Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

В. В. Корняк

АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ПОМОЩЬЮ ИНВАРИАНТНЫХ ПРОЕКТОРОВ

§1. Введение

Разложение линейных представлений групп на неприводимые подпредставления является одной из основных задач теории групп и её приложений в физике. В общем случае, проблема расщепления модуля над ассоциативной алгеброй на неприводимые компоненты весьма нетривиальна. Достаточно полный обзор алгоритмов для решения этой проблемы можно найти в [1]. Наиболее эффективным в настоящее время считается вероятностный алгоритм типа Лас-Вегас, называемый ***MeatAxe*** [2]. Одним из главных элементов алгоритма является вычисление характеристического полинома случайно порождённой матрицы модуля с последующей факторизацией этого полинома. Обработка неприводимых множителей характеристического полинома в случае успеха позволяет либо построить разложение модуля на подмодули, либо доказать его неприводимость (подробное описание алгоритма ***MeatAxe*** приведено в разделе 7.4 книги [1]). Алгоритм ***MeatAxe*** сыграл важную роль в решении проблемы классификации конечных простых групп, где он применялся к представлениям групп в линейных пространствах над малыми конечными полями (типично над GF(2)). Однако ***MeatAxe*** неэффективен для представлений над полями нулевой характеристики из-за быстрого роста числовых коэффициентов при вычислении характеристических полиномов для матриц большой размерности и из-за того, что в нулевой характеристике случайно сгенерированная матрица с большой вероятностью имеет простой характеристический полином, бесполезный для работы ***MeatAxe***.

Ключевые слова: конечная группа, перестановочное представление, неприводимое представление, инвариантная билинейная форма, вычислительная теория групп.

В основе квантового формализма лежат гильбертовы пространства над полями нулевой характеристики. Традиционно используются неконструктивные поля $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Нашей целью была разработка алгоритма, пригодного для исследования квантово-механических моделей, основанных на унитарных представлениях конечных групп над конструктивными полями нулевой характеристики [3, 4]. Компьютерная реализация нашего алгоритма, назовём его ***IrreducibleProjectors***, расщепляет представления размерностей до сотен тысяч, что не уступает размерностям достижимым для ***MeatAxe*** в вычислительно более лёгком контексте конечных полей. С другой стороны, алгоритм ***IrreducibleProjectors***, в отличие от ***MeatAxe***, мало применим в задачах с конечными полями, поскольку он использует понятие скалярного произведения. В пространствах над конечными полями введение скалярного произведение, позволяющего беспрепятственно провести вычисления до конца, потребует выполнения ряда арифметических ограничений на характеристику поля. Фактически алгоритмы ***MeatAxe*** и ***IrreducibleProjectors*** имеют различные области применения.

Для работы алгоритма ***IrreducibleProjectors*** необходимо знание централизаторного кольца рассматриваемого представления группы. В общем случае вычисление централизаторного кольца сводится к несложной задаче линейной алгебры, а именно, к решению системы матричных уравнений вида $AX = XA$. Мы будем рассматривать здесь только перестановочные представления поскольку (a) любое линейное представление конечной группы является подпредставлением некоторого перестановочного и (b) перестановочные представления лежат в основе упомянутых выше конструктивных квантово-механических моделей. В случае перестановочных представлений вычисление централизаторного кольца особенно просто: оно сводится к построению орбит группы на декартовом квадрате множества, на котором группа действует перестановками.

§2. Основные понятия и обозначения

Пусть G (или, более подробно, $\mathsf{G}(\Omega)$) – группа перестановок, действующая *транзитивно* на множестве $\Omega \cong \{1, \ldots, \mathsf{N}\}$. Действие $g \in \mathsf{G}$ на $i \in \Omega$ будем обозначать символом i^g. *Перестановочным представлением* P называется представление G матрицами вида $\mathrm{P}(g)_{ij} = \delta_{i^g j}$. Поскольку $\mathrm{P}(g)$ является $(0, 1)$-матрицей, перестановочное представление можно реализовать в векторном пространстве над любым полем $\mathcal{F}$.

Мы будем предполагать, что пространством представления является N-мерное гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathsf{N}}$, а полем скаляров $\mathcal{F}$ является некоторое конструктивное *расщепляющее поле* для группы G. В качестве $\mathcal{F}$ можно выбрать подходящее подполе m-го циклотомического поля, где m — *экспонента* группы G. Такое поле $\mathcal{F}$, будучи абелевым расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, является конструктивным плотным подполем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. С точки зрения физики $\mathcal{F}$ неотличимо от $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и может свободно использоваться в формализме квантовой механики.

Орбита G на декартовом квадрате $\Omega \times \Omega$ называется *орбиталом* [5]. Число орбиталов R называется *рангом* группы перестановок $\mathsf{G}(\Omega)$. Если множество орбиталов содержит некоторый орбитал Δ, то оно обязательно содержит транспонированный к нему орбитал Δ^{T}. Множество орбиталов транзитивной группы содержит единственный *диагональный* орбитал $\Delta_1 = \{(i,i) \mid i \in \Omega\}$, который мы всегда будем фиксировать, как первый элемент в списке орбиталов $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_{\mathrm{R}}\}$. Для транзитивных групп существует естественное взаимно-однозначное соответствие между орбиталами и орбитами стабилизатора (произвольной) точки i, т.е., подгруппы $\mathsf{G}_i \leqslant \mathsf{G}$ такой, что $g \in \mathsf{G}_i \Rightarrow i^g = i$. Соответствие между орбиталом Δ и орбитой стабилизатора Σ_i имеет вид: $\Delta \leftrightarrow \Sigma_i = \{j \in \Omega \mid (i,j) \in \Delta\}$.

Мы будем называть орбиты стабилизатора *подорбитами*. Заметим, что размеры орбиталов и подорбит связаны соотношением $|\Delta| = \mathsf{N}\,|\Sigma_i|$.

Условие инвариантности билинейной формы A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathsf{N}}$ выражается уравнениями $A = \mathrm{P}(g)\,A\mathrm{P}\big(g^{-1}\big)\,,\ g \in \mathsf{G}$. В компонентах эти уравнения имеют вид $(A)_{ij} = (A)_{i^g j^g}$, из чего следует, что базис всех инвариантных билинейных форм находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством орбиталов. Именно, каждому орбиталу $\Delta_r \in \{\Delta_1, \ldots, \Delta_{\mathrm{R}}\}$ соответствует *базисная матрица* $\mathcal{A}_r$ размера $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ с компонентами

$$(\mathcal{A}_r)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) \in \Delta_r\,, \\ 0, & \text{если } (i,j) \notin \Delta_r\,. \end{cases}$$

Матрицы $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{\mathrm{R}}$ образуют также базис *централизаторного кольца* (*централизаторной алгебры*) перестановочного представления

P. Таблица умножения для этого базиса имеет вид

$$\mathcal{A}_p\mathcal{A}_q = \sum_{r=1}^{\mathrm{R}} C_{pq}^{r}\mathcal{A}_r, \tag{1}$$

где коэффициенты C_{pq}^{r} являются натуральными числами, лежащими в пределах $0 \leqslant C_{pq}^{r} < \mathsf{N}$. Централизаторное кольцо *коммутативно* тогда и только тогда, когда представления P *не содержит кратных* подпредставлений.

