathcal{O}$-модулей над аффинной схемой обычно обозначены как соответствующие когомологии.

Далее Sym – симметрическая степень, а Λ – внешняя степень в категории A-модулей. Для конечнопорожденного проективного A-модуля V определены A-модули $V^* = \mathrm{Hom}_A(V, A)$ и $\mathrm{Det}\, V = \Lambda^{\mathrm{rk}\, V} V$.

2.1. Ортогональные структуры. Ортогональной плоскостью над A назовем примитивный бинарный квадратичный A-модуль. Категорию изоморфизмов ортогональных плоскостей обозначим $\mathcal{O}Spc_2$.

Конформной ортогональной плоскостью над A назовем пару (V, l), где V – локально свободный A-модуль ранга 2, а l – прямая в пространстве QF квадратичных форм на V (под прямой в локально свободном модуле имеется в виду его локально свободный подмодуль ранга 1, фактор по которому также локально свободен). Иными словами, $QF = \mathrm{Sym}^2(V^*)$, а $l \in \mathbf{P}(QF)(A)$.

Уточним терминологию. Ниже V – конечнопорожденный проективный A-модуль.

2.1.1. *Квадратичные формы.* Классически квадратичная форма над $\mathbb{Z}$ представляет собой однородный полином второй степени. Таким образом, имеются в виду квадратичные формы, допускающие вырождения. Например, бинарная форма $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ вырождается, но не зануляется, по модулю 3. Это означает, что $(V \otimes \mathbb{F}_3)^{\perp} \neq 0$, где $V = \mathbb{Z}^2$, а ортогонал рассматривается относительно билинейной формы, связанной с $f \otimes \mathbb{F}_3$ (см. 2.1.2).

Квадратичной формой на V называется произвольный элемент

$$f \in \mathrm{Sym}^2 V^*.$$

Форма f примитивна, если $f \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ для всякого простого идеала $\pi \subset A$.

2.1.2. *Квадратичные модули и модули с билинейной формой.* Пара (V, f), где f – квадратичная форма на V, называется квадратичным A-модулем. Квадратичный модуль (V, f) назовем примитивным, если f – примитивна (см. 2.1.1).

С квадратичным модулем (V, f) связана симметричная билинейная форма на V:

$$b(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y).$$

Таким образом, $b(x,x) = 2f(x)$ и f восстанавливается по b, если 2 – не делитель нуля в A. С произвольной билинейной формой $b : V \times V \to A$ связана стрелка

$$\widetilde{b} : V \to V^*, \text{ где } \widetilde{b}(x)(y) = b(x,y). \tag{8}$$

Стрелка $\widetilde{b}$ индуцирует стрелку $\operatorname{Det}(\widetilde{b}) : \operatorname{Det} V \to \operatorname{Det} V^*$.

Например, пусть $A = \mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Z}^2$, $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, где (e_1, e_2) – стандартный базис V, а (x_1, x_2) – двойственный базис V^*. Тогда

$$b(a_1e_1 + a_2e_2, c_1e_1 + c_2e_2) = 2a_1c_1 + a_1c_2 + a_2c_1 + 2a_2c_2.$$

Пара (V, b) является пространством с симметрической билинейной формой, но не является пространством с внутренним произведением (см. [12]), так как f и b вырождаются по модулю 3.

2.1.3. *Дискриминант квадратичного модуля.* Пусть (V, f) – квадратичный модуль, b – соответствующая билинейная форма, $\widetilde{b}$ указана в (8). По определению

$$\operatorname{disc} f = \operatorname{Det}(\widetilde{b}) \in (\operatorname{Det} V^*)^{\otimes 2}.$$

Отметим, что даже в случае $A = \mathbb{Z}$ нет естественной тривиализации $(\operatorname{Det} V^*)^{\otimes 2}$. У этого модуля две тривиализации и ни одна из них не является предпочтительной. Поэтому дискриминант квадратичного модуля нельзя естественно измерить числом. Однако если выбран какой-то ненулевой элемент $\omega \in \operatorname{Det}(V^*)^{\otimes 2}$ (рациональная ориентация), то можно говорить о числе $\operatorname{disc}(f)/\omega$. Например, для $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ в базисах (e_1, e_2) и (e_1^*, e_2^*) получаем

$$\widetilde{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \operatorname{disc} f = 3(e_1^* \wedge e_2^*)^{\otimes 2}.$$

2.2. Унитарные структуры. A-алгебру B хотелось бы назвать унитарной в том случае, когда свойства пары (B, A) похожи на свойства пары $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$. В частности, на B должна быть инволюция. Покажем, однако, что все необходимые данные возникают автоматически при следующем определении: унитарной A-алгеброй назовем плоскую конечную A-алгебру ранга 2.

2.2.1. *Проективность B/A.* Пусть B – плоская конечная A-алгебра ранга 2. Тогда

$$B/A \text{ – проективный } A\text{-модуль.} \tag{9}$$

Утверждение вытекает из того, что

$$A\text{-модуль } B \text{ локально по } A \text{ имеет базис, содержащий } 1. \tag{10}$$

Проверим (10). Пусть A – локально, μ – максимальный идеал A. Над полем A/μ дополним 1 до базиса $B/\mu B$. Поднимем этот базис в B, причем 1 поднимем в 1. Утверждается, что таким образом мы получим базис B как A-модуля. В самом деле, выбранный набор b_1, b_2 индуцирует стрелку $u : A^2 \to B$. По лемме Накаямы u – эпиморфизм и точна последовательность $0 \to M \to A^2 \to B \to 0$, где $M = \operatorname{Ker} u$. Ввиду плоскости B точна и последовательность $0 \to M/\mu M \to (A/\mu)^n \to B/\mu B \to 0$. Правая стрелка – изоморфизм по построению. Поэтому $M = \mu M$. По нетеровости M конечно порожден и по лемме Накаямы $M = 0$. Таким образом, (10) доказано.

2.2.2. *След, норма и инволюция.* Пусть B – плоская конечная A-алгебра ранга 2. Нам потребуются след и норма

$$\mathrm{Tr} : B \to A, \quad \mathrm{Nrm} : B^\times \to A^\times.$$

Небольшое затруднение с их определением связано с тем, что B может не иметь базиса. Норму можно определить так:

$$\mathrm{Nrm}(b) = \mathrm{Det}(b) \otimes \mathrm{Det}(B)^{-1} \in A.$$

След определен, например, в [15, p. 124]. При этом локально используется обычное определение с базисом, а глобально все склеивается ввиду естественности. Более инвариантно, но намного более технологично, след определен в [16, III, §6] в рамках теории двойственности Гротендика.

