Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

Э. А. Айрян, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ЗАДАЮЩИХ ПРОЕКТИВНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ

§1. Введение

Современное развитие систем компьютерной алгебры (CAS) вернуло интерес к старым исследованиям о разрешимости дифференциальных уравнений в конечном виде. Поворотным моментом следует считать начало 1960-х годов, когда при создании своего символьного интегратора SIN Дж. Мозес инициировал процесс инкорпорации изысканий Лиувилля по интегрированию в элементарных функциях в компьютерные науки [1]. Пользователям современных CAS хорошо известно, что есть замечательные дифференциальные уравнения, которые могут быть проинтегрированы в символьном виде. Менее известно, что нет единого подхода к описанию этого класса дифференциальных уравнений.

При ближайшем рассмотрении все известные подходы подразумевают отсылку к вычислительным практикам прошлых веков. Например, в теориях, опирающихся на работы Лиувилля, исследуют вопрос о существовании решения в элементарных функциях [2,3]. Во времена Лиувилля такая постановка вопроса вполне соответствовала вычислительной практике: в распоряжении исследователей были таблицы элементарных функций и поэтому было крайне важно свести задачу вычисления решения к вычислению значений элементарных функций. Однако теперь этими таблицами никто не пользуется и объяснить, чем вычисление синуса проще вычисления, скажем, функции ошибок

Ключевые слова: конечные разности, разностные схемы, уравнение Риккати, проективные соответствия.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН “5-100” и при частичной поддержке грантами РФФИ, гранты No. 18-07-00567 и No. 18-51-18005. Вычисления выполнены в системе компьютерной алгебры Sage (`www.sagemath.org`).

не представляется возможным. Точно также в теориях, обычно связываемых с именем Пенлеве, во главу угла ставят возможность разложения решения во всюду сходящийся степенной ряд или отношение таких рядов [3,4]. В XVIII–XIX веке степенные ряды действительно использовались для расчетов, однако в XX веке эти методы (исключая, конечно, методы, основанные на разложении по малому параметру) были полностью вытеснены методом конечных разностей.

Впрочем есть и общее свойство всех теорий разрешимости дифференциальных уравнений: в их центре всякий раз оказывается уравнение Риккати

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, \quad p, q, r \in \mathbb{C}[x]. \tag{1}$$

Всякое решение этого уравнения можно представить в виде отношения двух всюду сходящихся рядов по степеням x [3], однако согласно теореме Лиувилля решение далеко не любого уравнения Риккати можно представить в конечном виде при помощи экспонент и квадратур [2], таково, например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x^n + y^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

решение которого дается в виде отношения цилиндрических функций. Возникающие на этом пути новые трансцендентные функции получили название высших трансцендентных функций или специальных функций, в том числе цилиндрических, гипергеометрических и т.д. Известной заменой уравнение Риккати можно свести к линейному уравнению 2-го порядка, поэтому обычно классификацию этих трансцендентных функций с точки зрения линейных уравнений 2-го порядка. Центральная роль уравнения Риккати в групповом анализе не бросается в глаза, однако в его наиболее известной реализации для CAS — Абаке — ему уделено особое место [5].

Нам представляется важным осмыслить дифференциальные уравнения, разрешимые в конченом виде, и, в особенности, уравнение Риккати как замечательные уравнения и с точки зрения метода конечных разностей.

§2. Разностные схемы

Здесь и далее ограничим рассмотрение дифференциальным уравнением вида

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{Q}(x, y). \tag{3}$$

Простейший и в то же время самый употребительный метод приближенного решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=a} = y_0 \tag{4}$$

на отрезке $a < x < b$ — метод конечных разностей. Для удобства дальнейших ссылок дадим ему краткое описание. По методу конечных разностей отрезок $a < x < b$ разбивают на части

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

и принимают, что переход с n-го слоя на следующий происходит по формуле, в том или ином смысле аппроксимирующей исходное дифференциальное уравнение. Например, вслед за Эйлером принимают