Для реализации алгоритма и организации вывода результатов вычислений требуется ввести некоторое упорядочение базисных элементов централизаторного кольца

$$\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_2 \prec \ldots \prec \mathcal{A}_{\mathrm{R}}. \tag{2}$$

Мы используем следующие соглашения:

(1) $\mathcal{A}_r \prec \mathcal{A}_s$, если $|\Delta_r| < |\Delta_s|$ (или, эквивалентно, $|(\Sigma_i)_r| < |(\Sigma_i)_s|$ — сравнение длин подорбит),

(2) $\mathcal{A}_r \prec \mathcal{A}_s$, если $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_r^{\mathrm{T}} \wedge \mathcal{A}_s \neq \mathcal{A}_s^{\mathrm{T}}$ (среди матриц с одинаковыми длинами подорбит симметричные матрицы предшествуют асимметричным),

(3) $\mathcal{A}_r \prec \mathcal{A}_s$, если $I_{\mathcal{A}_r} < I_{\mathcal{A}_s}$, где $I_X = \min\left(i \mid (X)_{i1} = 1\right)$ (сравнение позиций первого ненулевого элемента в первых столбцах матриц),

(4) если $\mathcal{A}_r \neq \mathcal{A}_r^{\mathrm{T}}$, то $\mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{A}_r^{\mathrm{T}}$ (спаренные матрицы всегда помещаются рядом, а внутри пары автоматически работает правило 3).

Применение правил 1 — 4 в указанном порядке однозначно определяет последовательность (2). Согласно этим правилам, матрица диагонального орбитала является первым элементом списка (2): $\mathcal{A}_1 = \mathbb{1}_{\mathsf{N}}$.

§3. Описание алгоритма

Пусть T — унитарная (мы всегда можем обеспечить унитарность) матрица преобразования, расщепляющая перестановочное представление P в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathsf{N}}$ на M неприводимых компонент:

$$T^{-1}\mathrm{P}(g)\,T = 1 \oplus \mathsf{U}_{d_2}(g) \oplus \cdots \oplus \mathsf{U}_{d_m}(g) \oplus \cdots \oplus \mathsf{U}_{d_M}(g)\,,$$

где U_{d_m} — d_m-мерное неприводимое подпредставление, $\oplus$ обозначает прямую сумму матриц, т.е., $A \oplus B = \mathrm{diag}(A, B)$.

Стандартное *скалярное произведение* в гильбертовом пространстве в любом ортонормальном базисе представляется единичной матрицей $\mathbb{1}_{\mathsf{N}}$. В расщепляющем базисе мы имеем следующее разложение для скалярного произведения

$$\mathbb{1}_{\mathsf{N}} = \mathbb{1}_{d_1=1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{1}_{d_m} \oplus \cdots \oplus \mathbb{1}_{d_M} . \tag{3}$$

Здесь $\mathbb{1}_{d_1=1} = \left(1\right)$ — скалярное произведение в одномерном тривиальном подпредставлении, которое всегда присутствует в любом перестановочном представлении. Прообраз разложения (3) в исходном перестановочном базисе имеет вид

$$\mathbb{1}_{\mathsf{N}} = \mathcal{B}_1 + \cdots + \mathcal{B}_m + \cdots + \mathcal{B}_M, \tag{4}$$

где $\mathcal{B}_m$ определяется соотношением

$$T^{-1}\mathcal{B}_m T = \mathbb{0}_{1+d_2+\cdots+d_{m-1}} \oplus \mathbb{1}_{d_m} \oplus \mathbb{0}_{d_{m+1}+\cdots+d_M} \equiv \mathcal{D}_m. \tag{5}$$

Из этого соотношения видно, что матрицы $\mathcal{B}_m$ *идемпотентны*

$$\mathcal{B}_m^2 = \mathcal{B}_m \tag{6}$$

и *взаимно ортогональны*

$$\mathcal{B}_m \mathcal{B}_{m'} = \mathbb{0}_{\mathsf{N}} \text{ если } m \neq m'. \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) вместе с условием *полноты* (4) означают, что множество $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_M$ является *полной системой взаимно ортогональных проекторов* в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathsf{N}}$.

Множество *неприводимых иваριантных* проекторов $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_M$ содержит полную информацию о разложении представления Р на неприводимые компоненты. Например, матрицу преобразования T можно вычислить, решая систему линейных уравнений

$$\mathcal{B}_1 T - T\mathcal{D}_1 = \cdots = \mathcal{B}_M T - T\mathcal{D}_M = \mathbb{0}_{\mathsf{N}} .$$

Любой инвариантный проектор является решением уравнения

$$X^2 - X = \mathbb{0}_{\mathsf{N}}, \tag{8}$$

где $X = x_1\mathcal{A}_1 + \cdots + x_{\mathrm{R}}\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$ — инвариантная билинейная форма общего вида, записанная в базисе (2). Воспользовавшись таблицей умножения (1) и разложив (8) на компоненты в базисе (2), мы получаем систему R квадратных уравнений для R неизвестных $x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}$

$$E(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}) = 0 \sim \{E_1(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}) = 0, \ldots, E_{\mathrm{R}}(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}) = 0\} . \tag{9}$$

Мы будем называть левые части этих уравнений *полиномами идемпотентности*. Неприводимый инвариантный проектор $\mathcal{B}_m$ в базисе (2) имеет вид

$$\mathcal{B}_m = b_{m,1}\mathcal{A}_1 + b_{m,2}\mathcal{A}_2 + \cdots + b_{m,\mathrm{R}}\mathcal{A}_{\mathrm{R}}, \tag{10}$$