Утверждается, что на A-алгебре B есть инволюция

$$z \mapsto \bar{z}, \text{ такая, что } \mathrm{Tr}(z) = z + \bar{z} \text{ и } \mathrm{Nrm}(z) = z\bar{z}.$$

Действительно, положим $\bar{z} = \mathrm{Tr}(z) - z$. Необходимые свойства можно проверить локально с использованием базиса вида $(1, y)$ (см. 2.2.1).

2.2.3. *Дискриминант B.* С отображением следа связана билинейная форма $t\colon B\times B\to A,\quad t(a,b)=\mathrm{Tr}(ab)$ и соответствующее отображение $\widetilde{t}:B\to B^*$ (см. 2.1.2). Положим

$$\operatorname{disc}B=\operatorname{Det}(\widetilde{t})\otimes\operatorname{Det}B^*\in(\operatorname{Det}B^*)^{\otimes 2}.$$

Например, пусть $B=\mathbb{Z}[\rho]$, $\rho=(1+\sqrt{-3})/2$. Для B^* возьмем базис (x,y), дуальный к $(1,\rho)$. Тогда $\widetilde{t}(1)=2x+y$, $\widetilde{t}(\rho)=x-y$, $(\operatorname{Det}\widetilde{t})(1\wedge\rho)=-3x\wedge y$ и $\operatorname{disc}B=-3(x\wedge y)^2$.

2.2.4. Точна последовательность A-модулей

$$0\to A\to B\xrightarrow{b\mapsto 1\wedge b}\operatorname{Det}B\to 0. \tag{11}$$

Действительно, проективность B/A (см. (2.2.1) и точность последовательности $0\to A\to B\to B/A\to 0$ влекут неканоническую расщепимость $B\simeq A\oplus B/A$. Поэтому проекция $B\to B/A$, $b\mapsto\overline{b}$ индуцирует канонический изоморфизм

$$B/A\xrightarrow{\simeq}\operatorname{Det}B. \tag{12}$$

2.2.5. *Унитарные A-модули.* Унитарным пространством над A назовем тройку (B,W,h), где B – унитарная A-алгебра, W – локально свободный B-модуль конечного ранга, а h – эрмитова форма на W.

При этом под эрмитовой формой мы имеем в виду функцию $h:W\times W\to B$, такая, что h линейна по первому аргументу и $h(z,w)=\overline{h(w,z)}$. Форма h примитивна, если $h\not\equiv 0\pmod{\pi}$ для всякого простого идеала $\pi\subset A$.

Конформным унитарным пространством над A назовем тройку (B,W,l), где B – унитарная A-алгебра, W – локально свободный B-модуль конечного ранга, а l – прямая в A-модуле HF унитарных форм на W. Точнее говоря, $HF=\mathrm{Re}(W^*\otimes_B\overline{W}^*)$ представляет собой проективный A-модуль ранга $(\operatorname{rk}W)^2$, а $l\in\mathbf{P}(HF)(A)$.

Поясним конструкцию из описания HF. С B-модулем T связан B-модуль $\overline{T}$. Это B-модуль получен из T заменой базы $B\to B$, $z\mapsto\overline{z}$. На A-модуле $i_*(T\otimes_B\overline{T})$, где i – структурное вложение $A\to B$, действует инволюция $u\otimes v\mapsto\overline{v}\otimes\overline{u}$. По определению, $\mathrm{Re}(T\otimes_B\overline{T})$ – пространство инвариантов.

Категорию изоморфизмов конформных унитарных пространств ранга n обозначим $\mathcal{C}onfUSpc_n$. Конформной унитарной прямой над A назовем конформное унитарное пространство (B,L,l), где $\operatorname{rk}L=1$. Это определение конформной унитарной прямой избыточно, так как для ранга 1 существует ровно одна прямая l в пространстве эрмитовых форм HF. Таким образом, конформная унитарная прямая не что иное, как просто пара (B, L). При этом B может иметь делители нуля или нильпотенты. Например, случай $B = A[x]/(x^2)$ вполне возможен.

2.3. Линейчатые поверхности. Пусть V – локально свободный A-модуль ранга 2. При описании соответствия Дирихле потребуются некоторые свойства A-схемы $\mathbf{P}(V)$, полученной проективизацией V. Иными словами,

$$\mathbf{P}(V) = \operatorname{Proj} S, \qquad \text{где } S = \operatorname{Sym}(V^*).$$

Если модуль V определен контекстом, то пишем $\mathbf{P}$ вместо $\mathbf{P}(V)$. Пусть $\mathrm{pr} : \mathbf{P} \to X$ – структурная проекция. Непосредственно по определению $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) = (\operatorname{Sym} V^*)^{\sim}$ (см. [13, II, 5]). Утверждается, что

$$H^p\left(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)\right) = \begin{cases} \operatorname{Sym}^n V^*, & \text{если } n \geqslant 0, p = 0; \\ 0, & \text{если } n < 0, p = 0; \\ 0, & \text{если } n \geqslant -1, p = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Кроме того, имеется естественный изоморфизм

$$\operatorname{Det} V \xrightarrow{\simeq} H^1(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)) \tag{14}$$

и для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ умножение

$$H^1(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n-2)) \times H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)) \to H^1(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)) = \operatorname{Det} V \tag{15}$$

является совершенным спариванием.

Уточним (13), указав стрелки справа налево. По построению $M^{\sim}$ имеется стрелка $M \to \Gamma_*(M^{\sim})$ (см. [13, II, 5]). Для $M = \operatorname{Sym}(V^*)$ получаем стрелку $\operatorname{Sym}^d(V^*) \to \mathrm{pr}_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(d)$. Это и есть первая стрелка из (13). Локальная проверка и вычисление когомологий проективных пространств (см. [13, Теор. 5.1]) доказывают (13).

