Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

М. В. Бабич, С. Ю. Славянов

СВЯЗИ МЕЖДУ ФУКСОВЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ФУКСОВЫМИ СИСТЕМАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Скалярное уравнение и матричная система. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка:

$$\psi'' + P\psi' + Q\psi = 0, \tag{1}$$

где P, Q рациональны. Мы можем переписать его как систему первого порядка:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}.$$

Классические исследования гласят, что если скалярное уравнение (1) фуксово, то существует полиномиальное преобразование

$$(\psi, \psi')^T \to g(z)(\psi, \psi')^T =: \vec{\psi}$$

такое, что результирующая система

$$\vec{\psi}' = A(z)\vec{\psi}, \quad A = g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix} g^{-1} + g'g^{-1}$$

становится фуксовой, т.е. $A(z)dz$ имеет только простые полюса на $\overline{\mathbb{C}}$.

Если мы стартуем от системы $\vec{\psi}' = A(z)\vec{\psi}$, то можно исключить вторую компоненту $\vec{\psi} = (\psi, \psi_2)^T$, используя $\vec{\psi}'' = (A' + A^2)\vec{\psi}$. Результатом является скалярное уравнение $\psi'' + P\psi' + Q\psi = 0$, где

$$P = -\log' A_{12} - \mathrm{tr} A, \quad Q = \det A - A'_{11} + A_{11} \log' A_{12}. \tag{2}$$

Поставим вопрос, как восстановить фуксову систему, если скалярное уравнение является уравнением Гойна (фуксовым уравнением с четырьмя регулярными точками, см. [1])?

Корни $\rho_{1,2} = \rho_{1,2}(z_j)$ квадратного уравнения

$$\rho(\rho - 1) + \rho \mathrm{res}|_{z=z_j} P + \mathrm{res}|_{z=z_j} \left((z - z_j)Q\right) = 0$$

Ключевые слова: уравнение Гойна, Фуксова линейная система, ложные особые точки, изомонодромии условие, система Шлезингера, антиквантование, уравнение Пенлеве $P^{(VI)}$.

называются характеристическими экспонентами. Они связаны с собственными значениями Θ'_k, Θ_k вычетов $A^{(k)}$ матрицы $A(z) = \sum\limits_k \frac{A^{(k)}}{z-z_k}$:

$$\{\rho_1, \rho_2\} = \{\Theta'_k, \Theta_k + s_k + 1\},$$

где s_k это порядок $A_{12}(z)$ в точке z_k:

$$A_{12}(z) \sim (z - z_k)^{s_k}.$$

S-гомотопное преобразование

$$\psi \to \prod_{k=1}^{4} (z - z_k)^{\alpha_k} \psi, \quad \sum_k \alpha_k = 0$$

сдвигает характеристические экспоненты, а следовательно, и собственные значения

$$\{\Theta'_k, \Theta_k\} \to \{\Theta'_k + \alpha_k, \Theta_k + \alpha_k\},$$

так что можно положить $\Theta_k = 0,\ k = 1, 2, 3$. В этом случае формулы упрощаются, и матрицы-вычеты $A^{(k)}$ для системы, соответствующей уравнению Гойна

$$\sigma(z)\frac{d^2}{dz^2}\psi + \tau(z)\frac{d}{dz}\psi + (\alpha\beta z - \lambda)\psi = 0. \tag{3}$$

$$\sigma(z) = \prod_{j=1}^{3}(z - z_j), \quad \tau(z) = \sum_{j=1}^{3}(1 - \Theta_j)\sigma_j(z), \quad \sigma_j = \sigma(z)/(z - z_j),$$

можно вычислить непосредственно:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & \Theta_1 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1-t} & -t \\ \frac{\alpha}{t(1-t)}(\frac{\alpha}{1-t} - \Theta_2) & \Theta_2 - \frac{\alpha}{1-t} \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{-t\alpha}{1-t} & t \\ \frac{-\alpha}{1-t}(\frac{t\alpha}{1-t} + \Theta_3) & \Theta_3 + \frac{t\alpha}{1-t} \end{pmatrix}, \qquad A^{(\infty)} = -\sum_k A^{(k)}$$

