

Ю. Палий

СЛОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$ НА КОПРИСОЕДИНЕННЫЕ ОРБИТЫ

ВВЕДЕНИЕ

Коприсоединенное действие группы Ли G на пространстве $\mathfrak{g}^*$, двойственном пространству $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ [1], расслаивает $\mathfrak{g}^*$ на орбиты Ω . Задание структуры слоения подразумевает определение его тривиализации [2]. Это можно сделать вводя расслаивающую систему координат, в которой часть координат параметризует слой (орбиту Ω), а другая часть параметризует пространство слоев (пространство $\mathcal{O}$ орбит). Поскольку для алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ следы степеней произвольного элемента $\mathcal{X}$

$$t_k = \text{Trace}(\mathcal{X}^k), \quad 2 \leq k \leq n, \quad (0.1)$$

являются инвариантами коприсоединенного действия, они параметризуют пространство $\mathcal{O}$ орбит¹. Найти параметры ϕ_i , $i = 1, \dots, \dim \Omega$ на орбите Ω можно из условия, чтобы они были инвариантны относительно сдвигов вдоль векторных полей из пространства, нормального к касательному пространству орбиты Ω . Инвариантность означает равенство нулю производных Ли параметров ϕ_i вдоль векторных полей [3]. В качестве указанных полей можно взять поля χ_k , $2 \leq k \leq n$, дуальные относительно формы Киллинга 1-формам – дифференциалам следов t_k . Приравняв нулю производные Ли

$$\mathcal{L}_{\chi_k} \phi_i = 0 \quad (0.2)$$

можно получить однородную систему уравнений в частных производных первого порядка для определения параметров ϕ_i . Коэффициенты системы представляют собой полиномиальные функции координат на $\mathfrak{g}^*$. Интегрирование системы (0.2) является проблемой уже для $\mathfrak{sl}^*(3, \mathbb{R})$, общих методов решения таких систем не существует.

Ключевые слова: алгебра Ли, коприсоединенная орбита, слоение, производная Ли, инварианты.

¹В работе мы будем рассматривать только регулярные орбиты, отвечающие полупростым элементам алгебры.

Однако к решению системы (0.2) можно подойти как к поиску инвариантов группы, для которой векторные поля χ_k являются инфинитезимальными генераторами. Эта группа есть ни что иное как максимальный тор группы Ли G [4], но действие его нелинейное, поэтому известные алгоритмы [5] не применимы.

В данной работе предлагается следующий подход к поиску решений системы (0.2). Симметрией системы является коприсоединенное действие группы Ли G , поскольку векторные поля ζ_i , $i = 1, \dots, \dim \Omega$, касательные к орбите Ω , коммутируют с нормальными полями χ_k . В таком случае теория группового анализа дифференциальных уравнений [6] рекомендует использовать инварианты однопараметрических подгрупп, отвечающих векторным полям ζ_i . Оказалось (смотри ниже), что часть этих инвариантов, которые, кстати, не сложно найти, удовлетворяет определенным уравнениям из системы (0.2). Инварианты представляли из себя однородные многочлены, все слагаемые которых имели один и тот же вес [7]. Это позволило найти полиномиальные решения системы (0.2) пользуясь методом предложенным в работе автора [8].

Работа построена следующим образом. В первом пункте приведен наводящий пример, в котором сферические координаты в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ представлены как расслаивающие координаты для слоения $\mathbb{R}^3$ на сферы под действием группы вращения $SO(3)$. Во втором пункте приведена структура касательного пространства слоения $\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$ на коприсоединенные орбиты. В третьем пункте описано нахождение параметров ϕ_i для $\mathfrak{sl}^*(3, \mathbb{R})$. В заключении представлены результаты, возможность их применения и вопросы для дальнейшей работы.

§1. СЛОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^3$ НА СФЕРЫ

Для слоения евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ на орбиты действия группы $SO(3)$, т.е. сферы S^2 , сферическая система координат

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

является тривиализующей (расслаивающей) [2]: радиус r параметризует пространство орбит, в то время как углы ϕ и θ параметризуют

сферу (слой). Инфинитезимальные генераторы вращения

$$\begin{aligned}l_x &= y \partial_z - z \partial_y \\l_y &= z \partial_x - x \partial_z \\l_z &= x \partial_y - y \partial_x\end{aligned}$$