Уточним теперь утверждение (14). Для этого укажем естественную стрелку справа налево. А именно, при $n = 1$ утверждение (13) дает естественный изоморфизм

$$V^* \to \mathrm{pr}_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1). \tag{16}$$

По сопряженности имеется каноническая стрелка

$$\mathrm{pr}^* V^* \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1). \tag{17}$$

Спаривание $V \times V \to \Lambda^2 V$, $(x, y) \to x \wedge y$ индуцирует естественный изоморфизм
$$V \otimes (\operatorname{Det} V)^{-1} \to V^*, \tag{18}$$
где $\operatorname{Det} V = \Lambda^2 V$ (напомним, что в нашем случае $\operatorname{rk} V = 2$). Таким образом, имеется тавтологическая последовательность
$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1) \to \mathrm{pr}^* V \to \operatorname{Det}(V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \to 0, \tag{19}$$
где стрелка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1) \to \mathrm{pr}^* V$ получена дуализацией (17), а стрелка $\mathrm{pr}^* V \to \operatorname{Det}(V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ получена из (17) с учетом подкрутки из (18). Локальная проверка показывает, что последовательность (19) точна.

Для построения стрелки из (14) подкрутим (19) и получим точную последовательность
$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n-2) \to \mathrm{pr}^* V(n-1) \to \operatorname{Det}(V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \to 0.$$
Переход к когомологиям дает граничный гомоморфизм
$$\operatorname{Det}(V) \to H^1(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)).$$
Именно эту стрелку мы и строим. Теперь все стрелки построены. Их обратимость проверяется локально.

Нам потребуется явное описание стрелки $H^1(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)) \to \operatorname{Det}(V)$, обратной к (14). Это описание дано в предположении, что V – свободный A-модуль. Пусть e_1, e_2 – некоторый базис V, а $x_1, x_2 \in V^*$ – двойственный базис V^*. Тогда стрелка, обратная к (14), действует следующим образом:
$$(x_1 x_2)^{-1} \mapsto e_1 \wedge e_2. \tag{20}$$
Здесь левая часть представляет собой 1-коцикл Чеха с коэффициентами в $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)$ для стандартного покрытия $\mathbf{P} = U_1 \cup U_2$ (U_i – дополнение к нулям x_i). Это можно увидеть из [13, с. 292, док-во (c)] и более инвариантного описания комплекса Чеха через комплекс Кошуля.

Из (13), (14) и (15) при $n \geqslant 0$ вытекает, что
$$H^1(\mathbf{P}, \mathcal{O}(-2-n)) \otimes \operatorname{Det} V = (\operatorname{Sym}^n(V^*))^*.$$
Отметим, что правая часть этой формулы, вообще говоря, отличается от $\operatorname{Sym}^n(V)$, так как при $d \geqslant 1$ нет естественного изоморфизма $\operatorname{Sym}^d(V^*)$ и $(\operatorname{Sym}^d V)^*$. Например, при $d \geqslant 2$ естественное спаривание $(uv)(xy) = u(x)v(y) + u(y)v(x)$ вырождено $\pmod 2$, а спаривание $(uv)(xy) = u(x)v(y)$ зависит от порядка сомножителей и не естественно.

2.4. Прямое соответствие Дирихле. Пусть (V, l) – конформная ортогональная плоскость над A (см. 2.1). Мы собираемся построить конформную унитарную прямую (B, L) (см. 2.2.5). Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "p"'] & \mathbf{P} \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\ & X \end{tikzcd}, \tag{21}$$

где $\mathbf{P}$ – проективизация V, схема Y задана набором уравнений $f = 0$ (f пробегает l), а p – структурная проекция. Иными словами, $\mathbf{P} = \operatorname{Proj} S$, $Y = \operatorname{Proj} T$, где $S = \operatorname{Sym}(V^*)$, $T = S/(l)$. Определим прямое соответствие Дирихле следующим образом:

$$B = p_* \mathcal{O}_Y, \quad L = i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1). \tag{22}$$

Покажем, что пара (B, L) представляет собой конформную унитарную прямую. Для этого необходимо и достаточно проверить унитарность B. Это свойство можно проверять локально по A и достаточно рассмотреть случай, когда V, l и QF/l свободны. В этом случае модуль l порожден примитивной квадратичной формой, а конечность и плоскость Y над X легко увидеть с использованием [13, Предл. 9.7].

Так как l – локально свободный A-модуль ранга 1, то $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-идеал, определяющий Y, локально порожден одним элементом и точна последовательность $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-модулей

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to i_* \mathcal{O}_Y \to 0. \tag{23}$$

2.5. Обратное соответствие Дирихле. Предположим, что дана конформная унитарная прямая (B, L). Мы намерены построить пару (V, l), где V – локально свободный A-модуль ранга 2, а l – прямая в пространстве квадратичных форм на V. Для этого положим $Y = \operatorname{Spec} B$ и

$$V = \operatorname{Hom}_A(p_*(L^{-1}), A), \tag{24}$$

где $p : Y \to X$ – структурная проекция. Так как локально $L \simeq B$, то V – проективный A-модуль ранга 2. С учетом этого из определения V вытекает, что

$$V^* = p_*(L^{-1}). \tag{25}$$

Положим $S = \operatorname{Sym}(V^*)$ и $\mathbf{P} = \operatorname{Proj} S$. Пусть $H_n = p_*(L^{-n})$ и $H = \oplus H_n$, где $n \geqslant 0$. Естественный изоморфизм $H_1 = V^*$ из (25) индуцирует стрелку $S \to H$. Эта стрелка, в свою очередь, индуцирует вложение $i : Y \to \mathbf{P}$. Положим

$$l = \{f \in H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(2)) | i^* f = 0\}. \tag{26}$$

2.6. Композиции прямого и обратного соответствий. Покажем, что прямое и обратное соответствия Дирихле осуществляют эквивалентность. Ограничимся построением необходимых стрелок, так как их обратимость легко проверить локально.

Рассмотрим композицию функторов, при которой сначала применяется прямое соответствие Дирихле, а затем обратное. При этом взяты обозначения из 2.4, а результаты конструкций 2.5 снабжены маркером “new”. Таким образом, речь идет о композиции $(V, l) \mapsto (B, L) \mapsto (V_{\text{new}}, l_{\text{new}})$. Отождествим V_{new} и V, l_{new} и l. Сначала заметим, что $Y_{\text{new}} = \operatorname{Spec} B$, а $B = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$. Таким образом, из двойственности между аффинными схемами и кольцами вытекает, что $Y_{\text{new}} = Y$ как схемы над X. Далее, из (23) и (13) вытекает, что $p_*(L^{-1}) = V^*$. С учетом (24) это дает $V_{\text{new}} = V$. Равенство $l_{\text{new}} = l$ вытекает из определений l_{new} (см. (26)) и Y (см. 2.4).