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = f(x_n, y_n).$$

Величину $x_{n+1} - x_n$ называют шагом, если он не меняется от слоя к слою, его обозначают как Δx. Переход от слоя к слою осуществляется по одной и той же формуле, именуемой разностной схемой, что весьма неудачно с точки зрения терминологии принятой в алгебраической геометрии. Индексы, соответствующие n-ому слою опускают, а вместо индексов, соответствующих следующему слою, пишут шляпку над буквой. Например, явную схему Эйлера записывают так

$$\widehat{y} - y = f(x, y)\Delta x. \tag{5}$$

В общем же случае схему можно записать как

$$G(x, \widehat{x}, y, \widehat{y}) = 0. \tag{6}$$

Если решение задачи Коши не встречает особых точек, то его можно найти по любой схеме, аппроксимирующей исходное дифференциальное уравнение. Для удобства ссылок сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathbb{Q}(x, y)$ и схема* (6) *аппроксимирует дифференциальное уравнение с порядком s. Если точное решение $y = g(x)$ задачи Коши* (4) *на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ не имеет особых точек, то найдутся две такие константы M_x и M_y, что приближенное решение $y_1, \dots, y_N$ той же задачи Коши удовлетворяет оценке*

$$|y_n - g(x_n)| \leqslant M_y \Delta x^s,$$

лишь только шаг удовлетворяет условию $\Delta x \leqslant M_x$.

В случае нелинейного уравнения нет никаких оснований полагать, что при заданных начальных условиях точное решение не имеет особых точек на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Напомним, что отличает этот случай от случая линейных дифференциальных уравнений. Решения нелинейных уравнений могут иметь особые точки, положение которых на оси x зависят от выбора начальных данных. Такие особые точки в аналитической теории дифференциальных уравнений называют подвижными.

Теорема 2 (Пенлеве [4]). *В окрестности подвижной особой точки $x = c$ решение дифференциального уравнения*

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{C}(x, y),$$

можно разложить в ряд по целым степеням параметра $u = \sqrt[r]{x - c}$, $r \in \mathbb{N}$, причем число сингулярных членов в этом ряде не более чем конечно.

Ряды, возникшие в теореме Пенлеве, называют рядами Пюизё, а особые точки, в окрестности которых функцию можно разложить в такой ряд, — *алгебраическими особыми точками.* Упорядочив слагаемые ряда по возрастанию степени, можно написать

$$y = c_0(x - c)^s + \ldots, \quad s \in \mathbb{Q}.$$

Появившийся здесь наименьший показатель s называют порядком алгебраической особой точки.

Появление на рассматриваемом отрезке подвижной особой точки оказывает фатальное действие на применимость метода Эйлера. А. Н. Крылов в своих лекциях [6] по этому поводу приводил прямую цитату Эйлера.

> “Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y сохраняющими свои значения, соответствующими началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.”

Отсюда делался вывод о невозможности описания поведение решение в окрестности особой точки по методу конечных разностей, а задача определения положения и порядка подвижной особенности по нескольким приближенным решениям, найденным по методу конечных разностей, была сформулирована Г. И. Марчуком лишь 2000-х годах. В середине 2000-х было предложено практическое решение этой задачи [7,8]. Оказалась, что способ Ричардсона, традиционно использующейся для оценки порядка сходимости схемы, в случае схемы CROS дает решение поставленной задачи: до особой точки эффективный порядок дает порядок аппроксимации, а после нее – порядок подвижной точки.

§3. Уравнение Риккати и конечные разности

Уравнение Риккати (1) стало первым уравнением, которое не удалось проинтегрировать в элементарных функциях, а его решения пополнили списки высших трансцендентных функций. Именно оно стало объектом численных экспериментов, в частности свои суждения о разностных схемах Эйлер иллюстрировал примерами на уравнение Риккати.

Как это отметил еще Эйлер, разностные схемы, аппроксимирующие уравнение Риккати, обычно неправильно описывают поведение решения в непосредственной близи к особой точке и, тем более, за ней. Таковы и схемы Эйлера, как явная, так и неявная, а также и схема CROS. Однако для уравнения Риккати нетрудно построить разностную схему, верно описывающую решение и после особой точки. Вот эта схема:

$$\widehat{y} = y + (py\widehat{y} + qy + r)\Delta x, \tag{7}$$

здесь p, q, r берутся, для определенности, в слое x [9]. Линейность схемы относительно $\widehat{y}$ позволяет переходить со слоя на слой по явным формулам, а порядок аппроксимации дифференциального уравнения равен единице, поэтому результаты вычислений по этой схеме не должны быть менее точными, чем вычисления по явной схеме Эйлера (5). Удивительное же свойство схемы (7) состоит в том, что счет по ней можно продолжить за особые точки решения без заметного накопления ошибки.