Назовём наборы матриц $A^{(k)}, k = 1, 2, 3, 4$ эквивалентными, если матрицы этих наборов связаны преобразованием подобия, одним для всех матриц: $\{A^{(k)}\} \sim \{g^{-1}A^{(k)}g\}$, $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Всё множество наборов расслаивается на классы эквивалентности. Внутри почти любого класса[1], то есть среди подобных друг другу наборов, имеется единственный набор-представитель, такой что

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \Theta_1' & \star \\ 0 & \Theta_1 \end{pmatrix}, \ A^{(2)} = \begin{pmatrix} \star & -1 \\ \star & \star \end{pmatrix}, \ A^{(3)} = \begin{pmatrix} \Theta_3' & 0 \\ \star & \Theta_3 \end{pmatrix}.$$

Если собственные значения зафиксированы, то все матричные элементы ($\star$) однозначно определены оставшейся матрицей $A^{(\infty)} = -\sum\limits_k A^{(k)}$, а на саму $A^{(\infty)}$ ограничений нет.

Набору-представителю соответствует некоторое конкретное скалярное уравнение. Все остальные скалярные уравнения, из соответствующего класса эквивалентности, образуют однопараметрическое множество. Его элементы, естественным образом, параметризуются направлением собственного вектора матрицы $A^{(3)}$, соответствующего собственному значению Θ_3, параметром $p \in \mathbb{C}$:

$$g_p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{A^{(k)}\} \to \{g_p^{-1} A^{(k)} g_p\}.$$

Построим скалярное уравнение для этого набора-представителя. Явные формулы (2) показывают, что P, Q имеет сингулярности не только в полюсах, но и в нулях A_{12}, это и есть ложные особые точки скалярного уравнения. Уравнение Гойна имеет ровно четыре сингулярности в z_k, и не имеет ложных особых точек. Это возможно лишь в случае совпадения обеих нулей $A_{12}dz$ с какими-то z_k.

Легко понять, что совпадение нуля $A_{12}dz$ с точкой z_k означает равенство нулю матричного элемента $(A^{(k)})_{12}$. Таким образом, два вычета в наборе, скажем $A^{(3)}, A^{(\infty)}$, являются нижне-треугольными. Это дает

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \Theta_1' & 1 \\ 0 & \Theta_1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} \Theta_2' + \Theta_\Sigma & -1 \\ \Theta_\Sigma(\Theta_\Sigma + \Theta_2'') & \Theta_2 - \Theta_\Sigma \end{pmatrix},$$
$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \Theta_3' & 0 \\ h & \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad A^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \Theta_4' & 0 \\ -(\Theta_\Sigma(\Theta_\Sigma + \Theta_3'') + h) & \Theta_4 \end{pmatrix},$$

где $\Theta_j'' := \Theta_j' - \Theta_j, \Theta_\Sigma := \sum\limits_{j=1}^{4} \Theta_j$, величина $h \in \mathbb{C}$ является акцессорным параметром.

[1] На всюду плотном множестве, за исключением нескольких подмногообразий меньшей размерности.

Если матрицы бесследовые, то формулы упрощаются. Положим $\Theta_j + \Theta'_j = 0$, $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = t, z_4 = \infty$:

$$\psi'' + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)\psi' + \left(\frac{h}{z(z-1)(z-t)} + \widetilde{Q}\right)\psi = 0,$$

где

$$\widetilde{Q} = -\frac{\Theta_3(2(\Theta_2 - \Theta_\Sigma) - 1)}{(z-1)(z-t)} - \frac{\Theta_3(2\Theta_1 - 1)}{(z-t)z} - \frac{2\Theta_1\Theta_2 - (2\Theta_\Sigma + 1)(\Theta_1 + \Theta_2) + \Theta_\Sigma(\Theta_\Sigma + 1)}{z(z-1)} - \frac{\Theta_1^2}{z^2} - \frac{\Theta_2^2}{(z-1)^2} - \frac{\Theta_3(\Theta_3 + 1)}{(z-t)^2}.$$

Изомонодромия, система Шлезингера, уравнение Пенлеве. Семейство дифференциальных систем $d\Psi = A(z;t)dz\ \Psi$ имеет фиксированную монодромию тогда и только тогда, когда существует 1-форма $B(z,t)dt$ такая, что $Adz + Bdt$ имеет нулевую кривизну. Л. Шлезингер предложил следующий анзац:

$$A(z;t)dz + B(z,t)dt = \sum_k A^{(k)}\frac{dz - dz_k}{z - z_k} =: \omega, \quad A^{(k)} = A^{(k)}(t), \quad z_k = z_k(t)$$

для нахождения матрицы $B(z,t)$. В случае общего положения параметров, этот анзац, с точностью до тривиальной калибровки, даёт общий вид матрицы B.

Условие нулевой кривизны

$$d\omega = \omega \wedge \omega$$

эквивалентно многовременно́й динамической системе

$$dA^{(k)} + \left[A^{(k)}, \sum_i \frac{dz_k - dz_i}{z_k - z_i}\right] = 0.$$

Это гамильтонов поток в пространстве Пуассона $\mathrm{gl}^M(N,\mathbb{C})$ множества $N \times N$ матриц $\{A^{(k)}\} \in \mathrm{gl}^M(N,\mathbb{C})$. Гамильтонианом, задающим динамику по "времени" z_k является функция $H_k := h/dz_k, dz_s = 0, s \neq k$, где

$$h = \sum_{i,j} \mathrm{tr} A^{(i)} A^{(j)} \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}.$$

Собственные значения матриц-вычетов $A^{(k)}$ определяются монодромией. Зафиксируем эти собственные значения. Рассмотрим классы эквивалентных наборов $\{A^{(k)}\} \sim \{g^{-1}A^{(k)}g\}$. Очевидно, что все уравнения, имеющие эквивалентные наборы, заведомо имеют одинаковые монодромии, так что понятие изомонодромной деформации определено на множестве классов. Вернёмся к случаю $N = 2, M = 4$, и опять выберем представителя класса эквивалентности:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \Theta_1' - pq & q \\ -p(pq - \Theta_1' + \Theta_1) & \Theta_1 + pq \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} \Theta_2' & 1-q \\ 0 & \Theta_2 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \Theta_3' & 0 \\ a_{21}^{(3)} & \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} -\Sigma_{11} & -1 \\ -\Sigma_{11}\Sigma_{22} + \Theta_4'\Theta_4 & -\Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

где $-\Sigma_{11}, -\Sigma_{22}, a_{21}^{(3)}$ это суммы соответствующих матричных элементов:

$$\Sigma_{11} := -pq + \Theta_1' + \Theta_2' + \Theta_3', \quad \Sigma_{22} := pq + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3,$$

$$a_{21}^{(3)} = p(pq - \Theta_1' + \Theta_1) - \Big(pq - \sum_j \Theta_j' + \Theta_4'\Big)\Big(pq + \sum_j \Theta_j - \Theta_4\Big) - \Theta_4'\Theta_4.$$

Переменные p, q являются каноническими на симплектическом пространстве

$$\mathcal{O}^{(1)} \times \mathcal{O}^{(2)} \times \mathcal{O}^{(3)} \times \mathcal{O}^{(4)} /\!\!/ \mathrm{GL}(2),$$