Рассмотрим композицию, где сначала применяют обратное соответствие, а затем прямое. При этом взяты обозначения 2.5, а результаты конструкций из 2.4 снабжены маркером “new”. Итак, речь идет о композиции $(B, L) \mapsto (V, l) \mapsto (B_{\text{new}}, L_{\text{new}})$. Сначала отождествим Y_{new} и Y. Изоморфизм $p_*(H_0) = B$ (см. (25 и ниже)) превращает H в градуированную B-алгебру и, таким образом, индуцирует стрелку $\operatorname{Proj} H \to Y$. По определению $Y_{\text{new}} = \operatorname{Proj} T$ (см. 2.4) и для отождествления $Y_{\text{new}} = Y$ достаточно указать стрелку $T \to H$, индуцирующую при больших n изоморфизм $T_n \to H_n$. Для этого укажем стрелку $S \to H$, аннулирующую l. Это стрелка $\operatorname{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)) \to (\operatorname{pr}_* i_*)(L^{-n})$, полученная по сопряженности i^* и i_*. Для $n \geqslant 1$ получаем изоморфизм $T_n \to p_*(L^{-n})$, а для $n = 0$ структурную стрелку $A \to B$. Таким образом, $Y_{\text{new}} = Y$ и, следовательно, $B = B_{\text{new}}$. Определение L_{new} и отождествление $L^{-1} = i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$, вытекающее из конструкции i, показывают, что $L_{\text{new}} = L$.

2.7. Соответствие Дирихле и вырождения. Мы собираемся сравнить меру вырождения конформной ортогональной плоскости с мерой вырождения соответствующей конформной унитарной прямой. Эти меры принимают значения в множестве эффективных дивизоров на X. Обозначим это множество $\Delta(X)$.

Рассмотрим конформную ортогональную плоскость (V, l). С каждой квадратичной формой f на пространстве V связан ее дискриминант $\operatorname{disc}(f) \in \operatorname{Det}(V^*)^2$ (см. 2.1.3). Если f невырождена над полем частных кольца A, то $\operatorname{disc}(f) \neq 0$ и определен дивизор $\operatorname{div}(\operatorname{disc} f) \in \Delta(X)$. Положим

$$\delta(V, l) = \min \operatorname{div}(\operatorname{disc} f) \in \Delta(X),$$

где при вычислении минимума f пробегает все ненулевые элементы l.

Рассмотрим конформную унитарную прямую (B, L). Положим

$$\delta(B, L) = \operatorname{div}(\operatorname{disc} B) \in \Delta(X),$$

где $\operatorname{disc} B \in (\operatorname{Det} B^*)^2$ (см. 2.2.3).

Теорема 2.7.1. *Если конформную ортогональную плоскость* (V, l) *связана соответствием Дирихле с конформной унитарной прямой* (B, L)*, то*

$$\delta(V, l) = \delta(B, L). \tag{27}$$

Эта теорема вытекает из приведенной ниже теоремы 2.7.2. В теореме 2.7.2 мы намерены уточнить равенство (27) в том случае, когда прямая l порождена одним элементом f. Для этого, однако, предварительно надо научиться мерять одной линейкой дискриминанты f и B. Эта цель достигается отождествлением

$$\operatorname{Det} V = \operatorname{Det} B. \tag{28}$$

Это отождествление устанавливается с помощью (12) и канонического изоморфизма

$$B/A \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Det} V. \tag{29}$$

Изоморфизм (29) получается из точной последовательности когомологий

$$0 \to A \to B \to \operatorname{Det} V \to 0, \tag{30}$$

связанной с (23). При этом значения когомологий взяты из (13).

Отметим также, что последовательность (30) дает элемент в $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\operatorname{Det} V, A)$. Этот элемент важен для более сложных X. В аффинном же случае (30) расщепляется и неканонически $B \simeq A \oplus \operatorname{Det} V$.

Было бы естественно доказывать следующую теорему, используя двойственность Гротендика–Серра на Y/X (для конечного морфизма такая двойственность отдельно рассмотрена в [16, III, §6, p. 164]). Однако пока ограничимся прямым вычислением.

Теорема 2.7.2. *При отождествлении* $\operatorname{Det} B = \operatorname{Det} V$ *(см.* (28)*) верно соотношение*

$$\operatorname{disc} B = -\operatorname{disc} f.$$

Доказательство. Полезно сравнить это доказательство с [11, II, §7, с. 155 и лемма 1]). Рассмотрим f над R, где R – поле частных A. Если $\operatorname{disc} f = 0$, B – не сепарабельна, Tr – вырождена и $\operatorname{disc} B = 0$. Если же $\operatorname{disc} f \neq 0$, то существует такое $\lambda \in R$, что $\operatorname{disc} B = \lambda \operatorname{disc} f$. При этом λ определено однозначно, а не с точностью до $(A^*)^2$ или $(R^*)^2$. Ввиду естественности конструкции можно считать λ для случая $A = R$. В этом случае V – свободен и можно так выбрать его базис e_1, e_2, что $a \in A^*$ в $f = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$. В самом деле, так как дискриминант f обратим, то найдется такой $v \in V$, что $f(v) \neq 0$. Взяв v в качестве e_1, получим $a \neq 0$.

Вычислим изоморфизм (28) явно. Для вычисления B желательно найти аффинную подсхему $\mathbf{P}$, содержащую Y. Так как $a \in A^*$, то подходит U_2. Пусть $u = x_1/x_2$. Тогда

$$A[U_2] = A[u] \quad \text{и} \quad B = A[u]/(au^2 + bu + c).$$

Пусть $\bar{u} = u \mod (au^2 + bu + c)$ – образ u в B. Таким образом, у A-модуля B можно взять базис $(1, \bar{u})$, а $\operatorname{Det} B$ порожден элементом $1 \wedge \bar{u}$. В этом базисе $\operatorname{disc} B = \big((b/a)^2 - 4c/a\big)\,(1^* \wedge \bar{u}^*)/(1 \wedge \bar{u})$, а $1 \wedge \bar{u} \mapsto \overline{\overline{u}}$ при изоморфизме (12).