где вектор $B_m = [b_{m,1}, \ldots, b_{m,\mathrm{R}}]$ является решением системы уравнений (9). Поскольку след матрицы — инвариант преобразования подобия, из соотношения (5) следует равенство

$$\operatorname{tr}\mathcal{B}_m = d_m. \tag{11}$$

Комбинируя это равенство с тем, что в разложении (10) только $\mathcal{A}_1$ имеет ненулевые диагональные элементы и $\operatorname{tr}\mathcal{A}_1 = \mathsf{N}$, мы можем зафиксировать первый коэффициент в (10):

$$b_{m,1} = d_m/\mathsf{N}.$$

Таким образом, возможными значениями x_1 в (9) являются рациональные числа d/N для некоторых размерностей $d \in [1, \ldots, \mathsf{N}-1]$. Любое натуральное d, при котором полиномиальная система (9) имеет решение, является либо неприводимой размерностью d_m либо суммой таких размерностей. Условие ортогональности (7) позволяет исключить из рассмотрения размерности, не являющиеся неприводимыми. В общем виде условие ортогональности можно написать в виде

$$BX = 0, \tag{12}$$

где $B = b_1\mathcal{A}_1 + \cdots + b_{\mathrm{R}}\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$. Уравнение (12) представляет собой систему линейных относительно переменных $x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}$ уравнений с параметрами $b_1, \ldots, b_{\mathrm{R}}$. С помощью таблицы умножения (1) левую часть уравнения (12) можно представить в виде системы R билинейных форм

$$O(b_1, \ldots, b_{\mathrm{R}}; x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}) = \begin{Bmatrix} O_1(b_1, \ldots, b_{\mathrm{R}}; x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}), \\ \vdots \\ O_{\mathrm{R}}(b_1, \ldots, b_{\mathrm{R}}; x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}) \end{Bmatrix}, \tag{13}$$

которые мы будем называть *полиномами ортогональности*.

Основная часть алгоритма организована в виде цикла, начинающегося с $d = 1$ и оканчивающегося, когда сумма неприводимых размерностей достигает значения N. Текущая размерность d обрабатывается следующим образом:

(1) Решается система уравнений

$$E(d/\mathsf{N}, x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}) = 0. \tag{14}$$

При этом (без существенных дополнительных вычислений) определяется гильбертова размерность h соответствующего полиномиального идеала. Решение всегда реализуемо алгоритмически, поскольку все корни системы принадлежат абелевым расширениям кольца рациональных чисел. Современные системы компьютерной алгебры, в частности ***Maple***, хорошо справляются с этой задачей.

(2) Если система (14) несовместна, то текущее значение d не является неприводимой размерностью и выполняется переход в цикле к следующему значению d.

(3) Если гильбертова размерность $h = 0$ и система (14) имеет k решений, то мы получаем k (различных, если $k > 1$) d-мерных неприводимых подпредставлений.

(4) Размерность полиномиального идеала $h > 0$ означает, что имеется d-мерная неприводимая компонента нетривиальной кратности k. Соответствующая компонента централизаторной алгебры имеет структуру произведение Кронекера $A \otimes \mathbb{1}_d$, где A — произвольная матрица размера $k \times k$. Из условия идемпотентности

$$(A \otimes \mathbb{1}_d)^2 = A \otimes \mathbb{1}_d,$$

выделяющего проектор, следует ограничение на матрицу A:

$$A^2 - A = 0. \tag{15}$$

Полное семейство решений этого уравнения[1] представляет собой многообразие размерности $h = \lfloor k^2/2 \rfloor$. Отсюда кратность можно вычислить, зная гильбертову размерность: $k = \left\lceil \sqrt{2h} \right\rceil$.

Далее с помощью некоторой процедуры из семейства эквивалентных d-мерных проекторов выбираются k произвольных, но взаимно ортогональных представителей.

(5) Каждый из k неприводимых проекторов, полученных в пунктах 3 или 4 обрабатывается следующим образом. Проектор $\mathcal{B}_m$ добавляется к списку неприводимых проекторов. Соответствующее инвариантное подпространство исключается из дальнейшего рассмотрения добавлением полиномов ортогональности

[1]Хорошо известно, что любое решение матричного уравнения (15) можно представить в виде $A = Q^{-1}(\mathbb{1}_r \oplus \mathbb{0}_{k-r})\,Q$, где Q произвольная обратимая матрица размера $k \times k$, а r — произвольное натуральное число в пределах $0 \leqslant r \leqslant k$.

$\mathcal{B}_m X$ к множеству полиномов (9):

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}) \leftarrow E(x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}) \cup \{\mathcal{B}_m X\}\,.$$

(6) После описанной в (5) обработки всех k неприводимых проекторов текущей размерности d выполняется переход к следующей потенциальной размерности.

Алгоритм ***IrreducibleProjectors*** реализован в виде двух процедур, называемых ***PreparePolynomialData*** и ***SplitRepresentation***.

(1) Процедура ***PreparePolynomialData*** реализована в виде программы на языке ***Cи***. Входными данными для ***PreparePolynomialData*** является множество перестановок, порождающих группу $\mathsf{G}(\Omega)$. Программа вычисляет базис централизаторного кольца (2), таблицу умножения (1), конструирует полиномы идемпотентности (9) и ортогональности (13). Затем программа конструирует код процедуры ***SplitRepresentation***. Этот код учитывает особенности конкретных задач. В частности, если централизаторное кольцо некоммутативно, то в разложении присутствуют кратные подпредставления, для обработки которых генерируются дополнительные функции.

(2) Программа ***SplitRepresentation*** представляет собой код на языке ***Maple***, сгенерированный программой ***PreparePolynomialData***. Эта программа выполняет описанный выше цикл по размерностям. Системы полиномиальных уравнений обрабатываются с помощью функций из пакета ***Groebner***, реализованного в системе ***Maple***.

Более подробно алгоритмы, их реализации и сопутствующие технические детали описаны в [6].

§4. Вычисления

Приведем примеры вычислений с помощью программ ***PreparePolynomialData*** и ***SplitRepresentation***. Входные данные (перестановки, порождающие представления) взяты из раздела "Sporadic groups" Атласа представлений конечных групп [7]. Этот раздел содержит подразделы, соответствующие традиционной систематизации спорадических простых групп: "Mathieu groups", "Leech lattice groups", "Monster sections" и "Pariahs". Помимо представлений простых групп, Атлас содержит представления связанных с ними расширений. А именно, если группа G имеет нетривиальную

(1) вторую группу гомологий $H_2(\mathsf{G},\mathbb{Z})$, называемую *мультипликатором Шура* и обозначаемую символом $\mathrm{M}(\mathsf{G})$, то существуют нетривиальные центральные расширения G с помощью подгрупп $\mathrm{M}(\mathsf{G})$.
(2) группу внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}(\mathsf{G})$, то существуют нетривиальные расширения, в которых G является нормальным делителем.