образуют алгебру $\mathfrak{so}(3)$

$$[l_x, l_y] = -l_z, \quad [l_y, l_z] = -l_x, \quad [l_z, l_x] = -l_y.$$

При этом они связаны линейным соотношением с полиномиальными коэффициентами:

$$x l_x + y l_y + z l_z = 0.$$

В сферической системе координат соответствующие векторные поля выражаются лишь через две угловые координаты:

$$\begin{aligned}l_x &= -\sin(\phi) \partial_\theta - \cos(\phi) \cot \theta \partial_\phi \\l_y &= \cos(\phi) \partial_\theta - \sin(\phi) \cot \theta \partial_\phi \\l_z &= \partial_\phi\end{aligned}$$

и задают инволютивное распределение в $\mathbb{R}^3$, которое, согласно теореме Фробениуса, определяют двумерное интегрируемое подмногообразие - сферу S^2 радиуса

$$r(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \quad (1.1)$$

Радиус $r(x, y, z)$ является инвариантом действия группы $SO(3)$ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Поэтому его производные Ли вдоль векторных полей, генерируемых инфинитезимальными операторами, равны нулю,

$$\mathcal{L}_{l_x} r = \mathcal{L}_{l_y} r = \mathcal{L}_{l_z} r = 0$$

что может быть записано в виде свертки дифференциала dr с векторами l_x, l_y, l_z :

$$\langle dr, l_x \rangle = \langle dr, l_y \rangle = \langle dr, l_z \rangle = 0$$

выражающих ортогональность векторов.

Предположим, что мы не знаем сферических координат, а радиус $r(x, y, z)$ (1.1) известен нам как инвариант действия группы $SO(3)$. Поставим теперь вопрос: как найти параметры на орбите - сфере S^2 . Ответ на вопрос дает решение системы (0.2), содержащей единственное

уравнение с производной Ли вдоль векторного поля, определяемого радиусом

$$\chi = \frac{d}{dr} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Такое векторное поле является генератором однородных растяжений [6]. Базис кольца его инвариантов состоит из двух функций, например x/z , y/z . В частности, сферические углы ϕ, θ , рассматриваемые как функции декартовых координат x, y, z ,

$$\cos \phi(x, y, z)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta(x, y, z)^2 = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

также инвариантны относительно растяжений и удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{L}_\chi \phi(x, y, z) = \mathcal{L}_\chi \theta(x, y, z) = 0. \quad (1.3)$$

§2. КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО К $\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$

Разложение касательного пространства на горизонтальное и вертикальное подпространства. Касательное пространство $\mathcal{T}\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$ в точке, соответствующей полупростому элементу алгебры, представляет прямую сумму

$$\mathcal{T}\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R}) = \mathcal{T}\Omega \oplus (\mathcal{T}\Omega)^\perp. \quad (2.1)$$

касательного пространства к орбите $\mathcal{T}\Omega$ и ортогонального ему (относительно формы Киллинга κ) пространства $(\mathcal{T}\Omega)^\perp$. В терминологии теории слоений подпространство $\mathcal{T}\Omega$ называется вертикальным, а подпространство $(\mathcal{T}\Omega)^\perp$ — горизонтальным. Базис подпространства $\mathcal{T}\Omega$ может быть задан следующими векторными полями [1]:

$$\zeta_i = c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i, j, k = 1, \dots, \dim G, \quad (2.2)$$

где c_{ij}^k — это структурные константы алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, а x_k представляют собой координаты на $\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$. В качестве базиса подпространства $(\mathcal{T}\Omega)^\perp$ можно взять векторные поля, отвечающие следовым переменным (0.1):

$$(\chi_k)^i = (\kappa^{-1})^{ij} \left(\frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, \dots, \dim G, \quad (2.3)$$

Векторные поля ζ_i удовлетворяют

$$\dim G - \dim \Omega = \text{rank } G$$

линейным соотношениям и задают представление алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ в $\mathcal{T}\Omega$. Набор векторных полей $\{\chi_k\}$ представляет собой полную систему дифференциальных операторов. Это означает, что система замкнута относительно коммутатора

$$[\chi_i, \chi_j] = h_{ij}^k \chi_k, \quad (2.4)$$

(h_{ij}^k есть функции следовых переменных), и система уравнений (0.2) для параметров $\phi_i(x)$ является полной, т.е. не содержит дополнительно уравнений, определяемых коммутаторами. Число функционально независимых решений равно размерности орбиты Ω .