Вычислим теперь стрелку $B \to \operatorname{Det} V$ из (29). Для этого надо вычислить граничный гомоморфизм δ в последовательности когомологий для $0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0$ (см. (23)). Можно использовать вычеты (см. [16, VII], [15, Rem. 1.14, p. 167]). Проведем, однако, прямое вычисление с комплексом Чеха стандартного покрытия (см. [13, III.4]). Начнем с $\bar{u} \in H^0(\mathbf{P}, i_*\mathcal{O}_Y)$. Этот элемент представлен элементами $u_1 \in H^0(U_1, i_*\mathcal{O}_Y)$, $u_2 \in H^0(U_2, i_*\mathcal{O}_Y)$. Ограничимся рассмотрением случая общего положения, при котором $c \neq 0$ (это так, например, если f неприводима над R). Тогда $1/u \mapsto -(a/c)\bar{u} - (b/c)$ при ограничении $A[U_1] = A[1/u] \to A[u]/(au^2 + bu + c)$ и $u \mapsto \bar{u}$ при ограничении $A[U_2] = A[u] \to A[u]/(au^2 + bu + c)$. Прообразы $\bar{u}$ при этих сужениях: $u_1 = -(c/a)u^{-1} - (b/a) \mapsto \bar{u}$, $u_2 = u \mapsto \bar{u}$. Разность ограничений u_1 и u_2 на $U_1 \cap U_2$, деленная на f, представляет $\delta(\bar{u})$. Получаем формулу для коцикла:

$$\frac{-(c/a)u^{-1} - (b/a) - u}{f} = \frac{(-a^{-1})(cu^{-1} + b + au)}{ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2} = \frac{-1}{ax_1x_2}.$$

В модуле $\operatorname{Det} V$ коциклу $(x_1x_2)^{-1}$ соответствует элемент $e_1 \wedge e_2$ (см. формулу (20)). Поэтому

$$\delta(\bar{u}) = (-a^{-1})e_1 \wedge e_2 \in \operatorname{Det} V.$$

С другой стороны, $e_1 \wedge e_2 \mapsto (4ac - b^2)(e_1^* \wedge e_2^*)$ при стрелке $\operatorname{disc}(f) : \operatorname{Det} V \to \operatorname{Det} V^*$ (это вычисление аналогично примеру из 2.1.3). Для сравнения дискриминантов B и f рассмотрим диаграммы

$$\operatorname{Det} B \leftarrow B/A \to \operatorname{Det} V \quad \text{и} \quad \operatorname{Det} B^* \to (B/A)^* \leftarrow \operatorname{Det} V^*.$$

На уровне элементов они устроены следующим образом:

$$1 \wedge \bar{u} \leftarrow \overline{\overline{u}} \to (-a^{-1})e_1 \wedge e_2$$

и

$$1^* \wedge (\bar{u})^* \to (\overline{\overline{u}})^* \leftarrow -ae_1^* \wedge e_2^*.$$

Теперь мы можем сравнить все значения в B/A:

$$\operatorname{disc}(f)/\operatorname{disc} B = (4ac - b^2)/((b/a)^2 - 4c/a) = -a^2/(-a)^2 = -1. \qquad \square$$

2.8. Классическое соответствие Дирихле. Напомним конструкцию соответствия Дирихле для $A = \mathbb{Z}$, следуя [11, II, §7, п. 5 и т. 4]. Общее соответствие (см. (7)) осуществляет эквивалентность группоидов $\mathcal{C}onf OSpc_2$ и $\mathcal{C}onf USpc_1$. Однако специфика ситуации позволяет пойти дальше и установить эквивалентность группоидов $\mathcal{O}Spc_2$ (см. 2.1) и $\mathcal{U}Spc_1$ (см. 2.2.5):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}Spc_2 \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, "-\operatorname{disc} f"'] & & \mathcal{U}Spc_1 \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, "\operatorname{disc} B"] \\ & \Delta(X) & \end{tikzcd} \qquad (31)$$

А именно, ввиду факториальности $\mathbb{Z}$ прямая квадратичных форм l порождена одним элементом. Если мы интересуемся только случаем определенных форм, то из двух образующих l выберем положительную. Кроме того, равенство $(\mathbb{Z}^*)^2 = \{1\}$ позволяет выбрать каноническую образующую проективного A-модуля ранга 1 вида $L^{\otimes 2}$: достаточно взять квадрат произвольной образующей L. Таким образом, в нашем случае канонически $(\operatorname{Det} V^*)^{\otimes 2} \simeq \mathbb{Z}$. Поэтому можно считать, что дискриминанты квадратичных форм (см. 2.1.3) и соответствующих алгебр (см. 2.2.3) и принимают значения в $\mathbb{Z}$. Еще одна особенность ситуации состоит в том, что дискриминанты различных унитарных алгебр различны. Сформулируем итоговый результат.

Рассматриваются квадратичные формы на $V = \mathbb{Z}^2$. Такая форма представляет собой полином

$$f = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2, \tag{32}$$

где (x_1, x_2) образуют базис V^*, двойственный стандартному базису e_1, e_2 для V. Дискриминантом f в [11] называется число $b^2 - 4ac$. У нас

$$\operatorname{disc} f = 4ac - b^2.$$

Примитивность f означает, что a, b, c взаимно просты в совокупности. Неприводимость f, в том числе и примитивность, означает, что $\operatorname{disc} f \notin (\mathbb{Z}^\times)^2$. Если унитарная прямая представлена парой $(\mathcal{O}_K, I)$, где K – мнимое квадратичное поле, а I – идеал в $\mathcal{O}_K$, то квадратичная форма $f : I \to \mathbb{Q}$ задана формулой

$$f(x) = \frac{\operatorname{Nrm}_{K/\mathbb{Q}} x}{\operatorname{Nrm}_{K/\mathbb{Q}} I},$$

где $\operatorname{Nrm}_{K/\mathbb{Q}} I = [\mathcal{O}_K : I]$. Оказывается, что $f(x) \in \mathbb{Z}$ и f примитивна.