Пример 3.1. Точное решение $y = \tan x$ начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \tag{8}$$

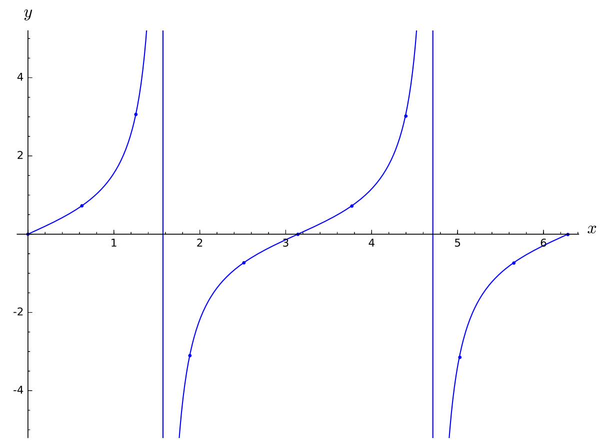

Рис. 1. Решение начальной задачи (8), точное (сплошаня линия) и найденное по линейной схеме с сотней слоев (отмечена каждая 10-я точка).

имеет полюса в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, приближенное решение этой задачи представлено на рис. 1, счет по линейной схемы переходит через два полюса $x = \pi$ и $x = 3\pi$ без заметного накопления ошибки.

Пример 3.2. Задача

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \tag{9}$$

интегрируется в цилиндрических функциях, поэтому точное решение задачи можно сравнить с приближенным, рис. 2. Хорошо видно, что и здесь удается перешагнуть через три полюса, однако ближе к правому краю графика заметно небольшое расхождение точного и приближенного решения.

Зафиксируем сказанное строго в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть $p, q, r \in \mathbb{Q}(x)$ и не имеют полюсов на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и пусть $y = g(x)$ – точное решение задачи Коши (4) для уравнения Риккати на этом отрезке. Для любого $\delta > 0$ найдутся две такие константы M_x и M_y, что приближенное решение $y_1, \dots, y_N$*

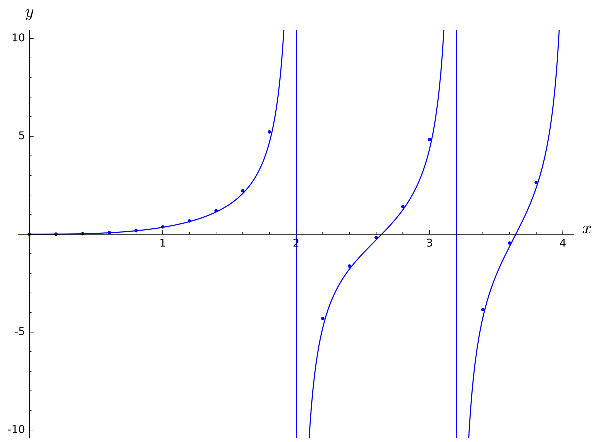

Рис. 2. Решение начальной задачи (2), точное (сплошаня линия) и найденное по линейной схеме с сотней слоев (отмечена каждая 5-я точка).

той же задачи Коши, найденное по схеме (7) *удовлетворяет оценке*

$$|y_n - g(x_n)| \leqslant M_y \Delta x$$

во всех точках x_n*, отделенных от полюсов точного решения на расстояние, большее* δ*, лишь только шаг удовлетворяет условию* $\Delta x \leqslant M_x$.

Прежде чем обратиться к доказательству этой теоремы (см. раздел 4), отметим алгебраические свойства схемы (7), выделяющие ее среди прочих разностных схем, аппроксимирующих то же дифференциальное уравнение.

Схема (7) представляет собой линейное уравнение относительно y и $\widehat{y}$, причем выражение $\widehat{y}$ через y и y через $\widehat{y}$ являются дробно-линейными, напр.,

$$\widehat{y} = \frac{y + (qy + r)\Delta x}{1 - p\Delta x y}.$$

В дальнейшем удобно принять, что соотношение (7) задает взаимнооднозначное соответствие между двумя соседними слоями. Чтобы сказанное было верно во всех точках, необходимо дополнить область значений переменных y и $\widehat{y}$ бесконечно удаленными точками и принять обычном образом, что точке $y = 1/p\Delta x$ отвечает $\widehat{y} = \infty$. Это означает, что слои для уравнения Риккати естественно считать проективными прямыми.

На самом деле, при задании любой разностной схемы (6) следовало бы указывать области изменения переменных y и $\widehat{y}$, иными словами, явно указывать какие именно многообразия рассматриваются в качестве слоев, а саму схему рассматривать как алгебраическое соответствие между слоями.

Замечание 1. Напомним, что соответствие между двумя многообразиями V и $\widehat{V}$ называется алгебраическим (n, m)-соответствием, если оно задается алгебраическими уравнениями, и одной произвольной точке V отвечает n вообще говоря различных точек $\widehat{V}$, а одной произвольной точке $\widehat{V}$ отвечает m вообще говоря различных точек V [10,16].