Произвольное расширение группы B с помощью группы A будет обозначаться как $A.B$, а разложимое расширение, т.е., полупрямое произведение — как $A \rtimes B$. Согласно сокращению, принятому в Атласе, циклические группы C_n, входящие в расширения, будут обозначаться их порядком n.

В приводимых далее выражениях для разложений представлений, неприводимые компоненты будут обозначаться их размерностями в жирном шрифте (возможно, с дополнительными индексами для различения неэквивалентных подпредставлений одной и той же размерности). Перестановочные представления обозначаются их размерностью с подчёркиванием. Неприводимые проекторы будут обозначаться символом $\mathcal{B}_{\mathbf{m}}$, где $\mathbf{m}$ — соответствующей неприводимое подпредставление.

Вычисления проводились на персональном компьютере с процессором 3.30GHz Intel Core i3 2120 и оперативной памятью 16 GB.

4.1. Подробный пример. Рассмотрим подробно на компактном примере выходные данные, производимые программами ***PreparePolynomialData*** и ***SplitRepresentation***.

Группа Хельда He, принадлежащая подразделу “Monster sections” Атласа, имеет следующие основные свойства:

$$\mathrm{Ord}(He)=4030387200=2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 17, \mathrm{M}(He)\cong 1, \mathrm{Out}(He)\cong \mathsf{C}_2.$$

Программа ***PreparePolynomialData***, применённая к 8330-мерному представлению этой группы, помимо генерации кода программы ***SplitRepresentation*** и входных данных для неё, выдаёт следующий текст:

```
___Action of He on 8330 points
Rank of He_on_8330: 7
Dimension: 8330
```

```
Suborbit lengths: 1, 105, 720, 840, 840’, 1344, 4480.
Centralizer ring is commutative
=> permutation representation is multiplicity free
___Total time: 2.93 sec
___Technical information
Orbital matrices space: 57.9 MB
Orbital path space    : 35.6 MB
Total orbital space   : 93.5 MB
Maximum number of polynomial terms: 217
```

Этот текст содержит информацию о ранге представления, длинах подорбит (штрихом помечена длина подорбиты второго из взаимно транспонированных орбиталов), наличии или отсутствии кратных подпредставлений, а также о времени и памяти, затраченных для решения задачи.

Программа ***SplitRepresentation*** выдаёт следующее разложение

$$\underline{\mathbf{8330}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{51} \oplus \overline{\mathbf{51}} \oplus \mathbf{680} \oplus \mathbf{1275} \oplus \mathbf{1920} \oplus \mathbf{4352}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{1}} = \frac{1}{8330}\left(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_6 + \mathcal{A}_7\right)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{51}} = \frac{3}{490}\left(\mathcal{A}_1 + \frac{\mathcal{A}_2}{3} - \frac{\mathcal{A}_3}{6} - \frac{1-\mathbf{i}\sqrt{7}}{12}\mathcal{A}_4 - \frac{1+\mathbf{i}\sqrt{7}}{12}\mathcal{A}_5 + \frac{\mathcal{A}_6}{6}\right)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{680}} = \frac{4}{49}\left(\mathcal{A}_1 + \frac{\mathcal{A}_2}{5} + \frac{\mathcal{A}_3}{120} + \frac{\mathcal{A}_4}{20} + \frac{\mathcal{A}_5}{20} - \frac{\mathcal{A}_7}{40}\right)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{1275}} = \frac{15}{98}\left(\mathcal{A}_1 + \frac{\mathcal{A}_2}{15} + \frac{\mathcal{A}_3}{15} - \frac{\mathcal{A}_4}{30} - \frac{\mathcal{A}_5}{30}\right)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{1920}} = \frac{192}{833}\left(\mathcal{A}_1 - \frac{2\mathcal{A}_2}{15} + \frac{\mathcal{A}_3}{120} + \frac{\mathcal{A}_4}{120} + \frac{\mathcal{A}_5}{120} + \frac{5\mathcal{A}_6}{192} - \frac{3\mathcal{A}_7}{320}\right)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{4352}} = \frac{128}{245}\left(\mathcal{A}_1 - \frac{\mathcal{A}_3}{48} - \frac{\mathcal{A}_6}{64} + \frac{\mathcal{A}_7}{128}\right)$$

```
Time: 1.4 sec
```

Здесь **51** и $\overline{\mathbf{51}}$ — различные комплексно сопряжённые представления размерности 51.

4.2. Сравнение с реализацией *MeatAxe* в *Magma*. Реализация алгоритма ***MeatAxe*** в системе компьютерной алгебры ***Magma*** считается одной из лучших. В базе данных ***Magma*** содержится 3906-мерное перестановочное представление исключительной группы лиевского типа $G_2(5)$. Разложение этого представления на неприводимые компоненты над полем GF(2) приводится в [8] для иллюстрации возможностей ***MeatAxe***.

В результате применения наших программ к этому представлению мы получаем следующие данные:

Rank: 4. Suborbit lengths: $1, 30, 750, 3125$.

$$\underline{\mathbf{3906}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{930} \oplus \mathbf{1085} \oplus \mathbf{1890}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\mathbf{1}} &= \frac{1}{3906}\sum_{k=1}^{4}\mathcal{A}_k\\
\mathcal{B}_{\mathbf{930}} &= \frac{5}{21}\left(\mathcal{A}_1 + \frac{3}{10}\mathcal{A}_2 + \frac{1}{50}\mathcal{A}_3 - \frac{1}{125}\mathcal{A}_4\right)\\
\mathcal{B}_{\mathbf{1085}} &= \frac{5}{18}\left(\mathcal{A}_1 - \frac{1}{5}\mathcal{A}_2 + \frac{1}{25}\mathcal{A}_3 - \frac{1}{125}\mathcal{A}_4\right)\\
\mathcal{B}_{\mathbf{1890}} &= \frac{15}{31}\left(\mathcal{A}_1 - \frac{1}{30}\mathcal{A}_2 - \frac{1}{30}\mathcal{A}_3 + \frac{1}{125}\mathcal{A}_4\right)
\end{aligned}$$

Time **C**: 0.5 sec. Time **Maple**: 0.8 sec.
Мы видим, что в нулевой характеристике представление расщепляется над полем $\mathbb{Q}$.

Расщепить это представление над $\mathbb{Q}$ с помощью ***Magma*** не удаётся из-за исчерпания памяти после длительной работы компьютера. Однако можно воспроизвести тот же набор размерностей неприводимых компонент, что и в случае нулевой харктеристики, если расщепить представление над конечным полем с характеристикой не делящей порядок группы. В данном случае $|G_2(5)| = 5859000000 = 2^6\cdot3^3\cdot5^6\cdot7\cdot31$. Поэтому наименьшим полем, “моделирующим” $\mathbb{Q}$ в указанном смысле, является GF(11). Приведём сессию соответствующего вычисления с помощью ***Magma*** (время вычислений выводится в секундах).

```
> load "g25";
Loading "/opt/magma.21-1/libs/pergps/g25"
The Lie group G( 2, 5 ) represented as a permutation
group of degree 3906.
```

```
Order: 5 859 000 000 = 2^6 * 3^3 * 5^6 * 7 * 31.
Group: G
> time Constituents(PermutationModule(G,GF(11)));
[
    GModule of dimension 1 over GF(11),
    GModule of dimension 930 over GF(11),
    GModule of dimension 1085 over GF(11),
    GModule of dimension 1890 over GF(11)
]
Time: 282.060
```

4.3. Некоторые вычисления для спорадических групп. Мы постарались для полноты выбрать примеры из обоих семейств спорадических групп (“Парии” и “Счастливое Семейство”) и из всех поколений “Счастливого Семейства”. Не все разделы Атласа имеют достаточно представительные наборы данных, поэтому среди приведённых ниже примеров, помимо результатов решения трудных задач, имеются почти тривиальные.

Результаты вычислений, приведённые в этом разделе, содержат информацию о рангах, длинах подорбит, структурах разложений на неприводимые компоненты и временах вычислений. Для краткости мы опустили явные выражения для неприводимых проекторов, которые могут быть довольно громоздкими. Выражение ℓ^m в списке длин подорбит означает, что имеется m подорбит длины ℓ. Неэквивалентные неприводимые компоненты одинаковой размерности отличаются, либо символом комплексного сопряжения (надчёркиванием), либо греческими индексами, либо индексами $\pm$, означающими, что имеется две компоненты, имеющие структуру $A \pm B$. Для отличия одномерных представлений от тривиального используются штрихи. Кратные подпредставления объединены фигурными скобками снизу. Времена работы программ ***PreparePolynomialData*** и ***SplitRepresentation*** указаны отдельно.

4.3.1. *Группы Матьё.* Пять групп Матьё M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23} и M_{24} являются первыми открытыми спорадическими группами. Каждая группа M_n изоморфна кратно транзитивной группе перестановок n объектов. Среди всех групп Матьё только M_{12} и M_{22} имеют нетривиальные мультипликатор Шура и группу внешних автоморфизмов.

Наиболее интересными с точки зрения структуры разложений являются расширения группы M_{22}.
Основные свойства группы M_{22}:

$$\mathrm{Ord}(M_{22}) = 443520 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,\ \mathrm{M}(M_{22}) \cong \mathsf{C}_{12},\ \mathrm{Out}(M_{22}) \cong \mathsf{C}_2.$$

(1) 990-мерное представление группы $3.M_{22}$

Rank: 13. Suborbit lengths: $1^3, 7^3, 42^3, 168^3, 336$.

$$\underline{\mathbf{990}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{21}_\alpha \oplus \mathbf{21}_\beta \oplus \overline{\mathbf{21}_\beta} \oplus \mathbf{55} \oplus \mathbf{99}_\alpha \oplus \mathbf{99}_\beta \oplus \overline{\mathbf{99}_\beta} \oplus \mathbf{105}_+ \oplus \overline{\mathbf{105}_+} \oplus \mathbf{105}_- \oplus \overline{\mathbf{105}_-} \oplus \mathbf{154}$$

Time **C**: 1 sec. Time **Maple**: 28 sec.

(2) 2016-мерное представление группы $3.M_{22}$

Rank: 16. Suborbit lengths: $1^3, 55^3, 66^3, 165^4, 330^3$.

$$\underline{\mathbf{2016}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{21}_\alpha \oplus \mathbf{21}_\beta \oplus \overline{\mathbf{21}_\beta} \oplus \mathbf{55} \oplus \mathbf{105}_+ \oplus \overline{\mathbf{105}_+} \oplus \mathbf{105}_- \oplus \overline{\mathbf{105}_-} \oplus \mathbf{154} \oplus \mathbf{210}_\alpha \oplus \mathbf{210}_\beta \oplus \overline{\mathbf{210}_\beta} \oplus \mathbf{231}_\alpha \oplus \mathbf{231}_\beta \oplus \overline{\mathbf{231}_\beta}$$

Time **C**: 2 sec. Time **Maple**: 1 h 15 min 52 sec.

(3) 1980-мерное представление группы $6.M_{22}$

Rank: 17. Suborbit lengths: $1^6, 14^3, 84^3, 336^5$.

$$\underline{\mathbf{1980}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{21}_\alpha \oplus \mathbf{21}_\beta \oplus \overline{\mathbf{21}_\beta} \oplus \mathbf{55} \oplus \mathbf{99}_\alpha \oplus \mathbf{99}_\beta \oplus \overline{\mathbf{99}_\beta} \oplus \mathbf{105}_+ \oplus \overline{\mathbf{105}_+} \oplus \mathbf{105}_- \oplus \overline{\mathbf{105}_-} \oplus \mathbf{120} \oplus \mathbf{154} \oplus \mathbf{210} \oplus \mathbf{330} \oplus \overline{\mathbf{330}}$$

Time **C**: 1 sec. Time **Maple**: 6 h 34 min 14 sec.

4.3.2. *Группы решётки Лича.*
Группа Хигмана-Симса HS. Основные свойства:

$$\mathrm{Ord}(HS) = 44352000 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11,\ \mathrm{M}(HS) \cong \mathsf{C}_2,\ \mathrm{Out}(HS) \cong \mathsf{C}_2.$$

(1) 5600-мерное представление группы HS

Rank: 9. Suborbit lengths: $1, 55, 132, 165, 495, 660, 792, 1320, 1980$.

$$\underline{\mathbf{5600}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{22} \oplus \mathbf{77} \oplus \mathbf{154} \oplus \mathbf{175} \oplus \mathbf{770} \oplus \mathbf{825} \oplus \mathbf{1056} \oplus \mathbf{2520}$$

Time **C**: 2 sec. Time **Maple**: 2 sec.

(2) 11200-мерное представление группы $2.HS$

Rank: 16. Suborbit lengths: $1^2, 110, 132^2, 165^2, 660^2, 792^2, 990, 1320^2, 1980^2$.

$$\underline{\mathbf{11200}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{22} \oplus \mathbf{56} \oplus \mathbf{77} \oplus \mathbf{154} \oplus \mathbf{175} \oplus \mathbf{176} \oplus \overline{\mathbf{176}} \oplus \mathbf{616} \oplus \overline{\mathbf{616}}$$
$$\oplus \mathbf{770} \oplus \mathbf{825} \oplus \mathbf{1056} \oplus \mathbf{1980} \oplus \overline{\mathbf{1980}} \oplus \mathbf{2520}$$

Time **C**: 7 sec. Time **Maple**: 1 h 25 min 47 sec.

(3) 1100-мерное представление группы $HS \rtimes 2$

Rank: 5. Suborbit lengths: $1, 28, 105, 336, 630$.

$$\underline{\mathbf{1100}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{77} \oplus \mathbf{154} \oplus \mathbf{175} \oplus \mathbf{693}$$

Time **C**: < 1 sec. Time **Maple**: < 1 sec.

(4) 1408-мерное представление группы $2.HS.2$

Rank: 11. Suborbit lengths: $1^4, 50^4, 350^2, 504$.

$$\underline{\mathbf{1408}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{1'} \oplus \mathbf{22}_+ \oplus \mathbf{22}_- \oplus \mathbf{175}_+ \oplus \mathbf{175}_- \oplus \mathbf{308} \oplus \underbrace{\mathbf{352} \oplus \mathbf{352}}$$

Time **C**: < 1 sec. Time **Maple**: 3 sec.

Группа Янко J_2. Основные свойства:

$$\mathrm{Ord}(J_2) = 604800 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7,\ \mathrm{M}(J_2) \cong \mathsf{C}_2,\ \mathrm{Out}(J_2) \cong \mathsf{C}_2.$$

1800-мерное представление группы J_2

Rank: 18. Suborbit lengths: $1, 14^2, 21, 28, 42^3, 84^3, 168^6, 336$.

$$\underline{\mathbf{1800}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{36} \oplus \underbrace{\mathbf{63} \oplus \mathbf{63}} \oplus \underbrace{\mathbf{126} \oplus \mathbf{126}} \oplus \mathbf{160} \oplus \mathbf{175} \oplus \mathbf{288} \oplus \underbrace{\mathbf{336} \oplus \mathbf{336}}$$

Time **C**: 2 sec. Time **Maple**: 13 min 29 sec.

Группа Конвея Co_1. Основные свойства:

$\mathrm{Ord}(Co_1) = 4157776806543360000 = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
$\mathrm{M}(Co_1) \cong \mathsf{C}_2,\ \mathrm{Out}(Co_1) \cong 1.$

98280-мерное представление группы Co_1

Rank: 4. Suborbit lengths: $1, 4600, 46575, 47104$.

$$\underline{\mathbf{98280}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{299} \oplus \mathbf{17250} \oplus \mathbf{80730}$$

Time **C**: 43 min 12 sec. Time **Maple**: 6 sec.

Примечание. Программа ***PreparePolynomialData*** использует для этой задачи более 8.8 GB памяти.
Группа Конвея Co_2. Основные свойства:

$\mathrm{Ord}(Co_2) = 42305421312000 = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$\mathrm{M}(Co_2) \cong 1,\ \mathrm{Out}(Co_2) \cong 1.$

4600-мерное представление группы Co_2

Rank: 5. Suborbit lengths: $1^2, 891^2, 2816$.

$$\underline{\mathbf{4600}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{23} \oplus \mathbf{275} \oplus \mathbf{2024} \oplus \mathbf{2277}$$

Time **C**: < 1 sec. Time **Maple**: < 1 sec.
Группа Конвея Co_3. Основные свойства:

$\mathrm{Ord}(Co_3) = 495766656000 = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$\mathrm{M}(Co_3) \cong 1,\ \mathrm{Out}(Co_3) \cong 1.$

48600-мерное представление группы Co_3

Rank: 8. Suborbit lengths: $1, 253, 506, 1771, 7590, 8855, 14168, 15456$.

$$\underline{\mathbf{48600}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{23} \oplus \mathbf{253} \oplus \mathbf{275} \oplus \mathbf{2024} \oplus \mathbf{5544} \oplus \mathbf{8855} \oplus \mathbf{31625}$$

Time **C**: 2 min 17 sec. Time **Maple**: 2 sec.
Группа МакЛафлина McL. Основные свойства:

$$\mathrm{Ord}(McL) = 898128000 = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11, \mathrm{M}(McL)$$

$$\cong \mathsf{C}_3, \mathrm{Out}(McL) \cong \mathsf{C}_2.$$

(1) 22275-мерное представление (a) группы McL

Rank: 13. Suborbit lengths: $1, 112, 140, 210, 420, 672, 1680^2, 2240, 3360^3, 5040$.

$$\underline{\mathbf{22275}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{22} \oplus \underbrace{\mathbf{252} \oplus \mathbf{252}} \oplus \underbrace{\mathbf{1750} \oplus \mathbf{1750}} \oplus \mathbf{3520} \oplus \mathbf{5103} \oplus \mathbf{9625}$$

Time **C**: 23 sec. Time **Maple**: 11 sec.

(2) 66825-мерное представление группы $3.McL$

Rank: 14. Suborbit lengths: $1^3, 630, 2240^3, 5040^3, 8064^3, 20160$.

$$\underline{\mathbf{66825}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{252} \oplus \mathbf{252} \oplus \mathbf{1750} \oplus \mathbf{2772} \oplus \overline{\mathbf{2772}} \oplus \mathbf{5103}_\beta \oplus \overline{\mathbf{5103}_\beta}$$
$$\oplus \mathbf{5103}_\alpha \oplus \mathbf{5544} \oplus \mathbf{6336} \oplus \overline{\mathbf{6336}} \oplus \mathbf{8064} \oplus \overline{\mathbf{8064}} \oplus \mathbf{9625}$$

Time **C**: 8 min 45 sec. Time **Maple**: 12 min 59 sec.

(3) 22275-мерное представление (a) группы $McL \rtimes 2$

Rank: 11. Suborbit lengths: $1, 112, 210, 420, 1120, 1260, 2520^2, 3360, 4032, 6720$.

$$\underline{\mathbf{22275}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{22} \oplus \underbrace{\mathbf{252} \oplus \mathbf{252}} \oplus \mathbf{1750}_\alpha \oplus \mathbf{1750}_\beta \oplus \mathbf{3520} \oplus \mathbf{5103} \oplus \mathbf{9625}$$

Time **C**: 23 sec. Time **Maple**: 5 sec.

Группа Судзуки Suz. Основные свойства:

$\mathrm{Ord}(Suz) = 448345497600 = 2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$\mathrm{M}(Suz) \cong \mathsf{C}_6$, $\mathrm{Out}(Suz) \cong \mathsf{C}_2$.

(1) 32760-мерное представление группы Suz

Rank: 6. Suborbit lengths: $1, 891, 1980, 2816, 6336, 20736$.

$$\underline{\mathbf{32760}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{143} \oplus \mathbf{364} \oplus \mathbf{5940} \oplus \mathbf{12012} \oplus \mathbf{14300}$$

Time **C**: 54 sec. Time **Maple**: 2 sec.

(2) 65520-мерное представление группы $2.Suz$
Rank: 10. Suborbit lengths: $1^2, 891^2, 2816^2, 3960, 12672, 20736^2$.

$$\underline{\mathbf{65520}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{143} \oplus \mathbf{364}_\alpha \oplus \mathbf{364}_\beta \oplus \overline{\mathbf{364}_\beta} \oplus \mathbf{5940} \oplus \mathbf{12012} \\ \oplus \mathbf{14300} \oplus \mathbf{16016} \oplus \overline{\mathbf{16016}}$$

Time **C**: 6 min 9 sec. Time **Maple**: 11 sec.

(3) 98280-мерное представление группы $3.Suz$
Rank: 14. Suborbit lengths: $1^3, 891^3, 2816^3, 5940, 19008, 20736^3$.

$$\underline{\mathbf{98280}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{78} \oplus \overline{\mathbf{78}} \oplus \mathbf{143} \oplus \mathbf{364} \oplus \mathbf{1365} \oplus \overline{\mathbf{1365}} \oplus \mathbf{4290} \oplus \overline{\mathbf{4290}} \\ \oplus \mathbf{5940} \oplus \mathbf{12012} \oplus \mathbf{14300} \oplus \mathbf{27027} \oplus \overline{\mathbf{27027}}$$

Time **C**: 57 min 58 sec. Time **Maple**: 6 min 42 sec.

Примечание. Программа ***PreparePolynomialData*** использует для этой задачи более 17.6 GB памяти, что выходит за пределы оперативной памяти нашего компьютера и приводит к замедлению вычислений из-за использования дисковой памяти.

(4) 1782-мерное представление группы $Suz \rtimes 2$

Rank: 3. Suborbit lengths: $1, 416, 1365$.

$$\underline{\mathbf{1782}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{780} \oplus \mathbf{1001}$$

Time **C**: < 1 sec. Time **Maple**: < 1 sec.

(5) 5346-мерное представление группы $3.Suz \rtimes 2$

Rank: 5. Suborbit lengths: $1, 2, 416, 832, 4095$.

$$\underline{\mathbf{5346}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{132} \oplus \mathbf{780} \oplus \mathbf{1001} \oplus \mathbf{3432}$$

Time **C**: 1 sec. Time **Maple**: < 1 sec.

4.3.3. *Другие подгруппы и подфакторы Монстра (Monster sections).* Основные свойства группы Хельда He и результаты вычислений для её представления размерности 8330 приведены в разделе 4.1.

(1) 29155-мерное представление группы He

Rank: 12. Suborbit lengths: $1, 90, 120, 384, 960^2, 1440, 2160, 2880^2, 5760, 11520$.

$$\underline{\mathbf{29155}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{51} \oplus \overline{\mathbf{51}} \oplus \mathbf{680} \oplus \underbrace{\mathbf{1275} \oplus \mathbf{1275}} \oplus \mathbf{1920} \oplus \mathbf{4352}$$
$$\oplus \mathbf{7650} \oplus \mathbf{11900}$$

Time **C**: 42 sec. Time **Maple**: 11 sec.

(2) 8330-мерное представление группы $He \rtimes 2$

Rank: 6. Suborbit lengths: $1, 105, 720, 1344, 1680, 4480$.

$$\underline{\mathbf{8330}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{102} \oplus \mathbf{680} \oplus \mathbf{1275} \oplus \mathbf{1920} \oplus \mathbf{4352}$$

Time **C**: 3 sec. Time **Maple**: 1 sec.

Группа Фишера Fi_{22}. Основные свойства:

$\mathrm{Ord}(Fi_{22}) = 64561751654400 = 2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$\mathrm{M}(Fi_{22}) \cong \mathsf{C}_6,\ \mathrm{Out}(Fi_{22}) \cong \mathsf{C}_2$.

(1) 61776-мерное представление группы Fi_{22}

Rank: 4. Suborbit lengths: $1, 1575, 22400, 37800$.

$$\underline{\mathbf{61776}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{3080} \oplus \mathbf{13650} \oplus \mathbf{45045}$$

Time **C**: 10 min 6 sec. Time **Maple**: 3 sec.

(2) 28160-мерное представление группы $2.Fi_{22}$

Rank: 5. Suborbit lengths: $1^2, 3159^2, 21840$.

$$\underline{\mathbf{28160}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{352} \oplus \mathbf{429} \oplus \mathbf{13650} \oplus \mathbf{13728}$$

Time **C**: 39 sec. Time **Maple**: 2 sec.

(3) 56320-мерное представление группы $2.Fi_{22} \rtimes 2$

Rank: 9. Suborbit lengths: $1^2, 728, 1080^2, 3159^2, 21840, 25272$.

$$\underline{\mathbf{56320}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}' \oplus \mathbf{352} \oplus \overline{\mathbf{352}} \oplus \mathbf{429}_+ \oplus \mathbf{429}_- \oplus \mathbf{13650}_+ \oplus \mathbf{13650}_- \oplus \mathbf{27456}$$

Time **C**: 3 min 20 sec. Time **Maple**: 5 sec.
Группа Фишера Fi_{23}. Основные свойства:

$\mathrm{Ord}(Fi_{23}) = 4089470473293004800 = 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
$\mathrm{M}(Fi_{23}) \cong 1,\ \mathrm{Out}(Fi_{23}) \cong 1.$

31671-мерное представление группы Fi_{23}

Rank: 3. Suborbit lengths: $1, 3510, 28160$.

$$\underline{\mathbf{31671}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{782} \oplus \mathbf{30888}$$

Time **C**: 52 sec. Time **Maple**: 1 sec.

4.3.4. *Парии.*
Группа Янко J_1. Основные свойства:

$$\mathrm{Ord}(J_1) = 175560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19,\ \mathrm{M}(J_1) \cong 1,\ \mathrm{Out}(J_1) \cong 1.$$

1045-мерное представление группы J_1

Rank: 11. Suborbit lengths: $1, 8, 28, 56^3, 168^5$.

$$\underline{\mathbf{1045}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{56}_+ \oplus \mathbf{56}_- \oplus \mathbf{76} \oplus \mathbf{77}_+ \oplus \mathbf{77}_- \oplus \mathbf{120}_\alpha \oplus \mathbf{120}_\beta \oplus \mathbf{120}_\gamma \oplus \mathbf{133} \oplus \mathbf{209}$$

Time **C**: < 1 sec. Time **Maple**: 22 sec.
Группа Янко J_3. Основные свойства:

$$\mathrm{Ord}(J_3) = 50232960 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19,\ \mathrm{M}(J_3) \cong \mathsf{C}_3,\ \mathrm{Out}(J_3) \cong \mathsf{C}_2.$$

(1) 14688-мерные представления (a) и (b) группы J_3
Rank: 14. Suborbit lengths: $1, 285, 342, 380, 570^2, 855^2, 1140^2, 1710^3, 3420$.

$$\underline{\mathbf{14688}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{85} \oplus \overline{\mathbf{85}} \oplus \underbrace{\mathbf{1140} \oplus \mathbf{1140}} \oplus \mathbf{1215}_+ \oplus \mathbf{1215}_- \oplus \mathbf{1615} \oplus \mathbf{1920}_\alpha \oplus \mathbf{1920}_\beta \oplus \mathbf{1920}_\gamma \oplus \mathbf{2432}$$

Time **C**: 11 sec. Time **Maple**: 1 min 52 sec.

Примечание. Атлас [7] содержит два неэквивалентных 14688-мерных представления группы J_3, (a) и (b), которые имеют одинаковую структуру разложений. Различия проявляются в явных выражениях для неприводимых проекторов (и в структуре орбиталов), которые мы здесь не приводим. Времена вычислений также совпадают с точностью до секунды.

(2) 6156-мерное представление группы $J_3 \rtimes 2$
Rank: 7. Suborbit lengths: $1, 85, 120, 510, 680, 2040, 2720$.

$$\underline{\mathbf{6156}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{324} \oplus \mathbf{646} \oplus \mathbf{1140} \oplus \mathbf{1215}_{+} \oplus \mathbf{1215}_{-} \oplus \mathbf{1615}$$

Time **C**: 1 sec. Time **Maple**: 1 sec.

Группа Рюдвалиса Ru. Основные свойства:

$\mathrm{Ord}(Ru) = 145926144000 = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$

$\mathrm{M}(Ru) \cong \mathsf{C}_2,\ \mathrm{Out}(Ru) \cong 1$.

(1) 4060-мерное представление группы Ru

Rank: 3. Suborbit lengths: $1, 1755, 2304$.

$$\underline{\mathbf{4060}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{783} \oplus \mathbf{3276}$$

Time **C**: < 1 sec. Time **Maple**: < 1 sec.

(2) 16240-мерное представление группы $2.Ru$

Rank: 9. Suborbit lengths: $1^4, 2304^4, 7020$.

$$\underline{\mathbf{16240}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \overline{\mathbf{28}} \oplus \mathbf{406} \oplus \mathbf{783} \oplus \mathbf{3276} \oplus \mathbf{3654} \oplus \mathbf{4032} \oplus \overline{\mathbf{4032}}$$

Time **C**: 12 sec. Time **Maple**: 2 sec.

4.4. Заключительные замечания. Основным ограничивающим параметром для программы ***PreparePolynomialData*** является размерность представления. Используемый нами компьютер с 16 GB оперативной памяти справляется с размерностями не превышающими 100000. Например, обработка 98280-мерного представление группы $3.Suz$ требует 17.6 GB памяти, что вызывает использование дисковой памяти, приводящей к существенному замедлению вычислений. Используемая нами операционная система Windows 10 способна адресовать до 512 GB, поэтому можно рассчитывать, что при наличии достаточной памяти программа справится с представлениями, размерностей в несколько сотен тысяч.

Основным узким местом программы ***SplitRepresentation*** является то, что в её основе лежат методы полиномиальной алгебры, которые по своей природе являются алгоритмически трудными. Число полиномиальных переменных равно рангу R расщепляемого перестановочного представления. На практике программа ***SplitRepresentation*** уверенно справляется с расщеплением представлений ранга не превышающего 17, хотя есть отдельные примеры с рангами 18 и 19. Тем не менее, представления конечных групп часто имеют невысокие ранги. Например, в Атласе [7] условию $\mathrm{R} \leqslant 17$ удовлетворяют 761 из 886, или 86%, перестановочных представлений.

Системы полиномиальных уравнений, возникающих в алгоритме расщепления с использованием инвариантных проекторов, являются весьма специальными. В частности, все корни этих систем принадлежат к абелевым расширениям. Было бы желательно, если это возможно, вместо универсальных методов базисов Грёбнера разработать какой-то подход, использующий специфику полиномиальных систем, возникающих в рассматриваемой задаче.

Благодарности. Я благодарен Ю. А. Блинкову, Н. Н. Васильеву, В. П. Гердту и Р. А. Уилсону за обсуждение работы и ценные советы.

Список литературы

1. D. F. Holt, B. Eick, E. A. O'Brien, Handbook of Computational Group Theory. Chapman & Hall/CRC, (2005).
2. R. Parker, *The computer calculation of modular characters (the Meat-Axe)*. In: Atkinson, M.D. (ed.) Computational Group Theory, pp. 267–274. Academic Press, London (1984).
3. V. V. Kornyak, *Quantum models based on finite groups*. — J. Phys. Conf. Ser. **965** (2018), 012023. `http://stacks.iop.org/1742-6596/965/i=1/a=012023`
4. V. V. Kornyak, *Modeling Quantum Behavior in the Framework of Permutation Groups*. — EPJ Web of Conferences **173** (2018), 01007. `https://doi.org/10.1051/epjconf/201817301007`
5. P. J. Cameron,*Permutation Groups*. Cambridge University Press (1999).
6. V. V. Kornyak, *Splitting Permutation Representations of Finite Groups by Polynomial Algebra Methods*. In: Gerdt V., Koepf W., Seiler W., Vorozhtsov E. (eds) CASC 2018. LNCS, **11077**, 304-318. Springer, Cham (2018).
7. R. Wilson, Atlas of finite group representations. `http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3`
8. W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, A. Steel, *Solving Problems with Magma*. University of Sydney. `http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/pdf/examples.pdf`

Kornyak V. V. An algorithm for decomposition of finite group representations by means of invariant projectors.

We describe an algorithm for decomposition of permutation representations of finite groups over fields of characteristic zero into irreducible components.

The algorithm is based on the fact that the components of the invariant inner product in invariant subspaces are operators of projection into these subspaces. This allows us to reduce the problem to solving systems of quadratic equations. The current implementation of the proposed algorithm allows us to split representationы of dimensions up to hundreds of thousands. Computational examples are given.

Лаборатория информационных технологий,
Объединённый институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, 141980, Дубна, Россия
E-mail: vkornyak@gmail.com

Поступило 10 сентября 2018 г.