§3. А-модели мнимых квадратичных полей

Следуя [17], будем называть A-геометрией, A-моделями и т. д. то, что могло бы быть названо арифметической, аракеловской или абсолютной геометрией. Далее K – мнимое квадратичное расширение $\mathbb{Q}$, $z \mapsto \bar{z}$ – нетривиальный автоморфизм K, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ – кольцо всех целых элементов K.

3.1. Канонические А-модели линейных расслоений. Линейным расслоением на $\widehat{Y}$ ниже называется пара $\mathcal{L} = (L, |*|)$, где L линейное расслоение на Y, а

$$|*| : L_\infty \to \mathbb{R} \text{ – комплексная норма.}$$

Здесь и далее $L_\infty = K_\infty \otimes_{\mathcal{O}} L$ – векторное пространство над $K_\infty = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} K$, а норма $s \mapsto |s|$ называеся комплексной (см. [5, 2.5.8]), если

$$\|zs\| = z\bar{z}\|s\|, \text{ где } \|s\| = |s|^2.$$

3.1.1. *Подкрутки и $\otimes$-произведение.* Пусть $\mathcal{L} = (L, |*|_{\mathcal{L}})$ – линейное расслоение на $\widehat{Y}$ и $d \in \mathbb{R}$. Будем обозначать $\mathcal{L}(d)$ то, что более точно следовало бы обозначить $\mathcal{L}(d \cdot \infty)$. По определению

$$\mathcal{L}(d) = (L, e^d|*|_{\mathcal{L}}).$$

В частности, определено линейное расслоение $\mathcal{O}(d) = (\mathcal{O}, e^d\sqrt{z\bar{z}})$. Если $\mathcal{L} = (L, |*|_L)$ и $\mathcal{M} = (M, |*|_M)$ – линейные расслоения на Y, то по определению $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} = (L \otimes_{\mathcal{O}} M, |l \otimes m| = |l| \cdot |m|)$. В частности, $\mathcal{L}(d) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(d)$.

3.1.2. *Дивизоры и степени.* Приведем только краткие сведения для согласования нормировок и обозначений. Все это описано, например, в [7]). Как обычно, $\operatorname{Div}\widehat{Y} = \operatorname{Div} Y \oplus \mathbb{R}\cdot\infty$, где $\operatorname{Div} Y$ – свободная абелева группа, порожденная замкнутыми точками Y. Имеется гомоморфизм $\deg : \operatorname{Div}\widehat{Y} \to \mathbb{R}$. Пусть F_P – поле вычетов в точке P. Тогда

$$\deg P = \begin{cases} \log \operatorname{card} F_P, & \text{если } P \in Y; \\ 1, & \text{если } P = \infty. \end{cases}$$

Для линейного расслоения $\mathcal{L}$ на $\widehat{Y}$ и ненулевого рационального сечения L, то есть $s \in K \otimes_{\mathcal{O}} L$, определен дивизор

$$\operatorname{div} s = \sum_{P \in \widehat{Y}} v_P(s) P \in \operatorname{Div}\widehat{Y},$$

где $v_\infty(s) = -\log \|s\|_{\mathcal{L}}$. Также определена степень $\deg \mathcal{L} \in \mathbb{R}$. При этом

$$\deg \mathcal{L} = \deg \operatorname{div} s.$$

Это число не зависит от выбора s. Отметим, что $\deg(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = \deg \mathcal{L} + \deg \mathcal{M}$, а

$$\deg \mathcal{O}(d) = d.$$

Как обычно, $\operatorname{Pic}\widehat{Y}$ – множество классов изоморфизма линейных расслоений на $\widehat{Y}$. Тензорное произведение превращает $\operatorname{Pic}\widehat{Y}$ в группу. Кроме того, для $d \in \mathbb{R}$ по определению $\operatorname{Pic}_d \widehat{Y}$ состоит из классов расслоений степени d.

3.1.3. *Продолжения с Y на $\widehat{Y}$.* Пусть L – линейное расслоение на Y. Если $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ продолжения L на $\widehat{Y}$, то существует и единственное $d \in \mathbb{R}$ такое, что $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1(d)$. Это следствие того, что на одномерном векторном пространстве над $\mathbb{C}$ любые комплексные нормы отличаются вещественным положительным множителем. Более того, если квадраты норм $|*|_1^2$ и $|*|_2^2$ являются $\mathbb{Q}$-значными на L, то $\exp(2d) \in \mathbb{Q}$.

Поэтому операция ограничения $\mathcal{L} \mapsto L$ индуцирует изоморфизм групп

$$\mathrm{Pic}_0(\widehat{Y}) \to \mathrm{Pic}(Y). \tag{33}$$

Таким образом, для линейного расслоения L на Y существует по существу единственное линейное расслоение $\mathcal{L} = (L, |*|)$ на $\widehat{Y}$ такое, что $\deg L = 0$. Опишем его явно.

3.1.4. *Каноническое продолжение линейного расслоения.* Пусть L – линейное расслоение на Y. Обозначим HF множество эрмитовых форм на L (см. [12]). Иными словами,

$$HF = \{hf : L \times L \to \mathcal{O} | hf(u,v) - \text{линейна по } u, \quad hf(u,v) = \overline{hf(v,u)}\}.$$

Из одномерности векторного расслоения L вытекает, что HF – локально свободный (и, следовательно, свободный) $\mathbb{Z}$-модуль ранга один. Следовательно, имеется ровно две образующих HF. Одна из них положительно определена. Обозначим ее hf_0. Рассмотрим на $\widehat{Y}$ линейное расслоение $\widehat{L} = (L, |*|)$, где

$$|l|^2 = hf_0(l,l).$$

Расслоение $\widehat{L}$ назовем каноническим продолжением L. Покажем, что

$$\deg \widehat{L} = 0. \tag{34}$$

Пусть $\tau : K \to K \otimes_{\mathcal{O}} L$ – тривиализация в общей точке. Таким образом, $s = \tau(1)$ – рациональное сечение L. По определению,

$$\mathrm{div}\, s = \sum_{P \in Y} v_P(s)[P] - \log(hf_0(s,s)) \cdot [\infty].$$

Достаточно рассмотреть случай $\tau(\mathcal{O}) \subset L$. Тогда

$$v_P(s) = l_P(L/\tau(\mathcal{O})), \tag{35}$$

где $l_P(N)$ – длина локализации $L/\tau(\mathcal{O})$ в P. Также несложно увидеть, что

$$hf_0(\tau(\lambda), \tau(\lambda)) = \frac{\mathrm{Nrm}(\lambda)}{[L : \mathcal{O}]}, \quad (\lambda \in K). \tag{36}$$

Из (35) и (36) вытекает (34).