Сравним с этих позиций нашу схему (7) со схемой Эйлера, ограничившись классом дифференциальных уравнений Риккати.

Счет по явной схеме Эйлера

$$\widehat{y} = y + (p(x) + q(x)y + r(x)y^2)\Delta x$$

не может дать бесконечно большого значения для y_n, поэтому естественно принять, что слои – аффинные прямые. В таком случае явная схема Эйлера задает алгебраическое соответствие между слоями, причем одной точке в первом слое отвечает одна точка на втором, а одной точке со второго слоя 2 точки с первого (в предположении, что узлы x_n используемой схемы не попадают в нули коэффициента r). Таким образом, явная схема Эйлера задает $(1, 2)$-соответствие между соседними слоями. При вычислении по явной схеме пользуются тем, что по заданному значению y_0 на начальном слое можно найти одно единственное значение y_N на конечном слое, и игнорируют то несущественное для вычисления приближенного решения обстоятельство, что заданному y_N отвечает 2 значения y_{N-1}, каждому из них 2 значения y_{N-1} и т.д. Поэтому явная схема Эйлера задает $(1, 2^N)$-соответствие между начальным и конечным (N-м) слоями.

Счет по нашей схеме

$$\widehat{y} = y + (p(x) + q(x)y + r(x)y\widehat{y})\Delta x$$

может дать бесконечно большие значения для y_n, поэтому мы приняли, что слои – проективные прямые. Эта схема задает взаимно-однозначное соответствие между соседними слоями, а следовательно, и между любыми слоями.

Рассмотрим теперь с тех же позиций начальную задачу. Традиционно решение начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, \quad y(a) = y_0$$

рассматривают как функцию x, а y_0 считают постоянной величиной, заданной произвольным образом. Однако ничто не мешает фиксировать конечное значение x, скажем $x = b$, и рассмотреть решение как функцию y_0. В случае уравнения Риккати эта зависимость очень простая: точное решение является дробно-линейной функцией начального значения y_0, то есть

$$y = \frac{\alpha(x)y_0 + \beta(x)}{\gamma(x)y_0 + \delta(x)}. \tag{10}$$

Поэтому, если принять в качестве слоя проективную прямую, нетрудно заметить, что начальная задача для уравнения Риккати задает взаимно-однозначное соответствие между слоями начальным и конечным слоями.

Отсюда получается, что при применении явной схемы мы аппроксимируем взаимно-однозначное соответствие между слоями $(1, 2^N)$-соответствием. По существу мы пытаемся аппроксимировать однозначную функцию 2^N-значной и надеемся на то, что с увеличением N на рассматриваемом отрезке одна будет близка к другой. Удивительно здесь лишь то, что мы все же добиваемся в этом направлении известных успехов. Неявная схема Эйлера с этой точки зрения ничем не лучше явной: она задает $(2^N, 1)$-соответствие между начальным и конечным слоями. Наша же схема задает взаимно-однозначное соответствие между слоями, как и точное решение задачи Коши. Отсюда можно сделать важное для дальнейшего наблюдение: *для правильного описания поведения решения в окрестности особой точки по методу конечных разностей важно не только, чтобы схема аппроксимировала дифференциальное уравнение, но и сохраняло однозначность соответствия между слоями.*

§4. Доказательство теоремы 3

Обратимся теперь к доказательству теоремы 3. Неподвижные особые точки решения уравнения Риккати суть особенности коэффициентов p, q, r, по условию теоремы таковых на рассматриваемом отрезке не имеется. Подвижные особые точки решения – полюса, поэтому на рассматриваемом отрезке имеется не более чем конечное число таковых. Если полюсов на отрезке не имеется вовсе, то утверждение теоремы сразу следует из теоремы 1. Допустим, что множество это не пусто.

(i) Найдется бесконечно много таких значений числа y_0, при которых решение начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = p + qy + ry^2, \quad y|_{x=a} = y_0,$$

не имеет полюсов на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Для доказательства заметим, что выражение (10) дает общее решение этой задачи, причем, не ограничивая общности рассмотрения, можно считать, что коэффициенты $\alpha, \ldots, \delta$ принимают на рассматриваемом отрезке вещественные значения и не имеют особенностей. В таком случае множество начальных значений, при которых решение начальной задачи имеет полюс на отрезке $[a, b]$, представляет собой множество корней линейного уравнения

$$\gamma(x) y_0 + \delta(x) = 0$$

с параметром x, меняющимся от a до b по вещественной оси. Это множество – чисто вещественное, поэтому при всех мнимых y_0 начальная задача не имеет особенностей на рассматриваемом интервале.

Замечание 2. Утверждение, подобное (i), хорошо известно в теории задачи многих тел [11] как теорема Вейерштрасса. Обычно она формулируется в том смысле, что при произвольных начальных данных соударение двух тел мало вероятно. В частности, утверждение (i) можно распространить на любые дифференциальные уравнения вида

$$F(x, y, y') = 0, \quad F \in \mathbb{Z}[x, y, z].$$

Для доказательства следует использовать стандартную для доказательства теоремы Вейерштрасса аргументацию, воспользовавшись вместо теоремы Зундмана теоремой Пенлеве об алгебраичности подвижной точки. Это утверждение мы будем далее называть принципом Вейерштрасса.

В частности, всегда найдутся такие три мнимых числа y'_0, y''_0, y'''_0, что решение начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = p + qy + ry^2, \quad y|_{x=a} = y_0^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3 \tag{11}$$

не имеет полюсов на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Обозначим как $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$ точные решения этих задач, а как y'_n, y''_n, y'''_n – приближенные решения этих задач, найденные по схеме (7). Тогда в силу теоремы 1 найдутся две такие константы M_x и M_y, что

$$|y_n^{(m)} - g^{(m)}(x_n)| \leqslant M_y \Delta x, \tag{12}$$

лишь только шаг удовлетворяет условию $\Delta x \leqslant M_x$.

(ii) Всякое $(1,1)$-соответствие между проективными прямыми является дробно-линейным, а всякое дробно-линейное преобразование сохраняет ангармоническое отношение четырех точек

$$(y, y', y'', y''') = \frac{y - y''}{y'' - y'} : \frac{y - y'''}{y''' - y'}.$$

Если y_n, y'_n, y''_n, y'''_n – четыре приближенные решения задачи Коши с различными начальными условиями на левом конце $x = a$, то их ангармоническое отношение

$$(y_n, y'_n, y''_n, y'''_n)$$

не зависит от n, то есть

$$(y_n, y'_n, y''_n, y'''_n) = (y_0, y'_0, y''_0, y'''_0). \tag{13}$$

Аналогичное свойство имеется и у точного решения: для ангармонического отношения четырех точных решений уравнения Риккати верно

$$(g(x), g'(x), g''(x), g'''(x)) = (y_0, y'_0, y''_0, y'''_0). \tag{14}$$

Равенства (13) и (14) справедливы при всех x и всех n. В соответствии с обычными для проективной геометрии соглашениями, можно считать, что это равенство сохраняется даже при тех значениях x, при которых $g(x)$ обращается в бесконечность, и тех значениях n, в которых y_n обращается в бесконечность.

(iii) Исходное точное решение можно выразить через три других точных решения по тем же формулам, что и приближенное решение через три приближенных решения. Более развернуто, пусть η', η'', η''' –

новые символьные переменные, тогда существует такая рациональная функция φ этих переменных, что одновременно верно

$$g(x) = \varphi(g'(x), g''(x), g'''(x))$$

и

$$y_n = \varphi(y_n', y_n'', y_n''').$$

В самом деле, рассмотрим равенство

$$(y, \eta', \eta'', \eta''') = (y_0, y_0', y_0'', y_0''')$$

как уравнение относительно y, левая его часть является дробно-линейной функцией y, поэтому его корень выражается рационально через η', η'', η''', то есть

$$y = \varphi(\eta', \eta'', \eta''')$$

где φ – рациональная функция с комплексными коэффициентами. Решая уравнение (14) относительно $g(x)$, получим

$$g(x) = \varphi(g'(x), g''(x), g'''(x));$$

аналогично, решая уравнение (13) относительно y_n, получим

$$y_n = \varphi(y_n', y_n'', y_n''').$$

(v) После этой подготовки можно доказать утверждение теоремы 3. По теореме Лагранжа

$$g(x_n) - y_n = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'} \cdot (g'(x_n) - y_n') + \ldots,$$

где производные вычисляются в точке, лежащей где-то на отрезке, соединяющим точку (y_n', y_n'', y_n''') с точкой $(g'(x_n), g''(x_n), g'''(x_n))$. В силу (12) эта точка лежит в области

$$|\eta^{(m)} - g^{(m)}(x_n)| \leqslant M_y \Delta x, \quad m = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Исключим теперь из рассмотрения δ-окрестности полюсов точного решения $y = g(x)$ исходной задачи Коши. Тогда знаменатель функции

$$\varphi(\eta', \eta'', \eta''')$$

не обращается в нуль на кривой

$$\eta' = g'(x), \ldots, \eta''' = g'''(x), \quad x = a..b.$$

Поэтому для достаточно малой окрестности этой кривой можно подобрать такую константу L, что

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\eta^{(m)}}\right| \leqslant L, \quad m = 1, 2, 3.$$

Уменьшением при необходимости M_x можно добиться того, чтобы область (15) целиком попала в эту окрестность. Тогда

$$|g(x_n) - y_n| \leqslant 3LM_y\Delta x,$$

что, с точностью до переобозначения констант, утверждает теорема 3.

§5. Сведение уравнения Риккати к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка

Хорошо известно, что уравнение Риккати сводится к линейному дифференциальному уравнения 2-го порядка. Это обстоятельство прямо следует из возможности составления разностной схему, задающей проективное соответствие между слоями, если перейти к проективным координатам.

В самом деле, запишем проективное соответствие между слоями

$$\widehat{y} = y + (p + qy + ry\widehat{y})\Delta x$$

теперь явно

$$\widehat{y} = \frac{(1 + q\Delta x)y + p\Delta x}{1 - r\Delta xy}$$

Композицию нескольких таких преобразований, описывающую переход с n-го слоя, скажем на $(n+2)$-ой, удобно описывать в проективных координатах. Положим

$$y_n = u_n : v_n,$$

тогда

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{(1 + q_n\Delta x)u_n + p_n\Delta x v_n}{v_n - r_n\Delta x u_n}$$

или в матричных обозначениях

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_n & p_n \\ -r_n & 0 \end{pmatrix}\Delta x\right)\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ v_{n+2} \end{pmatrix} = \left(E + \begin{pmatrix} q_{n+1} & p_{n+1} \\ -r_{n+1} & 0 \end{pmatrix}\Delta x\right)\left(E + \begin{pmatrix} q_n & p_n \\ -r_n & 0 \end{pmatrix}\Delta x\right)\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

В частности, мы можем выразить решение на конечном слое через известное значение решения на начальном слое:

$$\begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \left(E + \begin{pmatrix} q_{N-1} & p_{N-1} \\ -r_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \Delta x \right) \cdots \left(E + \begin{pmatrix} q_0 & p_0 \\ -r_0 & 0 \end{pmatrix} \Delta x \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В пределе при $N \to \infty$ произведение матриц дает P-интеграл Шлезингера [12, 13], поэтому

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathrm{P} \left(E + \begin{pmatrix} q & p \\ -r & 0 \end{pmatrix} dx \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, во-первых, *решение задачи Коши для уравнения Риккати можно найти как отношение $y = u : v$ координат решения системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} u' = pu + qv \\ v' = -ru, \end{cases}$$

удовлетворяющего начальным условиями

$$u|_{x=x_0} = y_0, \quad v|_{x=x_0} = 1.$$

В справедливости сказанного можно убедиться прямым вычислением:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{puv + qv^2 + ru^2}{v^2} = py + q + ry^2.$$

Во-вторых, *явная схема Эйлера для этой системы линейных уравнений дает нашу проективную схему* (6) *для уравнения Риккати.*

Разумеется, сам факт возможности сведения уравнения Риккати к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка хорошо известен и, более того, лежит в основе всей теории интегрирования уравнений Риккати в элементарных функциях. Вообще говоря, можно было бы написать явную схему для этого линейного уравнения и из нее получить нашу проективную схему для уравнения Риккати. С этой точки зрения утверждение теоремы 3 уже не выглядит столь неожиданным.

§6. Разностные схемы, задающие бирациональное соответствие между слоями

Обратимся теперь к вопросу о том, как для дифференциальных уравнений (3) строить разностные схемы (6), счет по которым можно продолжать после подвижных особых точек. Затруднение здесь в том, что это разностные схемы задаются алгебраическими уравнениями, а желанное свойство не является алгебраическим. Однако наша схема для уравнения Риккати обладает и одним весьма примечательным алгебраическим свойством: она задает бирациональное соответствие между слоями. Вопрос в таком случае можно поставить так: для каких дифференциальных уравнений (3) можно составить разностную схему, задающую бирациональное соответствие между слоями?

Теорема 4. *Пусть $f(x,y) \in \mathbb{Q}(x,y)$. Если для дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ можно составить схему, задающую взаимно-однозначное соответствие между слоями, в качестве которых используются проективный прямые, то это уравнение – уравнение Риккати.*

Доказательство. Всякое взаимно-однозначное соответствие между слоями является дробно-линейным, поэтому разностная схема неизбежно имеет вида

$$\alpha + \beta y + \gamma \widehat{y} + \delta y \widehat{y} = 0,$$

где коэффициенты $\alpha, \dots, \delta \in \mathbb{Q}[x, \Delta x]$. Если подставить в левую часть $\widehat{y} = y$ и $\Delta x = 0$, то получится многочлен, равный нулю тождественно. Поэтому многочлены

$$\alpha,\ \beta + \gamma,\ \delta$$

обращаются в нуль при $\Delta x = 0$. Отсюда найдутся такие многочлены $p, q, r \in \mathbb{Q}[x, \Delta x]$, что

$$\alpha = p\Delta x,\ \beta + \gamma = q\Delta x,\ \delta = r\Delta x.$$

Поэтому схему можно переписать так

$$\beta \cdot (\widehat{y} - y) = (p + q\widehat{y} + ry\widehat{y})\Delta x.$$

Это не что иное, как наша проективная схема (7), которая аппроксимирует для уравнение Риккати. □

Доказанная теорема существенным образом ограничивает обобщение приемов, найденных в прошлом разделе, но зато позволяет объяснить, почему именно решения уравнений Риккати были приняты за классические трансцендентные функции. В классе дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной, уравнения Риккати образуют трижды примечательный класс:

- во-первых, они и только они обладают свойством Пенлеве и потому их точное решение можно представить в виде отношения всюду сходящихся степенных рядов,

- в-вторых, для них и только для них можно составить разностные схемы, задающие взаимно-однозначное соответствие между слоями,
- в-третьих, для них можно составить разностные схемы, вычисления по которым можно продолжать за подвижные особые точки.

Традиционно первое свойство принимают за определение классических трансцендентных функций, поэтому 2-е и 3-ое свойства открывают смысл этого понятия с точки зрения теории разностных схем.

Заключение

Для любого обыкновенного дифференциального уравнения или системы таких дифференциальных можно составить разностную схему, по которой можно вычислить приближенное решение. Лишь для некоторых дифференциальных уравнений можно составить такие схемы, счет по которым можно продолжать за подвижные особые точки без заметного накопления ошибки. Примером таких дифференциальных уравнений служат уравнения Риккати, для которых можно составить проективную разностную схему (7), обладающую 3-мя свойствами:

- вычисления по этой схеме можно продолжать за подвижные особые точки,
- эта схема задает проективное соответствие между слоями,
- переход к проективным координатам превращает эту схему в явную схему Эйлера для той системы двух линейных дифференциальных уравнений, к которой сводится уравнение Риккати.

Первое свойство очевидно наиболее полезно с практической точки зрения, однако второе, чисто алгебраическое, более удобно для исследования вопроса о возможности построения такого рода схем. Здесь возникает несколько направлений, в которых можно пытаться обобщить наши результаты

Во-первых, нужно придумать алгоритм, позволяющий за конечное число действий выяснить, можно ли аппроксимировать заданное дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений разностной схемой, задающей бирациональное или, более общо, (n,n)-соответствие между слоями. При этом уже для уравнений вида

$F(y', y, x) = 0$ необходимо рассматривать слои, отличные от проективных прямых.

Во-вторых, нужно проследить связь между первым из названных выше свойств схемы и вторым. Тут нельзя не обратить внимание на две аналогии.

В аналитической теории дифференциальных уравнений Пенлеве выделил два класса дифференциальных уравнений: те, общее решение которых можно представить в виде отношения всюду сходящихся степенных рядов, и те, общее решение которых зависит от констант алгебраически [14, 15]. Для уравнения $y' = f(x, y)$ с рациональной правой часть эти классы эквивалентны с точностью до алгебраического преобразования, а для уравнений 2-го порядка – нет. Поэтому и для разностных схем можно ожидать появление схем, обладающих лишь одним из трех свойств.

В теории разностных схем давно заметили, что на практике, например, при расчете траекторий спутников, следует использовать разностные схемы, точно сохраняющие алгебраические структуры точного решения. Так, для численного решения гамильтоновой системы используют схему Рунге-Кутты, сохраняющую точно симплектическую структуру [17–20]. Эта схема точно сохраняет все квадратичные интегралы движения [19, 20]. Понятно, что идеальная разностная схема должна сохранять точно все алгебраические интегралы движения, однако пока не ясно, каким образом такую схему можно строить и всегда ли это возможно. Мы делаем нечто подобное. Среди всех дифференциальных уравнений имеются такие, точное решение которых задает алгебраическое соответствие между слоями, а мы хотим построить схему, точно сохраняющую это алгебраическое свойство. При этом мы надеемся на то, что такая схема будет лучше стандартных, например, тем, что счет по ней можно продолжать за особые точки.

Подводя промежуточный итог, следует отметить, что мы разобрали простейший случай уравнения 1-го порядка, который, как и во всех теориях разрешимости в конечном виде, остался привязанным к уравнению Риккати. Геометрические причины этого вполне понятны – группа рациональных автоморфизмов прямой линии – очень бедная в сравнении с группой Кремоны. Поэтому заранее не ясно, насколько богат мир дифференциальных уравнений, которые можно аппроксимировать разностными схемами, обладающими одним из названных свойств или всеми сразу.

Список литературы

1. J. Moses, *Symbolic integration.* — MIT (1967).
2. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций.* — **1**, Москва: ИЛ (1949).
3. А. Гориэли, *Интегрируемость и сингулярность.* — Москва-Ижевск: R & C (2006).
4. В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* — Москва-Ленинград, ГИТТЛ (1950).
5. E. S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov, *First order odes, symmetries and linear transformations.* — European J. Applied Mathematics, **14**, No. 2 (2003), 231–246.
6. А. Н. Крылов, *Лекции о приближенных вычислениях.* — Ленинград: АН СССР (1933).
7. E. A. Al'shina, N. N. Kalitkin, P. V. Koryakin, *The singularity diagnostic in calculations with accuracy control.* — Comp. Math. and Math. Phys., **45**, No. 10 (2005), 1769–1779.
8. А. А. Белов, *Численное обнаружение и исследование сингулярностей решения дифференциальных уравнений.* — Доклады Академии наук, **467**, No. 1 (2016), 21–25.
9. М. Д. Малых, *О приближенном решении дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически.* — Вестник РУДН. Сер. математика, информатика, физика, No. 3 (2015), 5–9.
10. L. Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane.* — Bologna: Gamberini e Parmeggiani (1862).
11. К. Зигель, Ю. Мозер, Лекции по небесной механике. R&C (2001).
12. L. Schlesinger, *Vorlesungen uber lineare Differentialgleichungen.* — Leipzig und Berlin: Teubner (1908).
13. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц. М.: Наука (1967).
14. H. Umemura, *Birational automorphism groups and differential equations.* — Nagoya Math. J., **119** (1990), 1–80.
15. М. Д. Малых, *О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **432** (2015), 196–223.
16. М. Д. Малых, *О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы.* — Вестник НИЯУ МИФИ. **5**, No. 2, 152–161.
17. Ю. Б. Сурис, *Гамильтоновы методы типа Рунге-Кутты и их вариационная трактовка.* — Математическое моделирование. **2**, No. 4 (1990), 78–87.
18. М. Н. Геворкян, *Конкретные реализации симплектических численных методов.* — Вестник РУДН, Информатика. Математика. Физика., No. 1 (2013), 89–96.
19. E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations.* — Springer series in computational mathematics. Springer (2006).
20. J. M. Sanz-Serna, *Symplectic Runge–Kutta Schemes for Adjoint Equations, Automatic Differentiation, Optimal Control, and More.* — SIAM Review., **58**, No. 1 (2016), 3–33.

Ayryan E. A., Malykh M. D., Sevastyanov L. A. Differential schemes for the ordinary differential equations defining a projective correspondence between layers.

It is well known that there are remarkable differential equations which can be integrated in CAS, but there are several inequivalent approaches for description of these differential equations. In our work we want to discuss remarkable differential equations in another sense: for these equations there exist finite difference schemes which conserve algebraic properties of solutions exactly. It should be noted that this class of differential equations coincides with the class introduced by Painlevé. In terms of Cauchy problem a differential equation of this class defines an algebraic correspondence between initial and terminal values. For example Riccati equation $y' = p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ defines one-to-one correspondence between initial and terminal values of y on projective line. However, standard finite difference schemes do not conserve this algebraic property of exact solution. Furthermore, the scheme, which defines one-to-one correspondence between layers, truly describes solution not only before but also after mobile singularities and conserves algebraic properties of equations like the anharmonic ratio. After necessary introduction (sections 1 and 2) we describe such one-to-one scheme for Riccati equation and prove its properties mentioned above.

Поступило 14 августа 2018 г.

Лаборатория
информационных технологий ОИЯИ
E-mail: ayrjan@jinr.ru

Кафедра прикладной информатики
и теории вероятностей
Российского университета
дружбы народов
E-mail: malykh_md@rudn.university

Кафедра прикладной информатики
и теории вероятностей
Российского университета
дружбы народов;
Лаборатория теоретической физики ОИЯИ
E-mail: sevastianov_la@rudn.university