Взаимная Ли-инвариантность горизонтальных и вертикальных структур слоения. Поля χ_k не меняются при движении вдоль орбит поскольку как следы степеней t_k (0.1), так и форма Киллинга κ инвариантны относительно присоединенного и, следовательно, коприсоединенного действий. Соответственно, коммутаторы полей χ_k с полями ζ_i (и, значит, производные Ли) равны нулю:

$$[\chi_k, \zeta_i] \equiv \mathcal{L}_{\chi_k} \zeta_i = 0 \quad (2.5)$$

Отсюда следует инвариантность системы уравнений (0.2) относительно коприсоединенного действия, которое исчерпывает все симметрии системы.

Сравнение двух слоений: $\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3$. Роль радиуса $r(x, y, z)$, как инварианта действия группы $SO(3)$, играют следы степеней t_k , образующие базис кольца инвариантов коприсоединенного действия. Векторным полям l_x, l_y, l_z , касательным к сферам S^2 , соответствуют векторные поля ζ_i , касательные к орбитам Ω . Нормальное дополнение $(\mathcal{T}\Omega)^\perp$ натянуто на вектор d/dr для сферы и на векторы χ_k для Ω . Аналогами углов сферической системы координат служат параметры ϕ_i на орбите Ω . Наконец, можно отметить, что действие группы $SO(3)$ на пространстве $\mathbb{R}^3$ есть линеаризация присоединенного действия $SO(3)$ на своей алгебре $\mathfrak{so}(3)$.

Пример: алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. В базисе

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

форма Киллинга (метрика Картана)

$$\kappa_{ij} = c_{ik}^l c_{lj}^k, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

имеет вид

$$\kappa = (\kappa_{ij}) = 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Для произвольного элемента алгебры

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} & x \\ y & -\frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

определим инвариант следа как $t_2 = 2\text{Trace}(\mathcal{X}^2) = 4xy + h^2$, который задает горизонтальное векторное поле

$$\chi = x\partial_x + y\partial_y + h\partial_h,$$

соответствующее растяжению как и в случае сферических координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Вертикальные поля имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta_X &= h\partial_y - 2x\partial_h \\ \zeta_Y &= -h\partial_x + 2y\partial_h \\ \zeta_H &= 2(x\partial_x - y\partial_y) \end{aligned}$$

и удовлетворяют соотношению

$$y\zeta_X + x\zeta_Y + h\zeta_H = 0.$$

Система (0.2) сводится к единственному уравнению

$$\mathcal{L}_\chi \phi(x, y, h) = (x\partial_x + y\partial_y + h\partial_h)\phi(x, y, h) = 0,$$

инвариантами которого служат функции x/h , y/h . Отметим соответствие примеров слоения пространства $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{R})$ на коприсоединенные орбиты и слоения пространства $\mathbb{R}^3$ на сферы.

§3. ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ОРБИТ В $\mathfrak{sl}^*(3, \mathbb{R})$

Алгебра $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$. Выберем в алгебре $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ следующий базис:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Для упорядочения генераторов $Y_1, Y_2, Y_3, H_1, H_2, X_1, X_2, X_3$ матрица формы Киллинга κ имеет вид :

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произвольный элемент алгебры записывается в виде

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(h_1 + \frac{1}{3}h_2) & x_1 & x_3 \\ y_1 & \frac{1}{2}(-h_1 + \frac{1}{3}h_2) & \\ y_3 & y_2 & -\frac{1}{3}h_2 \end{bmatrix},$$

где переменные имеют следующие веса:

y_1	x_1	y_2	x_2	y_3	x_3	h_1	h_2
$(-2, 1)$	$(2, -1)$	$(1, -2)$	$(-1, 2)$	$(-1, -1)$	$(1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$

(3.1)

Векторные поля на $\mathfrak{sl}^*(3, \mathbb{R})$. Базис кольца инвариантов коприсоединенного действия образуют следующие функции:

$$t_2 = 6\text{Trace}(\mathcal{X}^2) = 3h_1^2 + h_2^2 + 12(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3), \quad (3.2)$$

$$t_3 = 36\text{Trace}(\mathcal{X}^3) = 9h_1^2h_2 - h_2^3 + 18\left(3h_1(-x_2y_2 + x_3y_3) + h_2(2x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + 6(x_1x_2y_3 + x_3y_1y_2)\right). \quad (3.3)$$