3.1.5. *Вычисление* hf_0. Пусть $\mathcal{L} = (L, |*|)$ – линейное расслоение на $\widehat{Y}$, $\deg \mathcal{L} = 0$, V – абелева группа, полученная из L забыванием умножения на $\mathcal{O}$. На $\mathbb{R} \otimes V$ рассмотрим квадратичную форму $v \mapsto |v|^2$. Из 3.1.3 и 3.1.4 вытекает, что эта форма принимает на V значения в $\mathbb{Z}$ и примитивна. Именно эта форма соответствует по Дирихле (см. 2.1) линейному расслоению L над Y. Таким образом, $hf_0(v, v) = |v|^2$ можно вычислить по формуле (36), где $\lambda = \tau^{-1} v$.

3.2. Целые точки в эллипсах. Для линейного расслоения $\mathcal{L} = (L, |*|)$ на $\widehat{Y}$ положим

$$H^0(\widehat{Y}, \mathcal{L}) = \{s \in L | |s| \leqslant 1\}.$$

Пусть $\mu(K)$ – группа всех корней из единицы в K, $m = \operatorname{card} \mu(K)$, $\mathbb{F}_{1^m} = \{0\} \cup \mu(K)$ – моноид с нулем. При желании его можно рассматривать как обобщенное кольцо в смысле [5]. Умножение на $\mathcal{O}_K$ индуцирует на множестве $H^0(\widehat{Y}, \mathcal{L})$ структуру $\mathbb{F}_{1^m}$-модуля. Этот модуль свободен и по определению

$$h^0(\widehat{Y}, \mathcal{L}) = \operatorname{rk}_{\mathbb{F}_{1^m}} H^0(\widehat{Y}, \mathcal{L}).$$

Теорема 3.2.1. *Пусть D – дискриминант K, $\chi : \mathbb{Z}/(D) \to \mathbb{C}$ – характер Дирихле, соответствующий K; $r = \exp(d)$. Тогда*

$$\sum_{\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}_d \widehat{Y}} h^0(\widehat{Y}, \mathcal{L}) = \chi(1) E\left(\frac{r^2}{1}\right) + \chi(2) E\left(\frac{r^2}{2}\right) + \dots$$

Эта формулировка содержит условность: группа Пикара состоит не из расслоений, а из их классов изоморфизма. Таким образом, предполагается, что $\mathcal{L}$ пробегает полную систему представителей. Доказательство этой теоремы приведено ниже. Оно использует следующий результат (см. [8, Теор. 1.2.2]).

Теорема 3.2.2. *Пусть F – конечное расширение $\mathbb{Q}$. Тогда*

$$\operatorname{card}\{M \in \Delta(\mathcal{O}_F) | \operatorname{Nrm} M \leqslant e\} = a_1 E(e) + a_2 E(e/2) + a_3 E(e/3) + \dots, \quad (37)$$

где e – произвольное неотрицательное вещественное число, a_n – коэффициент ряда Дирихле $\zeta_F(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = a_1 \cdot 1^{-s} + a_2 \cdot 2^{-s} + \dots$.

Здесь $\Delta(\mathcal{O}_F)$ – моноид эффективных дивизоров, а Nrm – композиция $\Delta(\mathcal{O}_F) \to \Delta(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}^*$. При этом первая стрелка переводит P в его прямой образ при морфизме $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_F \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, а вторая стрелка переводит $[p]$ в p.

Доказательство теоремы 3.2.1. Сохраним обозначения 3.2.2, причем в качестве F возьмем наше поле K. В этом случае $\zeta_F(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = L(\chi, s)$, $a_i = \chi(i)$ и правая часть (37) превращается в правую часть формулы из теоремы 3.2.1 при $e = r^2$.

Преобразуем теперь левую часть (37):

$$\operatorname{card}\{M | \operatorname{Nrm} M \leqslant r^2\} = \sum_i \operatorname{card}\{M | M \sim L_i \text{ и } \operatorname{Nrm} M \leqslant r^2\} = *,$$

где идеал L_i пробегает полный набор представителей $\operatorname{Pic} Y$. Далее,

$$\begin{aligned} * &= \sum_i \operatorname{card}\{x \in K | xL_i \subset \mathcal{O} \text{ и } \operatorname{Nrm}(xL_i) \leqslant r^2\} \\ &= \sum_i \operatorname{card}\{x \in L_i^{-1} | \operatorname{Nrm}(xL_i) \leqslant r^2\} \\ &= \sum_i \operatorname{card}\{x \in L_i^{-1} | \operatorname{Nrm} x/[\mathcal{O} : L_i^{-1}] \leqslant r^2\} = \sum_i h^0(\widehat{Y}, \widehat{L}_i^{-1}(\log r)). \end{aligned}$$

Так как L_i пробегает полный набор представителей $\operatorname{Pic} Y$, то это же верно и для L_i^{-1}. С учетом (33) получаем левую часть формулы из теоремы 3.2.1. □

Следствие 3.2.3. *Пусть q пробегает полную систему представителей классов эквивалентности бинарных примитивных квадратичных форм дискриминанта D. Тогда*

$$\sum_q \frac{N_q(r) - 1}{m} = \chi(1) E\left(\frac{r^2}{1}\right) + \chi(2) E\left(\frac{r^2}{2}\right) + \dots,$$

где $N_q(r) = \operatorname{card}\{x \in \mathbb{Z}^2 | q(x) \leqslant r^2\}$.

Это утверждение вытекает из теоремы 3.2.1 с учетом соответствичя Дирихле (см. 2.8) и может быть интерпретировано в терминах двумерных расслоениях на $\widehat{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$.