построенном с помощью метода симплектической редукции по диагональному действию $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ на произведении (ко)присоединённых орбит $\mathcal{O}^{(k)}$ (см. [2, 3, 4]). Положим $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = t, z_4 = \infty$. Гамильтонианом, соответствующим $z_3 =: t$ будет функция

$$H := \frac{\mathrm{tr}A^{(3)}A^{(1)}}{t} + \frac{\mathrm{tr}A^{(3)}A^{(2)}}{t-1} = \frac{1}{t(t-1)}\mathrm{tr}A^{(3)}((t-1)A^{(1)} + tA^{(2)})$$
$$= \frac{q(q-1)(q-t)}{t(t-1)}\left(p^2 - p\left(\frac{\Theta_1''}{q} + \frac{\Theta_2''}{q-1} + \frac{\Theta_3''}{q-t}\right)\right) + q\frac{\Theta_\Sigma''(\Theta_\Sigma'' - 2\Theta_4'')}{4t(t-1)} + *,$$

где “$*$” это слагаемые, не зависящие от переменных p, q.

Рассмотрим нормировку $\psi(z) \to \prod_k (z - z_k)^{\alpha_k}\psi(z)$ уравнения Гойна такую, чтобы одна из двух характеристических экспонент в каждой из конечных точек z_1, z_2, z_3 обратилась в ноль[2]. Такое уравнение Гойна

[2] В этом случае одно из решений в этих точках гладкое, не равное нулю.

имеет вид:

$$\prod_{j=1}^{3}(z-z_j)\left(D^2\psi-\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\Theta_j-1}{z-z_j}\right)D\psi\right)+(\alpha\beta z-\lambda)\psi=0. \qquad (4)$$

Сравним с гамильтонианом системы Пенлеве $P^{(VI)}$: $dp\wedge dq-$

$$-d\left(\prod_{j=1}^{3}(q-z_j)\left(p^2-\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\Theta''_j}{q-z_j}\right)p\right)+\widetilde{\Theta}_4 q\right)\wedge\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Один из авторов (С. Ю. Славянов) заметил [5], что формальная подстановка

$$\left\{D=\frac{d}{dz},z\right\}\to\{p,q\}$$

переводит полиномиальный вид уравнения Гойна с тремя нулевыми характеристическими экспонентами в гамильтониан изомонодромной деформации фуксовой системы в канонических переменных. Он назвал это “антиквантованием” [6, 7].

Список литературы

1. С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе сингулярностей*, СПб, Невский диалект, 2002.
2. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М., Наука, 1989.
3. М. В. Бабич, *О канонической параметризации фазовых пространств уравнений изомонодромных деформаций фуксовых систем, случай* 2x2. *Вывод уравнения Пенлеве V.* — УМН **385**, No. 1 (2009), 51–134.
4. M. V. Babich, *Isomonodromic Deformations and Painlevé Equations.* — Constructive Approximation **41**, No. 3 (2015), 335–356.
5. S. Yu. Slavyanov, *Painlevé equations as classical analogues of Heun equations.* — J. Phys. A, Math. Gen. **29** (1996), 7329–7335.
6. С. Ю. Славянов, *Антиквантование и соответствующие симметрии.* — ТМФ, **182** (2015), 182–188.
7. С. Ю. Славянов, О. Л. Стесик, *Антиквантование деформированных уравнений класса Гойна.* — ТМФ, **186** (2016), 119–126.

Babich M. V., Slavyanov S. Yu. Links from second-order Fuchsian equations to first-order linear systems.

The number of parameters in the linear Fuchsian system with four singularities is larger than that in the second-order Fuchsian equation with the same singularities. Hence, in order to find a relation between the given system and the equation it is needed to simplify the matrices – residues at finite Fuchsian singularities. The way to do it is studied. Such approach gives also the possibility to find the relation between the use of the antiquantization procedure and the isomonodromic property for derivation the Painlevé equation P^{VI}.

С.-Петербургский
государственный университет;
С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
E-mail: mbabich@pdmi.ras.ru

Поступило 14 августа 2018 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: slav@ss2034.spb.edu