Они определяют векторные поля (2.3):

$$\begin{aligned} \chi_2 = & h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ & + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_3}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \chi_3 = & 2(h_1h_2 + 3(-x_2y_2 + x_3y_3)) \frac{\partial}{\partial h_1} \\ & + (3h_1^2 - h_2^2 + 6(2x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)) \frac{\partial}{\partial h_2} \\ & + 2(h_2x_1 + 3x_3y_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + 2(h_2y_1 + 3x_2y_3) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + (-(3h_1 + h_2)x_2 + 6x_3y_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + (-(3h_1 + h_2)y_2 + 6x_1y_3) \frac{\partial}{\partial y_2} \\ & + ((3h_1 - h_2)x_3 + 6x_1x_2) \frac{\partial}{\partial x_3} + ((3h_1 - h_2)y_3 + 6y_1y_2) \frac{\partial}{\partial y_3}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Наша задача состоит в нахождении инвариантов векторных полей χ_2 , χ_3 , или, что эквивалентно, в решении системы уравнений

$$\mathcal{L}_{\chi_2} \phi(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, h_1, h_2) = 0, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{L}_{\chi_3} \phi(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, h_1, h_2) = 0. \quad (3.7)$$

Вектор χ_2 является генератором растяжения, как и в случае алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, и его инварианты легко указать. Со вектором χ_3 ситуация намного сложнее. Система Maple выдает решение характеристической системы, соответствующей уравнению (3.7), в виде неопределенных интегралов, вывод которых занимает более миллиона строк. Однако оказывается, что инвариантами векторного поля χ_3 являются некоторые из интегралов векторных полей, касательных к коприсоединенным орбитам. Эти интегралы представляют собой небольшие многочлены.

Базис касательного пространства к коприсоединенной орбите образован векторными полями (2.2):

$$\begin{aligned}\zeta_{Y_1} &= -y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 2y_1 \frac{\partial}{\partial h_1} - h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \zeta_{Y_2} &= y_3 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial}{\partial h_1} + 3y_2 \frac{\partial}{\partial h_2} + \frac{h_1 - h_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \zeta_{Y_3} &= y_3 \frac{\partial}{\partial h_1} + 3y_3 \frac{\partial}{\partial h_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{h_1 + h_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \zeta_{H_1} &= -2y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \zeta_{H_2} &= -3y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - 3y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + 3x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 3x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \zeta_{X_1} &= h_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} - 2x_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \zeta_{X_2} &= \frac{-h_1 + h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial h_1} - 3x_2 \frac{\partial}{\partial h_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \zeta_{X_3} &= -x_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{h_1 + h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial h_1} - 3x_3 \frac{\partial}{\partial h_2}.\end{aligned}$$

Независимыми являются только 6 из них, поскольку размерность регулярной орбиты равна разности размерности алгебры и ее картановской подалгебры. Можно убедиться, что нормальные и касательные к орбите векторные поля коммутируют.

Рассмотрим преобразования с параметром a , генерируемые векторным полем ζ_{Y_1} :

$$\begin{aligned}h'_1 &= h_1 + 2ay_1 & x'_1 &= x_1 - ah_1 - a^2y_1 & x'_2 &= x_2 & x'_3 &= x_3 + ax_2 \\ h'_2 &= h_2 & y'_1 &= y_1 & y'_2 &= y_2 - ay_3 & y'_3 &= y_3\end{aligned}$$

Кроме четырех переменных, остающихся неизменными, система Maple находит еще два инварианта второго порядка

$$h_1y_3 + 2y_1y_2, \quad x_2y_2 + x_3y_3,$$

и один третьего,

$$J = h_1y_2y_3 - x_1y_3^2 + y_1y_2^2, \quad (3.8)$$

который оказывается инвариантом также для векторного поля χ_3 . Инвариант J (3.8) представляет собой однородный многочлен степени три с целыми коэффициентами, все мономы которого имеют вес $(0, -3)$.

Это указывает на то, что J может быть найден следуя методу, предложенному в работе [8]. Используем данный метод для построения остальных необходимых инвариантов.

Построение параметров ϕ_i . Суть метода состоит в том, чтобы найти такие целочисленные линейные комбинации мономов данной степени, которые будут инвариантны относительно заданного преобразования. Из переменных $y_1, y_2, y_3, h_1, h_2, x_1, x_2, x_3$ можно составить 120 различных мономов третьей степени. Найдем производные Ли вдоль вектора χ_3 от тех мономов M_i из этого набора, которые имеют некоторый фиксированный вес:

$$\mathcal{L}_{\chi_3} M_i = \Phi_i = \sum_j c_{ij} m_j.$$

Извлечем из всех полученных многочленов Φ_i множество мономов $\{m_j\}$, входящих хотябы в один из Φ_i и соответствующие коэффициенты c_{ij} . Например, для веса $(0, 0)$ существует 12 мономов M_i и 23 монома m_j .

Далее составим линейную комбинацию мономов M_i с неизвестными коэффициентами λ_i . Чтобы эта комбинация была инвариантом относительно действия χ_3 необходимо чтобы равнялась нулю соответствующая комбинация $\sum_i \lambda_i \Phi_i$:

$$\mathcal{L}_{\chi_3} \left(\sum_i \lambda_i M_i \right) = \sum_i \lambda_i \Phi_i = \sum_j \left(\sum_i \lambda_i c_{ij} \right) m_j = 0.$$

В итоге нахождение инварианта сводится к решению линейной однородной системы из j уравнений

$$\sum_i \lambda_i c_{ij} = 0 \quad (3.9)$$

с целыми коэффициентами. На практике система всегда получается переопределенной, поскольку степень мономов m_j выше степени мономов M_i , и соответственно их число оказывается больше.

В ходе решения систем уравнений типа (3.9) получено 20 инвариантов для действия χ_3 . Распределение найденных инвариантов по весам приведено в таблице 1, где в правой колонке указано число инвариантов для каждого веса в данной строке.

Веса		Число инвариантов каждого веса
(0,0)		2
(0,-3)	(0,3)	1
(-1,2)	(1,-2)	2
(-1,-1)	(1,1)	2
(-2,1)	(2,-1)	2
(-3,3)	(3,-3)	1
(-3,0)	(3,0)	1

Таблица 1. Распределение инвариантов по весам.

Поскольку уравнение (3.7) имеет 7 независимых решений, встает задача выбора семи алгебраически независимых инвариантов из 20 найденных. Это было сделано с помощью вычисления базиса Грёбнера с дополнительными переменными e_i , $i = 1, \dots, 20$ (slack variables) [5], которые просто добавляются к каждому инварианту в качестве слагаемого. Базис Грёбнера, вычисленный системой Maple в мономиальном упорядочении

$$\text{Lexdeg}([y_1, y_2, y_3, h_1, h_2, x_1, x_2, x_3], [e_1, \dots, e_{20}])$$

за время, меньшее секунды, содержит 301 элемент. 62 элемента являются многочленами только от переменных e_i и являются сизигиями между соответствующими инвариантами. Размерность Гильберта идеала сизигий равна числу независимых решений уравнения (3.7), то есть семи.

Число алгебраически независимых инвариантов среди построенных может быть также найдено как ранг матрицы Грама градиентов γ_k к поверхностям уровня для каждого инварианта I_k , $k = 1, \dots, 20$ [9].

Градиенты вычисляются аналогично векторным полям χ_k (2.3),

$$(\gamma_k)^i = (\kappa^{-1})^{ij} \left(\frac{\partial I_k}{\partial x_j} \right), \quad k = 1, \dots, 20 \quad i, j = 1, \dots, 8 \quad (3.10)$$

Элементы Γ_{ij} матрицы Грама представляют собой свертки градиентов с помощью формы Киллинга:

$$\Gamma_{ab} = \kappa_{ij} (\gamma_a)^i (\gamma_b)^j, \quad a, b = 1, \dots, 20 \quad i, j = 1, \dots, 8.$$

Коприсоединенное действие, инфинитезимальными генераторами которого являются вертикальные поля $\zeta_{Y_1}, \dots, \zeta_{X_3}$, сохраняет идеал инвариантов. Это следует из того, что все производные Ли от инвариантов по этим полям выражаются опять через инварианты из найденного набора.

В качестве алгебраически независимых можно выбрать инварианты, приведенные в таблице 2. В последней колонке указаны генераторы алгебры, чьи вертикальные поля сохраняют данный инвариант.

	Вес	Инвариант	Генераторы
1	(0,-3)	$h_1 y_2 y_3 - x_1 y_3^2 + y_1 y_2^2$	Y_1, Y_2, Y_3, H_1, X_1
2	(-2,1)	$-h_1 x_2 y_3 + y_1 (-x_2 y_2 + x_3 y_3)$	Y_1, H_2
3	(-3,-3)	$(h_1 + h_2) x_2 y_1 + 2x_2^2 y_3 - 2x_3 y_1^2$	Y_1, X_2
4	(-3,0)	$(-h_1 + h_2) y_1 y_3 + 2x_2 y_3^2 - 2y_1^2 y_2$	Y_1, X_2
5	(2,-1)	$h_1 x_2 x_3 - y_1 x_3^2 + x_1 x_2^2$	Y_1, X_2
6	(3,3)	$-h_1 y_2 x_3 + x_1 (-x_2 y_2 + x_3 y_3)$	X_1, H_2
7	(3,3)	$(h_1 + h_2) y_2 x_1 + 2y_2^2 x_3 - 2y_3 x_1^2$	Y_2, Y_3, X_1, X_3

Таблица 2. Алгебраически независимые инварианты.

Таким образом, общее решение системы (3.6), (3.7) для параметров на коприсоединенной орбите задается рациональными функциями от

инвариантов из таблицы 2, в которых степени числителя и знаменателя равны. Например, взяв отношения первых шести инвариантов к седьмому,

$$J_k = I_k/I_7, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (3.11)$$

получим требуемое число параметров для регулярной орбиты, имеющей размерность 6.

Отметим некоторые свойства векторных полей для параметров J_k (3.11), построенных аналогично векторным полям χ_k (2.3). Во-первых, они разлагаются по вертикальным полям $\zeta_{Y_1}, \dots, \zeta_{X_3}$, касательным к коприсоединенным орбитам. Ранг матрицы коэффициентов полей равен 6. Значит, они также составляют базис касательного пространства к орбитам. Из сказанного следует, что производные Ли от функций следа t_2, t_3 (3.2), (3.3) вдоль этих полей равны нулю. Однако, в отличие от вертикальных полей, векторные поля для параметров J_k не коммутируют с горизонтальными полями χ_k (2.3) и при этом не коммутируют друг с другом. Значит, они не образуют системы координат в отличие от сферической системы координат в $\mathbb{R}^n$. Возникает задача абелизации совместной системы векторных полей χ_k и полей для параметров J_k .

§4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема тривиализации слоения пространства $\mathfrak{g}^*$ на коприсоединенные орбиты требует выбора параметров ϕ_i на орбите Ω . Система уравнений для определения параметров ϕ_i , получается приравнянием нулю их производных Ли $\mathcal{L}_{\chi_k} \phi_i$ относительно сдвигов вдоль горизонтальных векторных полей χ , нормальных к касательному пространству $\mathcal{T}\Omega$. Формула (2.3) для полей χ_k может быть использована для любой полупростой алгебры, имеющей, по определению, невырожденную форму Киллинга.

На примере $\mathfrak{sl}^*(3, \mathbb{R})$ показана возможность решения системы, используя ее симметрии, с помощью построения инвариантов преобразований, генерируемых векторными полями χ . Построение сводится к решению однородной системы линейных уравнений.

Интересным представляется определить группу, для которой поля χ являются инфинитезимальными генераторами, и построить ее представление на пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Известно, что многообразие, трансверсальное слоению алгебры Ли на присоединенные орбиты, есть ни что иное как картановская подалгебра [4]. Отсюда возникает вопрос о нахождении коммутирующего набора горизонтальных векторных полей χ .

Наконец отметим, что знание параметров ϕ_i дает возможность строить сечение слоения аналогично выбору канонического сечения расслоения путем фиксации некоторой калибровки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Кириллов, *Лекции по методу орбит*. Новосибирск, Научная книга (2002).
2. P. Molino, *Riemannian Foliations*, Birkäuser Boston (1988).
3. J. A. Schouten, *Ricci Calculus*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1954).
4. P. M. Michor, *Topics in differential geometry*, AMS (2008).
5. B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*. 2nd edition, Springer-Verlag (2008).
6. Н. Х. Ибрагимов, *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности*. Нижний Новгород, издательство Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского (2007).
7. J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, N.-Y., Inc. (1978).
8. Yu. Palii, *A method for construction of Lie group invariants*. — J. Math. Sci. **200**, No. 6 (2014), 725–733.
9. M. Abud, G. Sartori, *The geometry of orbit-space and natural minima of Higgs potentials*. — Phys. Lett. B **104** (1981), 147–152.

Palii Yu. Foliation of the space $\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$ on coadjoint orbits.

A method for the construction of parameters on coadjoint orbits in $\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$ is suggested. The method is based on the fact that the parameters are invariant with respect to the action of vector fields normal relative to the Killing form to the tangent space of an orbit. The construction of parameters is reduced to the solution of a homogeneous system of linear equations.

Отдел теоретической физики
Институт Прикладной Физики
Кишинев, Молдова;
Лаборатория информационных технологий
Объединенный Институт Ядерных Исследований
Дубна, Россия
E-mail: palii@jinr.ru

Поступило 11 сентября 2018 г.