3.2.1. *Пример.*

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}), \quad \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \quad D = -20.$$

Здесь $\operatorname{Pic}\mathcal{O}_K = \{[L_0], [L_1]\}$, где

$$L_0 = \mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\cdot(\sqrt{-5}), \quad L_1 = \mathbb{Z}\cdot 2 + \mathbb{Z}\cdot(1+\sqrt{-5}),$$

$$\operatorname{Nrm}(L_0) = 1, \quad \operatorname{Nrm}(L_1) = 2, \quad \operatorname{Nrm}(x\cdot 1 + y\cdot(\sqrt{-5})) = x^2 + 5y^2,$$

$$\operatorname{Nrm}(x\cdot 2 + y\cdot(1+\sqrt{-5})) = 4x^2 + 4xy + 6y^2.$$

Таким образом,

$$H^0(\widehat{Y}, \widehat{L}_0(\log r)) = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 | x^2 + 5y^2 \leqslant r^2\};$$

$$H^0(\widehat{Y}, \widehat{L}_1(\log r)) = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 | 2x^2 + 2xy + 3y^2 \leqslant r^2\}.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} h^0\left(\widehat{Y}, \widehat{L}_0(\log r)\right) &+ h^0\left(\widehat{Y}, \widehat{L}_1(\log r)\right) \\ &= E\left(\frac{r^2}{1}\right) + E\left(\frac{r^2}{3}\right) + E\left(\frac{r^2}{7}\right) + E\left(\frac{r^2}{9}\right) - E\left(\frac{r^2}{11}\right) \\ &- E\left(\frac{r^2}{13}\right) - E\left(\frac{r^2}{17}\right) + E\left(\frac{r^2}{19}\right) + E\left(\frac{r^2}{21}\right) + E\left(\frac{r^2}{23}\right) \\ &+ E\left(\frac{r^2}{27}\right) + E\left(\frac{r^2}{29}\right) - E\left(\frac{r^2}{31}\right) - \ldots \end{aligned}$$

При этом разложение

$$\begin{aligned} h^0\left(\widehat{Y}, \widehat{L}_0(\log r)\right) &= E(r^2) - E(r^2/2) - E(r^2/3) + E(r^2/4) + 3E(r^2/6) \\ &- E(r^2/7) - E(r^2/8) + 3E(r^2/9) - E(r^2/11) + \ldots \end{aligned}$$

не выглядит примечательным.

3.2.2. Имеются и многомерные обобщения формулы Эйзенштейна. Например,

$$\frac{N(r)-1}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} nE\left(\frac{r^2}{n}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} 8mE\left(\frac{r^2}{8m}\right),$$

где $N(r)$ – число целых точек в четырехмерном шаре радиуса r. Подобные формулы должны существовать и для идеалов, связанных с порядками в алгебрах обобщенных кватернионов. Рассматриваемые при этом квадратичные формы возникают из редуцированной нормы.

К этим вопросам, а также к связям с модулярными формами, авторы намерены вернуться в последующих работах.

3.2.3. В случае арифметических кривых нет никакой версии $H^1(X, V)$, но имеется несколько интересных версий для $h^1(X, V)$ (см. [18] и [19]). С точки зрения работы [5] вместо банаховых норм, заданных, скажем, квадратичными формами, следует иметь дело с банаховыми нормами, единичный шар которых представлен многогранником. Для числа целых точек в многогранниках имеются точные формулы (см. [20]). Эти формулы получены применением теоремы Римана–Роха к линейным расслоениям на торическом многообразии. Есть ли связь этой классической теоремы Римана–Роха с ее арифметическими версиями?

В другом направлении можно было бы подумать о синтезе формул для чисел Тамагавы с классической теоремой Римана–Роха.

Список литературы

1. G. Eisenstein, *Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste.* — J. Für die Reine und Angew. Math., **28** (1844), 246–248.
2. E. Ehrhart, *Sur une problème de géométrie diophantine linéaire.* — J. Für die Reine und Angew. Math., **226** (1967), 1–29.
3. Н. В. Бугаев, *Числовые тождества, находящиеся в связи со свойствами символа E.* — Матем. сб., **1:1** (1866), 1–162.
4. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, *Наглядная геометрия*, 1981.
5. N. Durov, New Approach to Arakelov Geometry, 2007. `arXiv:0704.2030`.
6. M. J. Shai Haran, *Non-additive geometry.* — Comp. Math., **143** (2007), 618–688.
7. L. Szpiro, *La conjectura de Mordell (d'aprѐs G. Faltings).* — Seminaire Bourbaki, 36-e année, No. 619 (1983/1984), 1–21.
8. А. Л. Смирнов, *On exact formulas for the number of integral points.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **413** (2013), 173–182.
9. T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory.* — Springer-Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, 1976.
10. Н. В. Бугаев, *Различные вопросы исчисления $E(x)$.* — Матем. сб., **23:4** (1902).
11. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* — Москва, Наука, 1985.
12. D. Husemoller, J. Milnor, *Symmetric bilinear forms.* — Springer Verlag, 1973.
13. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* — Мир, 1981.
14. Дж. Касселс, А. Фрелих, *Алгебраическая теория чисел.* — Мир, 1969.
15. A. Altman, S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck Duality Theory.* — Lect. Notes Math., **146** (1970).
16. R. Hartshorne, *Residues and Duality.* — Lecture Notes in Math., **20** (1966).
17. Ю. И. Манин, *Новые размерности в геометрии.* — УМН, **39:6**, (240) (1984), 43–73.
18. H. Gillet, B. Mazur, Ch. Soulé, *A Note on a Classical Theorem of Blichfeldt.* — Bull. London Math. Soc., **23**, No. 2 (1991), 131–132.

19. G. van der Geer, R. Shoof, Effectivity of Arakelov divisors and the theta divisor of a number field, 1998. arXiv:math/9802121.
20. S. E. Cappell, J. L. Shaneson, *Genera of algebraic varieties and counting of lattice points*. — Bulletin (New Series) of the AMS, **30**, No. 1 (1994).

Artyushin D. A., Smirnov A. L. Eisenstein formula and Dirihlet correspondence.

We obtain an exact formula for the number of integral points in the system of ellipses related according to Dirichlet with an arbitrary imaginary quadratic field. The relation of this formula to arithmetic Riemann – Roch theorems is discussed. So far it has been known only nine similar formulas. They correspond to the imaginary quadratic fields with the trivial class group.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: artyushinden@gmail.com

Поступило 1 сентября 2018 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru