Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

А. Л. Чистов

СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРАМИ, ИЛИ ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 33 ГОДА СПУСТЯ. II

Введение ко второй части

Данная статья продолжает работу [8] и является второй частью в серии из трёх. Во всех частях нумерация теорем (соответственно лемм, разделов и т.д.) единая. Она продолжается из [8] и далее из настоящей статьи в третьей части, которая будет подготовлена к печати. Например, в этой статье ссылка на лемму 6 означает ссылку на лемму 6 работы [8]. Аналогично раздел 3 означает здесь раздел 3 из работы [8]. Список литературы в данной статье совпадает (за исключением ссылки на первую часть [8], которая здесь добавлена) со списком литературы из [8]. В данной статье мы доказываем теорему 1. В последней третьей части статьи мы докажем теорему 2.

В настоящей второй части мы используем конструкцию для решения систем полиномиальных уравнений с конечным числом решений в проективном пространстве, описанную в разделе 3. Для того чтобы получить алгоритм в общем случае, нам фактически потребуется только часть этой конструкции до замечания 6 (в частности, мы не будем использовать дерево T_0, введённое в разделе 3). Конечно, для доказательства теоремы 1 в полной общности нужны также и многие другие идеи.

Для того чтобы доказать утверждение (d) теоремы 1, нам необходимо будет использовать оценки на длины записи коэффициентов абсолютно неприводимых множителей параметрических многочленов с целыми коэффициентами. К сожалению, мы забыли дать такие оценки в формулировке теоремы 1 работы [6]. Однако они получаются непосредственно. Именно, в условиях теоремы 1 работы [6] справедливо следующее утверждение.

Ключевые слова: параметрические коэффициенты, стратификации, абсолютно неприводимые компоненты, решение систем полиномиальных уравнений.

(c) Предположим, что $k = \mathbb{Q}$,

$$f \in \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_\nu, X_1, \ldots, X_n]$$

и $\mathrm{l}(f) \leqslant M$ для некоторого действительного числа $M > 0$. Тогда все полиномы $\psi^{(\beta)}_{\alpha,1}, \ldots, \psi^{(\beta)}_{\alpha,m_{\alpha,\beta}}$, $\lambda_{\alpha,0}, \lambda_{\alpha,1}$, H_j, F_j, f_j имеют целые коэффициенты с длинами записи $(M + n + \nu \log d')d^{O(1)}$ с абсолютной константой в $O(1)$.

Доказательство этого утверждения немедленно следует из конструкции, описанной в [6] (мы оставляем подробности читателю; возможно, в [6] требуются незначительные модификации, чтобы получить утверждение (c)).

Для лучшего понимания отметим здесь, что во многих случаях, чтобы доказать верхнюю оценку на длины записи целых коэффициентов $\mathrm{l}(\Psi)$ некоторого многочлена Ψ, мы оцениваем логарифм суммы абсолютных величин коэффициентов этого многочлена Ψ. Это даёт a fortiori требуемую верхнюю оценку на $\mathrm{l}(\Psi)$.

Например, пусть мы имеем квадратную матрицу $(\psi_{i,j})_{\leqslant i,j \leqslant N}$ размера $N \times N$, где $\psi_{i,j} \in \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_\nu, X_1, \ldots, X_n]$, $\mathrm{l}(\psi_{i,j}) < M$ и

$$\deg_{a_1,\ldots,a_n} \psi_{i,j} < d', \quad \deg_{X_1,\ldots,X_n} \psi_{i,j} < d \quad \text{для всех} \quad i, j,$$

и хотим оценить длины записи целых коэффициентов определителя $\det((\psi_{i,j})_{\leqslant i,j \leqslant N})$. Тогда мы поступаем следующим образом. Сумма абсолютных величин целых коэффициентов каждого многочлена $\psi_{i,j}$ ограничена сверху числом $2^M d^n (d')^\nu$. Поэтому сумма абсолютных величин целых коэффициентов определителя ограничена сверху числом $N! 2^{MN} d^{nN} (d')^{\nu N}$. Его логарифм ограничен сверху величиной

$$(M + n \log d + \nu \log d')N^{O(1)}.$$

Следовательно, та же самая оценка справедлива для длин записи целых коэффициентов этого определителя.

Для того чтобы доказать утверждение (d) теоремы 1, нам потребуется также замечание о лемме 2 из раздела 1. Именно,

(†) В условиях леммы 2 предположим, что $\mathrm{char}(k) = 0$. Тогда можно выбрать матрицы $B_i \in M_{r,n}(\mathbb{Z})$ и $C_j \in M_{m,r}(\mathbb{Z})$ так, что все коэффициенты $b_{i,\alpha,\beta}$ матриц B_i имеют длины записи, ограниченные сверху величиной $n^{O(1)}$, и все коэффициенты $c_{j,\alpha,\beta}$ матриц C_j имеют длины записи, ограниченные сверху величиной $m^{O(1)}$, с абсолютной константой в $O(1)$.

Это немедленно следует из доказательства указанной леммы и работы [9]. Более точно, конструкция из [9] является явной. Согласно [9], матрицы D_j из доказательства леммы 2 могут быть выбраны с целыми коэффициентами с длинами записи, ограниченными сверху величиной $m^{O(1)}$ с абсолютной константой в $O(1)$. Поэтому все коэффициенты $c_{j,\alpha,\beta}$ матриц C_j имеют длины записи, ограниченные сверху величиной $m^{O(1)}$. Аналогично все коэффициенты $b_{i,\alpha,\beta}$ матриц B_i имеют длины записи, ограниченные сверху величиной $n^{O(1)}$.

Заметим, что мы уже неявно использовали эти утверждения (c) и (†) в [8], чтобы доказать утверждение (d) для ослабленной (и ослабленной модифицированной) теоремы 1 с $c = 0$. Мы хотели бы снова подчеркнуть, что в данной второй части статьи нам не потребуются эти результаты для частного случая $c = 0$. В [8] мы доказали их только для того, чтобы продемонстрировать силу и возможности развитой техники.

В заключение этого короткого введения мы хотели бы исправить опечатки, замеченные в [8]:

1) в формулировке условия (x) из введения необходимо везде заменить max на $\max_i$;

2) в разделе 4 в формулировке свойства (α_{n-c}) необходимо заменить $d_w - d_{i-1}$ на $d_{i-1} - d_w$.

3) в разделе 4 в формуле (27) необходимо заменить

$$\widetilde{h}_{a^*,j} = \sum_{j\leqslant w\leqslant m-1} q_{j,w} f_{a^*,w}$$

на

$$\widetilde{h}_{a^*,j} = f_{a^*,j-1} + \sum_{j\leqslant w\leqslant m-1} q_{j,w} f_{a^*,w}.$$

Эти опечатки легко могут быть исправлены, исходя из контекста.

Теперь мы готовы перейти к следующему разделу статьи.

§5. Несколько лемм

В этом разделе c – целое число, $-1 \leqslant c \leqslant n-1$. Пусть q – целое число, $0 \leqslant q \leqslant c$. Рассмотрим многочлены $h_{a^*,1}, \dots, h_{a^*,n-q} \in k_{a^*}[X_0, \dots, X_n]$, удовлетворяющие условию (α_{n-q}), см. раздел 4, и следующему свойству:

(γ'_{n-q}) $\mathcal{Z}(h_{a^*,1},\dots,h_{a^*,n-q}) = V'''_{a^*,q} \cup \bigcup_{q\leqslant s\leqslant c} V_{a^*,s}$, где многообразия $V_{a^*,s}$ определены во введении и $V'''_{a^*,q}$ – проективное алгебраическое многообразие, такое, что $\dim V'''_{a^*,q} = q$ или $V'''_{a^*,q} = \varnothing$.

Таким образом, каждая неприводимая компонента алгебраического многообразия $V'''_{a^*,q}$ имеет размерность q.

Пусть ε – новая переменная. Пусть $\mathbb{A}^1(\overline{k})$ имеет координатную функцию ε и прямое произведение $\mathbb{P}^n(\overline{k}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k})$ имеет координаты $((X_0 : \ldots : X_n), \varepsilon)$. Мы отождествляем $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ с подмногообразием $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k})$. Рассмотрим алгебраическое многообразие

$$\mathcal{Z}\Big(h_{a^*,1} - \varepsilon X_0^{d_0}, \ldots, h_{a^*,n-q} - \varepsilon X_{n-q-1}^{d_{n-q-1}}\Big). \tag{28}$$

Оно является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}^n(\overline{k}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k})$. Обозначим через $\overline{V}_{a^*,q}$ объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E алгебраического многообразия (28), таких, что E не содержится ни в какой гиперплоскости $\mathcal{Z}(\varepsilon - c)$, $c \in \overline{k}$. Положим $V''_{a^*,q} = \overline{V}_{a^*,q} \cap \mathcal{Z}(\varepsilon) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$. Легко доказать (ср. [2]), что каждая неприводимая компонента многообразия $V''_{a^*,q}$ имеет размерность $n-q$ и $V''_{a^*,q} \supset V_{a^*,q} \cup V'''_{a^*,q}$. Обозначим через $V'_{a^*,q}$ объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия V''_{a^*}, таких, что $E \subset \mathcal{Z}(f_{a^*,0},\dots,f_{a^*,m-1})$. Таким образом, $V''_{a^*,q} \supset V'_{a^*,q} \supset V_{a^*,q}$. Более того, очевидно, замыкание множества $V'_{a^*,q} \setminus \left(\bigcup_{q+1\leqslant s\leqslant c} V'_{a^*,s}\right)$ относительно топологии Зарисского в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ совпадает с $V_{a^*,q}$. Обозначим через $V''''_{a^*,q}$ объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E алгебраического многообразия $V'_{a^*,q}$, таких, что $E \not\subset V_{a^*,q}$. Таким образом, мы имеем $V'_{a^*,q} = V_{a^*,q} \cup V''''_{a^*,q}$ и $V''_{a^*,q} = V_{a^*,q} \cup V'''_{a^*,q} \cup V''''_{a^*,q}$, и каждая неприводимая компонента алгебраического многообразия $V''_{a^*,q}$ является неприводимой компонентой только одного из многообразий $V_{a^*,q}, V'''_{a^*,q}, V''''_{a^*,q}$.

В дальнейшем $s = q$. В этом разделе $Y_0,\dots,Y_n \in k[X_0,\dots,X_n]$ – произвольные линейно независимые над k линейные формы от $X_0,\dots,X_n$ (мы сейчас не предполагаем, что $(Y_0,\dots,Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$).

Расширим основное поле k до $k(\varepsilon)$. Обозначим через $\widetilde{V}_{a^*,s}$ алгебраическое многообразие (28), рассматриваемое как подмногообразие в $\mathbb{P}^n(\overline{k(\varepsilon)})$.

Пусть $t_1, \dots, t_s$ – алгебраически независимые над k элементы. Пусть $k^\circ = k(t_1, \dots, t_s)$, $k^\circ_{a^*} = k_{a^*}(t_1, \dots, t_s)$ и $\overline{k}^\circ = \overline{k}(t_1, \dots, t_s)$ – чисто трансцендентные расширения полей k, k_{a^*} и $\overline{k}$ соответственно.

Пусть $Y_i = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} y_{i,j} X_j$, $0 \leqslant i \leqslant n$, где $y_{i,j} \in \overline{k}$. Положим

$$\delta^{(0)} = \det((y_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}). \tag{29}$$

Тогда $\delta^{(0)} \neq 0$. Для произвольного многочлена $g \in \overline{k(\varepsilon)}[X_0, \dots, X_n]$ мы определяем многочлены

$$g^{(0)} \in \overline{k(\varepsilon)}[Y_0, \dots, Y_n] \quad \text{и} \quad g^\circ \in \overline{k(\varepsilon)}[Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n].$$

Именно,

$$g^{(0)}(Y_0, \dots, Y_n) = (\delta^{(0)})^{\deg_{X_0,\dots,X_n} g} g$$

и

$$g^\circ = g^{(0)}(Y_0, t_1 Y_0, \dots, t_s Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n).$$

Следовательно, если многочлен g однороден относительно $X_0, \dots, X_n$, то g° является однородным многочленом относительно $Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n$ с коэффициентами из $\overline{k(\varepsilon)}(t_1, \dots, t_s)$. Если $g \in \overline{k}[\varepsilon, X_0, \dots, X_n]$, то, очевидно, $g^\circ \in \overline{k}^\circ[\varepsilon, X_0, \dots, X_n]$.

Пусть проективное алгебраическое многообразие $\mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ(\varepsilon)})$ (а также $\mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ}))$ имеет однородные координатные функции

$$Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n.$$

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_{m_1} \in k_{a^*}[\varepsilon, X_0, \dots, X_n]$ – однородные многочлены относительно $X_0, \dots, X_n$, такие, что $\overline{V}_{a^*,s} = \mathcal{Z}(\varphi_1, \dots, \varphi_{m_1})$. Положим $\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s}) = \mathcal{Z}(\varphi_1, \dots, \varphi_{m_1}) \subset \mathbb{A}^{n+1}(\overline{k}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k})$, где $\mathbb{A}^{n+1}(\overline{k})$ имеет координатные функции $X_0, \dots, X_n$ и $\mathbb{A}^1(\overline{k})$ имеет координатную функцию ε. Очевидно, неприводимые компоненты многообразий $V_{a^*,s}$ и $\mathrm{con}(V_{a^*,s})$ находятся во взаимно однозначном соответствии.

Положим $\overline{\varphi}_i = \varphi_i(0, X_0, \dots, X_n)$, $1 \leqslant i \leqslant m_1$. Тогда, очевидно, $V''_{a^*,s} = \mathcal{Z}(\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_{m_1})$. Положим

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{a^*,s} &= \mathcal{Z}(\varphi_1^\circ, \dots, \varphi_{m_1}^\circ) \subset \mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k^\circ}),\\
\widetilde{C}_{a^*,s} &= \mathcal{Z}(\varphi_1^\circ, \dots, \varphi_{m_1}^\circ) \subset \mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ(\varepsilon)}),\\
C''_{a^*,s} &= \overline{C}_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(\varepsilon) = \mathcal{Z}(\overline{\varphi}_1^\circ, \dots, \overline{\varphi}_{m_1}^\circ) \subset \mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ}).
\end{aligned}$$

Аналогично многообразию $\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s})$ мы определяем многообразия

$$\mathrm{con}(\overline{C}_{a^*,s}) = \mathcal{Z}(\varphi_1^\circ, \dots, \varphi_{m_1}^\circ) \subset \mathbb{A}^{n-s+1}(\overline{k^\circ}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k^\circ}),$$
$$\mathrm{con}(\widetilde{C}_{a^*,s}) = \mathcal{Z}(\varphi_1^\circ, \dots, \varphi_{m_1}^\circ) \subset \mathbb{A}^{n-s+1}(\overline{k^\circ(\varepsilon)}),$$
$$\mathrm{con}(C''_{a^*,s}) = \mathcal{Z}(\overline{\varphi}_1^\circ, \dots, \overline{\varphi}_{m_1}^\circ) \subset \mathbb{A}^{n-s+1}(\overline{k^\circ}).$$

Здесь везде аффинное пространство $\mathbb{A}^{n-s+1}$ имеет координатные функции $Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n$.

Заметим, что

$$\widetilde{V}_{a^*,s} = \mathcal{Z}(\varphi_1, \dots, \varphi_{m_1}) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k(\varepsilon)})$$

и

$$\widetilde{C}_{a^*,s} = \mathcal{Z}(h^\circ_{a^*,1}, \dots, h^\circ_{a^*,n-s}) \subset \mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ(\varepsilon)}).$$

Лемма 9. *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Пересечение* $\widetilde{V}_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0, Y_1, \dots, Y_s)$ *пусто в* $\mathbb{P}^n(\overline{k(\varepsilon)})$.

(b) $\widetilde{C}_{a^*,s}$ *является конечным подмножеством в* $\mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ(\varepsilon)})$, *и*

$$\widetilde{C}_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0) = \varnothing.$$

(c) *Пересечение* $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0, Y_1, \dots, Y_s)$ *пусто в* $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ *в том и только в том случае, если* $C''_{a^*,s}$ *является конечным подмножеством в* $\mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ})$ *и* $C''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0) = \varnothing$.

Доказательство. Искомые утверждения получаются непосредственно. Например, фактически утверждение (a) следует из того, что

$$\mathcal{Z}(X_0, X_1, \dots, X_{n-s-1}, Y_0, \dots, Y_s) = \varnothing$$

в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Утверждение (b) эквивалентно утверждению (a), а значит, также истинно. □

Обозначим через $\mathcal{E}_1$ множество всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент алгебраического многообразия $\overline{V}_{a^*,s}$.

Обозначим через $\mathcal{E}_5$ множество всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент алгебраического многообразия $V''_{a^*,s}$.

Для всякого аффинного алгебраического многообразия W, определённого над полем K, обозначим через $K[W]$ кольцо регулярных функций многообразия W, определённых над K, и через $K(W)$ полное кольцо частных кольца $K[W]$.

Следующие утверждения (I)–(IV) получаются непосредственно. Их подробные доказательства мы оставляем читателю.

(I) Обозначим через $\mathcal{E}_2$ множество всех определённых и неприводимых над $\overline{k}(\varepsilon)$ компонент алгебраического многообразия $\widetilde{V}_{a^*,s}$. Положим S_2 равным мультипликативно замкнутому множеству $\overline{k}[\varepsilon]\setminus\{0\}$. Тогда по определению алгебраического многообразия $\overline{V}_{a^*,s}$ алгебраическое многообразие $\mathrm{con}(\widetilde{V}_{a^*,s})$ определено над полем $\overline{k}(\varepsilon)$, и можно отождествить кольцо регулярных функций $\overline{k}(\varepsilon)[\mathrm{con}(\widetilde{V}_{a^*,s})]$ с кольцом $S_2^{-1}\overline{k}[\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s})]$ (это локализация кольца $\overline{k}[\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s})]$ относительно мультипликативно замкнутого множества S_2). Следовательно, полное кольцо частных $\overline{k}(\varepsilon)(\mathrm{con}(\widetilde{V}_{a^*,s}))$ совпадает с $\overline{k}(\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s}))$. Поэтому существует естественная биекция $\iota_{1,2}:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_2$, и $\widetilde{V}_{a^*,s}=\bigcup_{W\in\mathcal{E}_2}W$.

(II) Обозначим через $\mathcal{E}_3$ множество всех определённых и неприводимых над $\overline{k}^{\circ}$ компонент алгебраического многообразия $\overline{C}_{a^*,s}$. По лемме 9(a) можно провести отождествление

$$t_i=Y_i/Y_0\in\overline{k}(\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s})),\quad 1\leqslant i\leqslant s,\tag{30}$$

т.е. функции Y_i/Y_0, $1\leqslant i\leqslant s$, из кольца $\overline{k}(\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s}))$ алгебраически независимы над $\overline{k}$. Положим S_3 равным мультипликативно замкнутому множеству $\overline{k}[t_1,\dots,t_s]\setminus\{0\}$. Тогда многообразие $\overline{C}_{a^*,s}$ определено над полем $\overline{k}^{\circ}$, и можно отождествить кольцо регулярных функций $\overline{k}^{\circ}[\mathrm{con}(\overline{C}_{a^*,s})]$ с $S_3^{-1}\overline{k}[\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s})][t_1,\dots,t_s]$. Следовательно, полное кольцо частных $\overline{k}^{\circ}(\mathrm{con}(\overline{C}_{a^*,s}))$ совпадает с $\overline{k}(\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s}))$. Поэтому существует естественная биекция $\iota_{1,3}:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_3$, и

$$\overline{C}_{a^*,s}=\bigcup_{W\in\mathcal{E}_3}W.$$

(III) Обозначим через $\mathcal{E}_4$ множество всех определённых и неприводимых над $\overline{k}^{\circ}(\varepsilon)$ компонент алгебраического многообразия $\widetilde{C}_{a^*,s}$. Положим S_4 равным мультипликативно замкнутому множеству $\overline{k}[\varepsilon,t_1,\dots,t_s]\setminus\{0\}$. Тогда $\widetilde{C}_{a^*,s}$ определено над полем $\overline{k}^{\circ}(\varepsilon)$, и, принимая во внимание (30), можно отождествить кольцо регулярных функций $\overline{k}^{\circ}(\varepsilon)[\mathrm{con}(\widetilde{C}_{a^*,s})]$ с $S_4^{-1}\overline{k}[\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s})][t_1,\dots,t_s]$. Следовательно, полное кольцо частных $\overline{k}^{\circ}(\varepsilon)(\mathrm{con}(\widetilde{C}_{a^*,s}))$ совпадает с $\overline{k}(\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s}))$. Поэтому существует естественная биекция $\iota_{1,4}:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_4$, и $\widetilde{C}_{a^*,s}=\bigcup_{W\in\mathcal{E}_4}W$.

(IV) Обозначим через $\mathcal{E}_6$ множество всех определённых и неприводимых над $\overline{k}^\circ$ компонент алгебраического многообразия $C''_{a^*,s}$. Предположим, что $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0, \ldots, Y_s) = \varnothing$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k})$. По лемме 9(c) можно провести отождествление

$$t_i = Y_i/Y_0 \in \overline{k}(\mathrm{con}(V''_{a^*,s})), \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{31}$$

Положим S_6 равным мультипликативно замкнутому множеству $\overline{k}[t_1, \ldots, t_s] \setminus \{0\}$. Тогда многообразие $C''_{a^*,s}$ определено над полем $\overline{k}^\circ$, и можно отождествить кольцо регулярных функций $\overline{k}^\circ[\mathrm{con}(C''_{a^*,s})]$ с $S_6^{-1}\overline{k}[\mathrm{con}(V''_{a^*,s})][t_1, \ldots, t_s]$. Следовательно, полное кольцо частных $\overline{k}^\circ(\mathrm{con}(C''_{a^*,s}))$ совпадает с $\overline{k}(\mathrm{con}(\overline{V}_{a^*,s}))$. Поэтому существует естественная биекция $\iota_{5,6} : \mathcal{E}_5 \to \mathcal{E}_6$, и $C''_{a^*,s} = \bigcup\limits_{W \in \mathcal{E}_6} W$.

Пусть $K \supset \overline{k}$ – расширение основного поля, линейно раздельное с $\overline{k}(\varepsilon)$ над $\overline{k}$. Положим $K^\circ = K(t_1, \ldots, t_s)$. Пусть $L \in K[X_0, \ldots, X_n]$ – линейные формы с коэффициентами из поля K. Следовательно, $L^\circ \in K^\circ[Y_0, Y_{s+1}, \ldots, Y_n]$.

Пусть $W \in \mathcal{E}_4$. Тогда компонента W определена и неприводима над полем $K^\circ(\varepsilon)$ согласно (III). Поэтому для всякой компоненты $W \in \mathcal{E}_4$ существует неприводимый над K многочлен $\Phi_W \in K[\varepsilon, t_1, \ldots, t_s, Y_0, Z]$, такой, что $\Phi_W(\varepsilon, t_1, \ldots, t_s,\ Y_0, L^\circ)$ обращается в нуль тождественно на W. Многочлен Φ_W однозначно определён с точностью до ненулевого множителя из K. Он однороден относительно Y_0, Z, и по лемме 9(b) имеем $\mathrm{lc}_Z\Phi_W \in K[t_1, \ldots, t_s, \varepsilon]$ и $\deg_Z \Phi_W \geqslant 1$. Пусть $\eta \in W$. Тогда, очевидно, $\Phi_W(\varepsilon,\ t_1, \ldots, t_s, 1, Z)$ является минимальным многочленом элемента $(L^\circ/Y_0)(\eta)$ над полем $K^\circ(\varepsilon)$. Обратно, если $\Psi_W \in K[\varepsilon, t_1, \ldots, t_s, Z]$ – минимальный многочлен элемента $(L^\circ/Y_0)(\eta)$ над полем $K^\circ(\varepsilon)$, то его гомогенизация $Y_0^{\deg_Z \Psi_W}\Psi_W(\varepsilon, t_1, \ldots, t_s, Z/Y_0)$ совпадает с Φ_W с точностью до ненулевого множителя из $K^\circ(\varepsilon)$. Положим $\Phi_W^\vee = \Phi_W(\varepsilon, Y_1/Y_0, \ldots, Y_s/Y_0, Y_0, Z)$. Мы будем писать $\Phi_W = \Phi_{W,L}$, $\Phi_W^\vee = \Phi_{W,L}^\vee$, $\Psi_W = \Psi_{W,L}$, когда важна зависимость от L.

Предположим, что $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0, \ldots, Y_s) = \varnothing$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Пусть $W \in \mathcal{E}_6$. Тогда компонента W определена и неприводима над полем K° согласно (IV). Поэтому для всякой компоненты $W \in \mathcal{E}_6$ существует неприводимый над K многочлен $\Phi_W \in K[t_1, \ldots, t_s, Y_0, Z]$, такой, что многочлен $\Phi_W(t_1, \ldots, t_s, Y_0, L^\circ)$ обращается в нуль тождественно на W.

Многочлен Φ_W однозначно определён с точностью до ненулевого множителя из K. Он однороден относительно Y_0, Z, и по лемме 9(c) имеем $\mathrm{lc}_Z\Phi_W \in K[t_1,\dots,t_s]$ и $\deg_Z \Phi_W \geqslant 1$. Пусть $\eta \in W$. Тогда, очевидно, $\Phi_W(t_1,\dots,t_s,1,Z)$ является минимальным многочленом элемента $(L^\circ/Y_0)(\eta)$ над полем K°. Обратно, если $\Psi_W \in K[t_1,\dots,t_s,Z]$ – минимальный многочлен элемента $(L^\circ/Y_0)(\eta)$ над полем K°, то его гомогенизация $Y_0^{\deg_Z \Psi_W}\Psi_W(t_1,\dots,t_s,Z/Y_0)$ совпадает с Φ_W с точностью до ненулевого множителя из K°. Положим

$$\Phi_W^\vee = \Phi_W(Y_1/Y_0,\dots,Y_s/Y_0,Y_0,Z).$$

Мы будем писать $\Phi_W = \Phi_{W,L}$, $\Phi_W^\vee = \Phi_{W,L}^\vee$, $\Psi_W = \Psi_{W,L}$, когда важна зависимость от L.

Лемма 10. (a) *Пусть $W \in \mathcal{E}_4$, $\eta \in W$ и $\iota_{1,4}(W') = W$, см.* (III). *Тогда в предыдущих обозначениях $\mathrm{lc}_Z\Phi_W \in K[\varepsilon]$. Следовательно, элемент $(L/Y_0)(\eta)$ цел над кольцом $K(\varepsilon)[t_1,\dots,t_s]$. Далее, мы имеем $\Phi_W^\vee \in K[\varepsilon,Y_0,\dots,Y_s,Z]$. Многочлен $\Phi_W^\vee$ неприводим в кольце $K[\varepsilon,Y_0,\dots,Y_s,Z]$, и $\Phi_W^\vee(\varepsilon,Y_0,\dots,Y_s,L)$ обращается в нуль тождественно на многообразии W'. Кроме того, $\mathrm{lc}_Z\Phi_W^\vee \in K[\varepsilon]$.*

(b) *Предположим, что $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0,\dots,Y_s) = \varnothing$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Пусть $W \in \mathcal{E}_6$, $\eta \in W$ и $\iota_{5,6}(W') = W$, см.* (IV). *Тогда в предыдущих обозначениях $\mathrm{lc}_Z\Phi_W \in K$. Следовательно, элемент $(L/Y_0)(\eta)$ цел над кольцом $K[t_1,\dots,t_s]$. Далее, многочлен $\Phi_W^\vee \in K[Y_0,\dots,Y_s,Z]$ неприводим (в этом кольце), $\Phi_W^\vee(Y_0,\dots,Y_s,L)$ обращается в нуль тождественно на многообразии W', и $\mathrm{lc}_Z\Phi_W^\vee \in K$.*

Доказательство. (a) Действительно, можно представить $\Phi_W^\vee$ в виде $\Phi_W^\vee = Q/Y_0^e$, где многочлен $Q \in K[\varepsilon,Y_0,\dots,Y_s,Z]$ неприводим, $Q \neq \lambda Y_0$ для $\lambda \in K$ и e – неотрицательное целое число. Многочлен $Q(\varepsilon,Y_0,\dots,Y_s,L)$ обращается в нуль тождественно на W' согласно (III). Если $e \geqslant 1$ или $\mathrm{lc}_Z\Phi_W \notin K[\varepsilon]$, то $\mathrm{lc}_Z Q \notin K[\varepsilon]$. Это противоречит лемме 9(a) и доказывает утверждение (a).

Доказательство утверждения (b) аналогично, и мы оставляем его читателю. □

Следствие 1. *Предположим, что $K = \overline{k}(t)$, где t – трансцендентный элемент над полем $\overline{k}^\circ(\varepsilon)$. Предположим, что $L = L_1 + tL_2$, где $L_1, L_2 \in \overline{k}[X_0,\dots,X_n]$ – линейные формы.*

(a) *В условиях леммы* 10(a) *можно выбрать многочлен*

$$\Phi_{W,L} \in \overline{k}[t,\varepsilon,t_1,\dots,t_s,Y_0,Z]$$

так, что $\Phi_{W,L}$ *неприводим в последнем кольце и* $\mathrm{lc}_Z\Phi_{W,L} \in k[\varepsilon]$. *Для такого выбора мы имеем* $\Phi_{W,L}|_{t=0} = \lambda\Phi^e_{W,L_1}$, *где* $0 \neq \lambda \in \overline{k}[\varepsilon]$ *и* $e = e_{W,L_1,L_2} \geqslant 1$. *Поэтому*

$$\Phi_{W,L}|_{t=0}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L}) = (\Phi_{W,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}))^e.$$

(b) *Далее, в условиях леммы* 10(b) *можно выбрать многочлен*

$$\Phi_{W,L} \in \overline{k}[t, t_1, \ldots, t_s, Y_0, Z]$$

так, что $\Phi_{W,L}$ *неприводим в последнем кольце и* $\mathrm{lc}_Z\Phi_{W,L} \in \overline{k}$. *Для такого выбора мы имеем* $\Phi_{W,L}|_{t=0} = \lambda\Phi^e_{W,L_1}$, *где* $0 \neq \lambda \in \overline{k}$ *и* $e = e_{W,L_1,L_2} \geqslant 1$. *Поэтому*

$$\Phi_{W,L}|_{t=0}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L}) = (\Phi_{W,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}))^e.$$

Доказательство. (a) По лемме 10(a) элементы $(L_i/Y_0)(\eta)$, $i = 1, 2$, являются целыми над кольцом $\overline{k}(\varepsilon)[t_1, \ldots, t_s]$. Следовательно, элемент $((L_1 + tL_2)/Y_0)(\eta)$ цел над кольцом $\overline{k}(\varepsilon)[t, t_1, \ldots, t_s]$. Поэтому можно выбрать многочлен $\Psi_{W,L} \in \overline{k}[\varepsilon, t, t_1, \ldots, t_s, Z]$ так, что $\mathrm{lc}_Z\Psi_{W,L} \in \overline{k}[\varepsilon]$. Мы выбираем $\Phi_{W,L}$ равным гомогенизации многочлена $\Psi_{W,L}$, см. выше. Тогда, очевидно, $\mathrm{lc}_Z\Phi_{W,L} \in \overline{k}[\varepsilon]$ и $\Phi_{W,L}$ неприводим в кольце

$$\overline{k}[\varepsilon, t, t_1, \ldots, t_s, Y_0, Z].$$

Каждый корень многочлена $\Psi_{W,L}$ имеет вид $Z = ((L_1+tL_2)/Y_0)(\eta^{(1)})$, где $\eta^{(1)} \in W$. Следовательно, каждый корень многочлена $\Psi_{W,L}|_{t=0}$ имеет вид $Z = (L_1/Y_0)(\eta^{(1)})$, где $\eta_1 \in W$. Многочлен Ψ_{W,L_1} неприводим в кольце $\overline{k}[\varepsilon, t_1, \ldots, t_s, Z]$. Поэтому $\Psi_{W,L}|_{t=0} = \lambda\Psi^e_{W,L_1}$, где $0 \neq \lambda \in \overline{k}[\varepsilon]$ и $e \geqslant 1$. Остаётся взять гомогенизацию последнего равенства. Утверждение (a) доказано.

Доказательство утверждения (b) аналогично, и мы оставляем его читателю. □

Замечание 9. В дальнейшем для $W \in \mathcal{E}_4$ и $L = L^{(1)} + tL^{(2)}$ (для произвольных линейных форм $L^{(1)}, L^{(2)} \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_n]$), используя обозначение $\Phi_{W,L}$, мы будем всегда предполагать, что многочлен

$$\Phi_{W,L} \in \overline{k}[\varepsilon, t, t_1, \ldots, t_s, Y_0, Z]$$

неприводим в этом кольце.

Предположим, что $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0, \ldots, Y_s) = \varnothing$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Тогда аналогично для $W \in \mathcal{E}_6$ и $L = L^{(1)} + tL^{(2)}$, используя обозначение $\Phi_{W,L}$, мы будем всегда предполагать, что многочлен $\Phi_{W,L} \in \overline{k}[t, t_1, \dots, t_s, Y_0, Z]$ неприводим в этом кольце.

Пусть $L_1 \in k[X_0, \dots, X_n]$ – линейная форма. Пусть $W \in \mathcal{E}_4$ и $\iota_{1,4}(W') = W$, $\iota_{1,3}(W') = W''$. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_{m_2} \in \overline{k}[\varepsilon, X_0, \dots, X_n]$ – многочлены, такие, что $W' = \mathcal{Z}(\psi_1, \dots, \psi_{m_2})$. Положим

$$\overline{\psi}_i = \psi_i(0, X_0, \dots, X_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant m_2.$$

Тогда $W = \mathcal{Z}(\psi_1^\circ, \dots, \psi_{m_2}^\circ)$ и $W'' \cap \mathcal{Z}(\varepsilon) = \mathcal{Z}(\overline{\psi}_1^\circ, \dots, \overline{\psi}_{m_2}^\circ)$. Положим

$$\Delta_1 = \Delta_{k_{a^*}^\circ(\varepsilon); Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n; \psi_1^\circ, \dots, \psi_{m_2}^\circ; Y_0, L_1^\circ} \in k_{a^*}^\circ(\varepsilon)[U_0, U_1],$$

$$\Delta_2 = \Delta_{k_{a^*}^\circ; Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n; \overline{\psi}_1^\circ, \dots, \overline{\psi}_{m_2}^\circ; Y_0, L_1^\circ} \in k_{a^*}^\circ[U_0, U_1],$$

$$\Delta_3 = \Delta_{k_{a^*}^\circ(\varepsilon); Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n; h_{a^*,1}^\circ, \dots, h_{a^*,s}^\circ; Y_0, L_1^\circ} \in k_{a^*}^\circ(\varepsilon)[U_0, U_1],$$

см. обозначение в замечании 6 из раздела 3.

Лемма 11. (a)

$$\Delta_3(Z, -Y_0) = \prod_{W \in \mathcal{E}_4} (\Phi_{W,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}))^{e'_{W,L_1}}$$

для некоторых целых чисел $e'_{W,L_1} \geqslant 1$.

(b) *Предположим, что* $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0, \dots, Y_s) = \varnothing$ *в* $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ (*см. также лемму* 9(c)). *Тогда*

$$\Delta_2(Z, -Y_0) = \prod_{W_1 \in \mathcal{E}_6,\, W_1 \subset W''} (\Phi_{W_1,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W_1,L_1}))^{e_{W,W_1,L_1}}$$

для некоторых целых чисел $e_{W,W_1,L_1} \geqslant 1$.

(c) $\Delta_1(Z, -Y_0) = (\Phi_{W,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}))^{e''_{W,L_1}}$ *для некоторых целых чисел* $e''_{W,L_1} \geqslant 1$.

Доказательство. (a) Пусть $L_2 \in k[X_0, \dots, X_n]$ – линейная форма, такая, что $(L_2/Y_0)(\eta_1) \neq (L_2/Y_0)(\eta_2)$ для всех попарно различных $\eta_1, \eta_2 \in \widetilde{C}_{a^*,s}$. Положим $L = L_1 + tL_2$ и

$$\Delta_4 = \Delta_{k_{a^*}^\circ(\varepsilon,t); Y_0, Y_{s+1}, \dots, Y_n; h_{a^*,1}^\circ, \dots, h_{a^*,s}^\circ; Y_0, L^\circ} \in k_{a^*}^\circ(\varepsilon, t)[U_0, U_1].$$

Тогда согласно лемме 4 и замечанию 6 мы имеем $\Delta_4 \in k_{a^*}^\circ(\varepsilon)[t, U_0, U_1]$ и $\Delta_4|_{t=0} = \Delta_3$. По лемме 4 и поскольку полиномы $\Phi_{W,L}$, $W \in \mathcal{E}_4$, попарно различны и неприводимы в кольце $\overline{k}^\circ(\varepsilon)[t, Y_0, Z]$, мы имеем

$$\Delta_4(Z, -Y_0) = \prod_{W \in \mathcal{E}_4} (\Phi_{W,L}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L}))^{e'_{W,L}}$$

для некоторых целых чисел $e'_{W,L} \geqslant 1$. Теперь, применяя следствие 1(a), мы устанавливаем утверждение (a).

Доказательства утверждений (b) и (c) аналогичны, и мы оставляем их читателю. □

Лемма 10. *Предположим, что* $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0,\dots,Y_s) = \varnothing$ *в* $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. *Пусть* $W \in \mathcal{E}_4$ *и* $\iota_{1,4}(W') = W$, $\iota_{1,3}(W') = W''$, *и пусть* L_1, Δ_1, Δ_2 *– такие же, как выше. Тогда* $\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1})|_{\varepsilon=0} \neq 0$ *(напомним, что* $\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}) \in \overline{k}[\varepsilon]$*),* $\Delta_1|_{\varepsilon=0} = \Delta_2$ *и*

$$(\Phi_{W,L_1}/(\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1})))|_{\varepsilon=0} = \prod_{\substack{W_1\in\mathcal{E}_6,\\ W_1\subset W''}} (\Phi_{W_1,L_1}/(\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W_1,L_1}))^{e'_{W,W_1,L_1}} \quad (32)$$

для некоторых целых чисел $e'_{W,W_1,L_1} \geqslant 1$.

Доказательство. В разделе 3 определена матрица $\mathcal{A} = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$. Рассмотрим случай $\nu = 0$. В определении матрицы $\mathcal{A}$ с $\nu = 0$ заменим n, k, $(X_0,\dots,X_n)$, $(f_0,\dots,f_{m-1})$, $(Y_0,\dots,Y_n)$ на $n-s$, $\overline{k}^\circ(\varepsilon)$, $(Y_0, Y_{s+1},\dots,Y_n)$, $(\psi_1^\circ,\dots,\psi_{m_2}^\circ)$, $(Y_0, L_1^\circ, 0,\dots,0)$ соответственно. Мы будем обозначать полученную матрицу снова через $\mathcal{A} = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$. Теперь коэффициенты матрицы $\mathcal{A}'$ принадлежат кольцу $k_{a^*}[\varepsilon, t_1,\dots,t_s, Y_0, Y_{s+1},\dots,Y_n]$, а коэффициенты матрицы $\mathcal{A}''$ являются линейными формами от U_0, U_1 с коэффициентами из последнего кольца. Пусть γ – число строк матрицы $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathrm{rank}(\mathcal{A}'|_{\varepsilon=0}) = \gamma'$. Тогда по лемме 4(b) мы имеем

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}|_{\varepsilon=0}) = \gamma,$$

а по лемме 4(c) число корней в $\mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ})$ системы

$$\overline{\psi}_1^\circ = \ldots = \overline{\psi}_{m_2}^\circ = 0 \quad (33)$$

с учетом кратности равно $\gamma - \gamma'$. Пусть $\mathcal{A}'_1$ – подматрица в $\mathcal{A}'$ размера $\gamma \times \gamma'$, такая, что $\mathrm{rank}(\mathcal{A}'_1|_{\varepsilon=0}) = \gamma'$. Пусть $\mathcal{A}''_1$ – подматрица в $\mathcal{A}''$ размера $\gamma \times (\gamma - \gamma')$, такая, что $(\gamma\times\gamma)$–матрица $(\mathcal{A}'_1|_{\varepsilon=0}, \mathcal{A}''_1|_{\varepsilon=0})$ имеет ранг γ. Положим $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}''_1)$. Положим

$$\Delta_W = \det(\mathcal{A}_1) \in k_{a^*}[\varepsilon, t_1,\dots,t_s, U_0, U_1].$$

Это однородный многочлен относительно U_0, U_1.

Тогда по лемме 4(c) многочлен $\Delta_W|_{\varepsilon=0}$ совпадает с Δ_2 с точностью до ненулевого множителя из $k_{a^*}^\circ$. Следовательно, $\Delta_W \neq 0$, и Δ_1 делит Δ_W.

Заметим, что $\mathrm{lc}_{U_0}(\Delta_W) \in \overline{k}[\varepsilon, t_1, \ldots, t_s]$. Мы имеем $Y_0(\eta) \neq 0$ для всякой точки $\eta \in W$ (соответственно $\eta \in W'' \cap \mathcal{Z}(\varepsilon)$). Следовательно, по лемме 4(c) имеем $\deg_{U_0} \Delta_W = \deg_{U_0,U_1} \Delta_W = \deg_{U_0,U_1} \Delta_W|_{\varepsilon=0} = \deg_{U_0,U_1} \Delta_2 = \deg_{U_0} \Delta_2 = \deg_{U_0} \Delta_W|_{\varepsilon} = 0$. Поэтому $(\mathrm{lc}_{U_0}\Delta_W)|_{\varepsilon=0} \neq 0$, многочлен $(\Delta_W/((\mathrm{lc}_{U_0}\Delta_W)))|_{\varepsilon=0}$ определён, и

$$(\Delta_W/((\mathrm{lc}_{U_0}\Delta_W)))|_{\varepsilon=0} = \Delta_2.$$

Покажем, что $\deg_{U_0,U_1} \Delta_W = \deg_{U_0,U_1} \Delta_1$. По лемме 4(c) достаточно доказать, что число δ корней (в $\mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ(\varepsilon)})$, с учетом кратности) системы

$$\psi_1^\circ = \ldots = \psi_{m_2}^\circ = 0 \tag{34}$$

равно числу корней $\overline{\delta}$ (в $\mathbb{P}^{n-s}(\overline{k^\circ})$, с учетом кратности) системы (33). Действительно, $\delta = \deg_{U_0,U_1} \Delta_1$, и $\overline{\delta} = \deg_{U_0,U_1} \Delta_2 = \deg_{U_0,U_1} \Delta_W$. Отметим, что мы доказали, что $\delta \leqslant \overline{\delta}$. Остаётся доказать, что $\delta \geqslant \overline{\delta}$.

Напомним, что $\psi_i^\circ \in \overline{k}^\circ[\varepsilon, Y_0, Y_{s+1}, \ldots, Y_n]$. Положим

$$\psi_i' = \psi_i^\circ(\varepsilon, 1, Y_{s+1}, \ldots, Y_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant m_2.$$

Мы отождествляем кольцо регулярных функций $\overline{k}^\circ[W \setminus \mathcal{Z}(Y_0)]$ с $\overline{k}^\circ(\varepsilon)[Y_{s+1}, \ldots, Y_n]/(\psi_1', \ldots, \psi_{m_2}')$. Теперь, согласно хорошо известному определению кратностей,

$$\delta = \dim_{\overline{k}^\circ(\varepsilon)} \overline{k}^\circ[W \setminus \mathcal{Z}(Y_0)] = \dim_{\overline{k}^\circ(\varepsilon)} \overline{k}^\circ(\varepsilon)[Y_{s+1}, \ldots, Y_n]/(\psi_1', \ldots, \psi_{m_2}').$$

Мы отождествляем кольцо регулярных функций $\overline{k}^\circ[W'' \setminus \mathcal{Z}(Y_0)]$ с $\overline{k}^\circ[\varepsilon, Y_{s+1}, \ldots, Y_n]/(\psi_1', \ldots, \psi_{m_2}')$. Элемент ε не является делителем нуля в кольце $\overline{k}^\circ[W''\setminus \mathcal{Z}(Y_0)]$ по определению многообразия $V''_{a^*,s}$. Мы имеем

$$\overline{\delta} = \dim_{\overline{k}^\circ} \overline{k}^\circ[W''\setminus\mathcal{Z}(Y_0)]/(\varepsilon) = \dim_{k^\circ} \overline{k}^\circ[\varepsilon, Y_{s+1}, \ldots, Y_n]/(\psi_1', \ldots, \psi_{m_2}', \varepsilon).$$

Пусть функции $z_1, \ldots, z_{\overline{\delta}} \in \overline{k}^\circ[W'' \setminus \mathcal{Z}(Y_0)]$ таковы, что их вычеты $z_i \bmod (\varepsilon) \in \overline{k}^\circ[W'' \setminus \mathcal{Z}(Y_0)]/(\varepsilon)$ линейно независимы над $\overline{k}^\circ$. Мы утверждаем, что элементы $z_1, \ldots, z_{\overline{\delta}}$ линейно независимы над $\overline{k}^\circ(\varepsilon)$ в кольце $\overline{k}^\circ(\varepsilon)[Y_{s+1}, \ldots, Y_n]/(\psi_1', \ldots, \psi_{m_2}')$. Предположим противное. Тогда существует такое соотношение $c_1 z_1 + \ldots + c_{\overline{\delta}} z_{\overline{\delta}} = 0$, что $c_i \in \overline{k}^\circ[\varepsilon]$ и не все из коэффициентов равны нулю. Поскольку ε не является делителем нуля в $\overline{k}^\circ[W'' \setminus \mathcal{Z}(Y_0)]$, мы можем предполагать, не умаляя общности, что ε не делит по крайней мере один из коэффициентов c_i. Теперь, беря вычеты $\mathrm{mod}(\varepsilon)$, мы получаем, что элементы $z_i \bmod (\varepsilon)$ линейно независимы над $\overline{k}^\circ$. Это противоречие. Таким образом, $\delta \geqslant \overline{\delta}$.

Следовательно, $\delta = \overline{\delta}$, и $\Delta_W/\mathrm{lc}_{U_0}(\Delta_W) = \Delta_1$. Поэтому многочлен $\Delta_1|_{\varepsilon=0}$ определён и $\Delta_1|_{\varepsilon=0} = \Delta_2$.

Положим $\Delta_W(Z,-Y_0) = \Delta_W|_{U_0=Z,\,U_1=-Y_0}$, т.е. в этом обозначении мы рассматриваем Δ_W как элемент кольца $\overline{k}^{\circ}(\varepsilon)[U_0,U_1]$. Очевидно,

$$\mathrm{lc}_Z(\Delta_W(Z,-Y_0)) = \mathrm{lc}_{U_0}\Delta_W \in \overline{k}[\varepsilon,t_1,\dots,t_s].$$

По лемме 11(c) мы имеем

$$\Delta_W(Z,-Y_0)/\mathrm{lc}_Z(\Delta_W(Z,-Y_0)) = (\Phi_{W,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}))^{e''_{W,L_1}}.$$

Напомним, что многочлен Φ_{W,L_1} неприводим. Поэтому

$$\Delta_W(Z,-Y_0) = \lambda_{W,L_1}\Phi_{W,L_1}^{e''_{W,L_1}},$$

где $\lambda_{W,L_1} \in \overline{k}[\varepsilon,t_1,\dots,t_s]$. Отсюда следует, что

$$0 \neq \mathrm{lc}_Z(\Delta_W(Z,-Y_0))|_{\varepsilon=0} = (\lambda_{W,L_1}|_{\varepsilon=0}) \cdot (\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1})|_{\varepsilon=0})^{e''_{W,L_1}}.$$

Поэтому $\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1})|_{\varepsilon=0} \neq 0$, многочлен $(\Phi_{W,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}))|_{\varepsilon=0}$ определён и

$$\Delta_2(Z,-Y_0) = (\Delta_W/\mathrm{lc}_Z(\Delta_W))|_{\varepsilon=0} = ((\Phi_{W,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}))|_{\varepsilon=0})^{e''_{W,L_1}}.$$

Следовательно, по лемме 11(b)

$$((\Phi_{W,L_1}/\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_1}))|_{\varepsilon=0})^{e''_{W,L_1}} = \prod_{\substack{W_1\in\mathcal{E}_6,\\ W_1\subset W''}} (\Phi_{W_1,L_1}/(\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W_1,L_1}))^{e_{W,W_1,L_1}}. \tag{35}$$

Заменим основное поле k на $k(t)$, где t – трансцендентный элемент над k, и выберем линейную форму $L_2 \in k[X_0,\dots,X_n]$ так, что

$$(L_2/Y_0)(\eta_1) \neq (L_2/Y_0)(\eta_2)$$

для всех попарно различных $\eta_1,\eta_2 \in W'' \cap \mathcal{Z}(\varepsilon)$, ср. с доказательством леммы 11. Положим $L = L_1 + tL_2$. Тогда выполняется равенство (35) с L вместо L_1. Все многочлены $\Phi_{W_1,L}$, где $W_1 \in \mathcal{E}_6$, $W_1 \subset W''$, попарно различны и неприводимы в кольце $\overline{k}[t,\varepsilon,t_1,\dots,t_s,Y_0,Z]$, см. замечание после доказательства следствия 1. Мы уже видели, что $\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L}) \in \overline{k}[\varepsilon]$ и $\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W_1,L}) \in \overline{k}$. Поэтому $1 \leqslant e''_{W,L}/e_{W,W_1,L} \in \mathbb{Z}$ и справедливо равенство (32) (см. формулировку леммы 12) для L вместо L_1. Теперь, применяя следствие 1, мы получаем (32) также для L_1. Лемма доказана. $\square$

Следствие 2. *Степень проективного алгебраического многообразия* $V''_{a^*,s}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\deg V''_{a^*,s} \leqslant d_0 \cdot \ldots \cdot d_{n-s-1} = D'_{n-s}.$$

Доказательство. Применим лемму 7 к алгебраическому многообразию $V''_{a^*,s}$ (вместо V) с $D = \deg V''_{a^*,s}$ и получим линейные формы $Y_0, \ldots, Y_{s+1}$ и многочлен Φ_s. Существуют линейные формы

$$Y_{s+2}, \ldots, Y_n \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_n],$$

такие, что $Y_0, \ldots, Y_n$ линейно независимы над $\overline{k}$. Положим $L_1 = Y_{s+1}$. Многочлены Φ_s° и $\prod\limits_{W \in \mathcal{E}_5} \Phi^\vee_{\iota_{5,6}(W),L_1}$ совпадают с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}$, см. (IV). Теперь, согласно лемме 7(b), мы имеем

$$\deg V''_{a^*,s} = \deg_Z \Phi_s^\circ = \sum_{W \in \mathcal{E}_5} \deg_Z \Phi^\vee_{\iota_{5,6}(W),L_1} = \sum_{W_1 \in \mathcal{E}_6} \deg_Z \Phi_{W_1,L_1}.$$

По лемме 12 и определению алгебраического многообразия $V''_{a^*,s}$ для всякой компоненты $W_1 \in \mathcal{E}_6$ существует компонента $W \in \mathcal{E}_4$, такая, что $W_1 \subset W''$ в обозначениях леммы 12 и справедливо равенство (32). Поэтому мы имеем

$$\sum_{W_1 \in \mathcal{E}_6} \deg_Z \Phi_{W_1,L_1} \leqslant \sum_{W \in \mathcal{E}_4} \deg_Z \Phi_{W,L_1} \leqslant \sum_{W \in \mathcal{E}_4} \deg W = \deg \widetilde{C}_{a^*,s}.$$

Но $\widetilde{C}_{a^*,s} = \mathcal{Z}(h^\circ_{a^*,1}, \ldots, h^\circ_{a^*,n-s})$. Следовательно, по теореме Безу

$$\deg \widetilde{C}_{a^*,s} \leqslant d_0 \cdot \ldots \cdot d_{n-s-1} = D'_{n-s}.$$

Следствие доказано. □

Пусть поле $K \supset \overline{k}$ – такое же, как выше, и $L \in K[X_0, \ldots, X_n]$ – произвольная линейная форма. Напомним, что $K^\circ = K(t_1, \ldots, t_s)$. Положим

$$\Delta_L = \Delta_{K^\circ(\varepsilon); Y_0, Y_{s+1}, \ldots, Y_n; h^\circ_{a^*,1}, \ldots, h^\circ_{a^*,s}; Y_0, L^\circ} \in K(\varepsilon)[t_1, \ldots, t_s, U_0, U_1], \quad (36)$$

см. обозначения в замечании 6. Таким образом, если

$$L = L_1 \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_n],$$

то $\Delta_L = \Delta_3$, см. выше. Положим $\Delta_L^{(3)} = \Delta_L(Y_1/Y_0, \ldots, Y_s/Y_0, Z, -Y_0)$.

Пусть $K[\varepsilon]_{(\varepsilon)}$ – локальное кольцо простого идеала $(\varepsilon) \subset K[\varepsilon]$, то есть $z \in K[\varepsilon]_{(\varepsilon)}$ в том и только в том случае, если $z \in K(\varepsilon)$ и можно представить этот элемент в виде $z = z_1/z_2$, где $z_1, z_2 \in K[\varepsilon]$ и ε не делит z_2.

Лемма 13. *Пусть $L_{s+1}, \ldots, L_n \in K[X_0, \ldots, X_n]$ – линейные формы, такие, что $Y_0, \ldots, Y_s, L_{s+1}, \ldots, L_n$ линейно независимы над K. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0, \ldots, Y_s) = \varnothing$ *в* $\mathbb{P}^n(\overline{k})$*;*

(b) *при* $s+1 \leqslant i \leqslant n$ *мы имеем* $\Delta^{(3)}_{L_i} \in K[\varepsilon]_{(\varepsilon)}[Y_0, \ldots, Y_s, Z]$ *и* $(\mathrm{lc}_Z \Delta^{(3)}_{L_i})|_{\varepsilon=0} \neq 0$.

Предположим, что выполнено утверждение (b)*. Тогда, очевидно,* $\mathrm{lc}_Z \Delta^{(3)}_{L_i} = \mathrm{lc}_{U_0} \Delta_{L_i}$ *при* $s+1 \leqslant i \leqslant n$*. Предположим дополнительно, что* $K = \overline{k}(t)$ *(см. выше) и* $L_i \in \overline{k}[t][X_0, \ldots, X_n]$ *для всех* i*. Тогда*

$$\Delta_{L_i} \in K[\varepsilon]_{(\varepsilon)}[t, t_1, \ldots, t_s, U_0, U_1],$$
$$\Delta^{(3)}_{L_i} \in K[\varepsilon]_{(\varepsilon)}[t, Y_0, \ldots, Y_s, Z]$$

и

$$\mathrm{lc}_Z \Delta^{(3)}_{L_i} = \mathrm{lc}_{U_0} \Delta_L \in K[\varepsilon]_{(\varepsilon)} \setminus \varepsilon K[\varepsilon]_{(\varepsilon)}$$

для всех i*.*

Доказательство. Из утверждения (a) следует (b) по лемме 11(a) и лемме 12 (с основным полем K вместо k и L_i вместо L_1).

Обратно, при выполнении условия (b) многочлен $\Delta^{(3)}_{L_i}(Y_1, \ldots, Y_s, L_i)$ обращается в нуль тождественно на $V_{a^*,s}$ для всякого i. Положим

$$\psi = \prod_{s+1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{lc}_Z \Delta^{(3)}_{L_i} \in K[\varepsilon].$$

Тогда $\psi(0) \neq 0$, и морфизм

$$V''_{a^*,s}(\overline{K}) \times (\mathbb{A}^1(\overline{K}) \setminus \mathcal{Z}(\psi)) \to \mathbb{P}^s(\overline{K}) \times (\mathbb{A}^1(\overline{K}) \setminus \mathcal{Z}(\psi)),$$
$$((X_0 : \ldots : X_n), \varepsilon) \mapsto ((Y_0 : \ldots : Y_s), \varepsilon),$$

является конечным доминантным. Поэтому ограничение этого морфизма $V''_{a^*,s}(\overline{K}) \times \{0\} \to \mathbb{P}^s(\overline{K}) \times \{0\}$ также является конечным доминантным. Отсюда следует утверждение (a).

Докажем последнее утверждение леммы. Для всякого $\eta \in \widetilde{C}_{a^*,s}$ элементы $(X_i/Y_0)(\eta)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, являются целыми над кольцом

$$\overline{k}(\varepsilon)[t_1, \ldots, t_s].$$

Поэтому элементы $(L_i/Y_0)(\eta)$, $s+1 \leqslant i \leqslant n$, являются целыми над

$$\overline{k}(\varepsilon)[t, t_1, \ldots, t_s],$$

ср. с доказательством следствия 1. Следовательно, $\mathrm{lc}_Z(\Phi_{W,L_i}) \in \overline{k}(\varepsilon)$ при $s+1 \leqslant i \leqslant n$ и $W \in \mathcal{E}_4$. Теперь требуемое утверждение вытекает из утверждения (b) и леммы 11(a) (с основным полем K вместо k и L_i вместо L_1). Лемма доказана. □

Замечание 10. Другое, независимое доказательство леммы 13 может быть получено из леммы 3.9 работы [7]. В [7] доказательство последней леммы в некотором смысле более прямое. Оно не использует результата, аналогичного лемме 12.

§6. Основная рекурсия

Лемма 14. *Достаточно доказать теорему* 1 *в случае* $c \leqslant n-1$.

Доказательство. Действительно, пусть c, c' – целые числа из формулировки теоремы 1 и $c = n$. Положим $c_1 = n-1$, $c'_1 = \min\{c', n-1\}$. Предположим, что теорема 1 доказана для (c_1, c'_1, A_1) вместо (c, c', A). Пусть $\alpha^{(n)} \notin A_1$. Пусть $f_{i,i_0,\ldots,i_n}$, где $0 \leqslant i \leqslant m-1$, $i_1, \ldots, i_n \geqslant 0$, $i_0 + \ldots + i_n = d_i$, – семейство всех коэффициентов из $k[a_1, \ldots, a_\nu]$ многочленов $f_0, \ldots, f_{m-1}$. Положим $\mathcal{W}_{\alpha^{(n)}} = \mathcal{Z}(f_{i,i_0,\ldots,i_n}, \forall\, i, i_0, \ldots, i_n)$. Положим $A = A_1 \cup \{\alpha^{(n)}\}$. Тогда (4) – стратификация множества $\mathcal{U}_n$.

Поскольку теорема 1 доказана для (c_1, c'_1), теперь для стратификации (4) также получены все объекты из пп. (iv)–(xiii) с первоначальными (c, c'), и теорема 1 с (c, c') доказана (фактически если $c' = n$ и $\alpha \in A_1$, то построено даже больше объектов, соответствующих индексу α). Лемма доказана. □

В дальнейшем мы будем предполагать, что $-1 \leqslant c \leqslant n-1$. Пусть $a^* \in \mathcal{U}_c$. Пусть s – целое число, $0 \leqslant s \leqslant c$. Многообразие $V_{a^*,s}$ определено во введении. Мы будем использовать также обозначения $V''_{a^*,s}$, $V'_{a^*,s}$, $V'''_{a^*,s}$, $V''''_{a^*,s}$ и т.д., введённые в разделе 5.

Пусть $W_{a^*,s} = V_{a^*,s}$ или $W_{a^*,s} = V'_{a^*,s}$. Положим $\mathcal{W}_{\alpha_0} = \{a^*\}$. Пусть $(Y_0, \ldots, Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$, см. введение. Заменим в условиях (iv)–(xii) из введения поле k на k_{a^*}, индекс α на α_0, многообразия $V_{a^*,s}$, $V_{a^*,s,r}$ на $W_{a^*,s}$, $W_{a^*,s,r}$. Обозначим через (iv)$'$–(xii)$'$ полученные новые условия.

Рассмотрим также следующее условие.

(xiv)$'$ Степени относительно $a_1,\dots,a_\nu$ всех многочленов $\Phi_{\alpha_0,s,r}$, H_j, Δ_j, Φ_j, $\lambda_{\alpha_0,s,r,0},\lambda_{\alpha_0,s,r,1}$, $G_{\alpha_0,s,r}$, $G_{\alpha_0,s,r,i}$, G_j, $G_{j,i}$, $\Psi_{\alpha_0,s,r,i_1,i_2}$, Ψ_{j,i_1,i_2}, $j\in J_{\alpha_0,s,r}$, равны 0 (т.е. эти элементы не зависят от $a_1,\dots,a_\nu$).

Для того чтобы избежать путаницы, нам нужны новые обозначения для объектов, введённых в пп. (iv)$'$–(xii)$'$.

Если $W_{a^*,s}=V_{a^*,s}$, то

$$\Phi_{\alpha_0,s,r},\ \Delta_{\alpha_0,s,r},\ \lambda_{\alpha_0,s,r,0},\lambda_{\alpha_0,s,r,1},\ G_{\alpha_0,s,r},\ G_{\alpha_0,s,r,i},\ J_{\alpha_0,s,r}$$

будут обозначаться через

$$\Phi_{a^*,s,r},\ \Delta_{a^*,s,r},\ \lambda_{a^*,s,r,0},\lambda_{a^*,s,r,1},\ G_{a^*,s,r},\ G_{a^*,s,r,i},\ J_{a^*,s,r} \tag{37}$$

соответственно.

Если $W_{a^*,s}=V'_{a^*,s}$, то

$$\Phi_{\alpha_0,s,r},\ \Delta_{\alpha_0,s,r},\ \lambda_{\alpha_0,s,r,0},\lambda_{\alpha_0,s,r,1},\ G_{\alpha_0,s,r},\ G_{\alpha_0,s,r,i},\ J_{\alpha_0,s,r}$$

будут обозначаться через

$$\Phi^{(1)}_{a^*,s,r},\ \Delta^{(1)}_{a^*,s,r},\ \lambda^{(1)}_{a^*,s,r,0},\lambda^{(1)}_{a^*,s,r,1},\ G^{(1)}_{a^*,s,r},\ G^{(1)}_{a^*,s,r,i},\ J^{(1)}_{a^*,s,r} \tag{38}$$

соответственно.

Мы будем предполагать без ограничения общности, что все множества индексов $J_{a^*,s,r}$, $J^{(1)}_{a^*,s,r}$ является попарно непересекающимися, т.е.

$$\sum_{s,r}\Bigl(\#J_{a^*,s,r}+\#J^{(1)}_{a^*,s,r}\Bigr)=\#\Bigl(\bigcup_{s,r}\bigl(J_{a^*,s,r}\cup J^{(1)}_{a^*,s,r}\bigr)\Bigr).$$

Для произвольного многообразия $W_{a^*,s}$ другие объекты, введённые в пп. (iv)$'$–(xii)$'$, а именно

$$H_j,\ \Delta_j,\ \Phi_j,\Xi_{j,a^*},\ W_{j,a^*,\xi},\ G_j,\ G_{j,i},\ \Psi_{\alpha_0,s,r,i_1,i_2},\ \Psi_{j,i_1,i_2},$$

будут обозначаться через

$$H_{a^*,j},\ \Delta_{a^*,j},\ \Phi_{a^*,j},\Xi_{a^*,j},\ W_{a^*,j,\xi},\ G_{a^*,j},\ G_{a^*,j,i},\ \Psi_{a^*,s,r,i_1,i_2},\ \Psi_{a^*,j,i_1,i_2} \tag{39}$$

соответственно.

Применяя конструкцию раздела 4, мы получаем многочлены

$$h_{a^*,1},\dots,h_{a^*,n-c},$$

удовлетворяющие условиям (α_{n-c}) и (β_{n-c}), см. раздел 4.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $0\leqslant c\leqslant n-1$. Мы используем убывающую рекурсию по q, где $0\leqslant q\leqslant c$. База рекурсии

– случай $q = c$. Последний шаг этой рекурсии – случай $q = c'_{a^*} \leqslant c$, где $\dim V'''_{a^*,q} \leqslant c' - 1$. Поэтому если $V'''_{a^*,q} \neq \varnothing$, то $q = c'_{a^*} = c' - 1 \geqslant 0$. Положим $c_{a^*} = \dim V_{a^*}$. Тогда, очевидно, $c' - 1 \leqslant c'_{a^*} \leqslant c_{a^*} \leqslant c$.

Предположим, что на предыдущих шагах с номерами $c, \dots, q+1$ этой рекурсии мы построили многочлены

$$h_{a^*,1}, \dots, h_{a^*,n-q} \in k_{a^*}[X_0, \dots, X_n]$$

и $q_{a^*,j,w}$ для $1 \leqslant j \leqslant n-q$, $j \leqslant w \leqslant m-1$, удовлетворяющие условиям (α_{n-q}), см. раздел 4, и (γ'_{n-q}), см. раздел 5.

Для базы рекурсии $q = c$ многочлены $h_{a^*,1}, \dots, h_{a^*,n-c}$ уже построены, см. выше.

Пусть $0 \leqslant q \leqslant c-1$. Тогда мы предполагаем дополнительно, что на предыдущем шаге $q+1$ получены следующие объекты. Положим $s = q+1$. Построен элемент $(Y_0, \dots, Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$. Мы будем писать $(Y_0, \dots, Y_{s+1}) = (Y_{s,0}, \dots, Y_{s,s+1})$, если важна зависимость этих линейных форм от s. Линейные формы $Y_0, \dots, Y_{s+1}$ обладают следующими свойствами.

Для случая $W_{a^*,s} = V_{a^*,s}$ справедливы условия (iv)$'$–(xii)$'$ и получены все объекты (37), (39).

Для случая $W_{a^*,s} = V'_{a^*,s}$ справедливы условия (iv)$'$, (v)$'$, (xi)$'$ и получены многочлены $\Phi^{(1)}_{a^*,s,r}$, $\Psi^{(1)}_{a^*,s,r,i_1,i_2}$ (фактически можно удовлетворить всем условиям (iv)$'$–(xii)$'$ и получить все объекты (38), (39) также и в этом случае, но для многообразия $V'_{a^*,s}$ достаточно иметь только все многочлены $\Phi^{(1)}_{a^*,s,r}$, $\Psi^{(1)}_{a^*,s,r,i_1,i_2}$, чтобы осуществить рекурсивный шаг).

Предположим, что $0 \leqslant q < c$, но $\dim V'''_{a^*,q+1} > c' - 1$, или $q = c$. Теперь мы собираемся описать q-й рекурсивный шаг нашей конструкции.

В дальнейшем мы предполагаем, что до конца раздела $s = q$. Сначала мы найдём многообразие $V''_{a^*,s}$ и некоторые объекты, относящиеся к этому многообразию. Мы будем перебирать элементы $(Y_0, \dots, Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$. Напомним, что линейные формы $Y_0, \dots, Y_n$ линейно независимы над k, см. раздел 4. Положим $L_{s+1} = Y_{s+1}$, $L_i = Y_{s+1} + tY_i$ при $s+2 \leqslant i \leqslant n$ и

$$\widetilde{\Delta}_{a^*,L_i} = \widetilde{\Delta}_{k^\circ_{a^*}(t,\varepsilon);Y_0,Y_{s+1},\dots,Y_n;h^\circ_{a^*,1},\dots,h^\circ_{a^*,s};Y_0,L_i} \in k^\circ_{a^*}(t,\varepsilon)[U_0,U_1]$$

при $s+1 \leqslant i \leqslant n$, см. замечание 6 в разделе 3. Заметим, что фактически $\widetilde{\Delta}_{a^*,L_i} \in k_{a^*}[\varepsilon, t, t_1, \dots, t_s, U_0, U_1]$. Мы находим все многочлены $\widetilde{\Delta}_{a^*,L_i}$, применяя конструкцию из раздела 3. По лемме 9 мы имеем $\widetilde{\Delta}_{a^*,L_i} \neq 0$ при $s+1 \leqslant i \leqslant n$. Далее, по лемме 2

$$\deg_{U_0,U_1} \widetilde{\Delta}_{a^*,L_i} = \deg_{U_0,U_1} \widetilde{\Delta}_{a^*,L_{s+1}}, \quad s+2 \leqslant i \leqslant n. \tag{40}$$

Вычислим, используя [6], многочлены

$$\delta_{a^*,L_i} = \mathrm{G\,C\,D}_{\varepsilon,t,t_1,\ldots,t_s,U_0,U_1}(\mathrm{lc}_{U_0}\widetilde{\Delta}_{a^*,L_i}, \widetilde{\Delta}_{a^*,L_i}) \in k_{a^*}[\varepsilon,t,t_1,\ldots,t_s]$$

для всех i в интервале $s+1 \leqslant i \leqslant n$. После этого, применяя лемму 2 работы [6] и нётерову нормализацию (см. подробности в [6]), мы вычисляем многочлен $\Delta^{(4)}_{a^*,L_i} \in k_{a^*}[\varepsilon,t,t_1,\ldots,t_s,U_0,U_1]$, совпадающий с многочленом $\widetilde{\Delta}_{a^*,L_i}/\delta_{a^*,L_i}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}, при $s+1 \leqslant i \leqslant n$. Заметим, что $\Delta^{(4)}_{a^*,L_i}/\mathrm{lc}_{U_0}\Delta^{(4)}_{a^*,L_i} = \Delta_{L_i}$ в обозначениях из раздела 5, см. (36). Мы применяем лемму 11(a) с $(k(t), k_{a^*}(t), L_i, \widetilde{\Delta}_{a^*,L_i})$ вместо $(k, k_{a^*}, L_1, \Delta_3)$. Тогда, согласно утверждению (a) этой модифицированной леммы и замечанию 9,

$$\mathrm{lc}_{U_0}\Delta^{(4)}_{a^*,L_i} \in k_{a^*}[\varepsilon].$$

Теперь по лемме 2 имеем $\Delta^{(4)}_{a^*,L_i}|_{t=0} = \lambda_i \Delta^{(4)}_{a^*,L_{s+1}}$, где $\lambda_i \in k_{a^*}[\varepsilon]$ при $s+2 \leqslant i \leqslant n$.

Положим

$$\Delta^{(3)}_{a^*,L_i} = \Delta^{(4)}_{a^*,L_i}(\varepsilon, t, Y_1/Y_0, \ldots, Y_s/Y_0, Z, -Y_0), \quad s+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Если по крайней мере для одного i из интервала $s+1 \leqslant i \leqslant n$ мы имеем $\Delta^{(3)}_{a^*,L_i} \notin k_{a^*}[\varepsilon,t,Y_0,\ldots,Y_s,Z]$ или $\Delta^{(3)}_{a^*,L_i} \in k_{a^*}[\varepsilon,t,Y_0,\ldots,Y_s,Z]$, но $\mathrm{lc}_Z\Delta^{(3)}_{a^*,L_i} \notin k_{a^*}[\varepsilon] \setminus (\varepsilon)$, то мы переходим к следующему элементу $(Y_0,\ldots,Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$. Согласно следствию 2, лемме 7, применённой к многообразию $V''_{a^*,s}$, и лемме 13, существует элемент $(Y_0,\ldots,Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$, такой, что выполняется условие (41), см. ниже.

В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\Delta^{(3)}_{a^*,L_i} \in k_{a^*}[\varepsilon,t,Y_0,\ldots,Y_s,Z] \ \&\ \mathrm{lc}_Z\Delta^{(3)}_{a^*,L_i} \in k_{a^*}[\varepsilon] \setminus (\varepsilon), \quad s+1 \leqslant i \leqslant n. \tag{41}$$

Тогда по лемме 13 мы имеем $V''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(Y_0,\ldots,Y_s) = \varnothing$, и определены многочлены $\Delta^{(4)}_{a^*,L_i}|_{\varepsilon=0} \in k_{a^*}[t,t_1,\ldots,t_s,U_0,U_1]$. В этом случае положим $\Delta^{(5)}_{a^*,L_i} = \Delta^{(4)}_{a^*,L_i}|_{\{\varepsilon=0,\,U_0=Z,\,U_1=-Y_0\}} = \Delta^{(4)}(0,t,t_1,\ldots,t_s,Z,-Y_0) \in k_{a^*}[t,t_1,\ldots,t_s,Y_0,Z]$. Заметим, что из условия $\mathrm{lc}_Z\Delta^{(3)}_{a^*,L_i} \in k_{a^*}[\varepsilon] \setminus (\varepsilon)$

следует, что $\mathrm{lc}_Z \Delta^{(3)}_{a^*,L_i} = \mathrm{lc}_{U_0} \Delta^{(4)}_{a^*,L_i}$ и $\deg_Z \Delta^{(3)}_{a^*,L_i} = \deg_{U_0,U_1} \Delta^{(4)}_{a^*,L_i}$. Поэтому $\mathrm{lc}_Z \Delta^{(5)}_{a^*,L_i} \in k_{a^*}$ и $\deg_Z \Delta^{(5)}_{a^*,L_i} = \deg_{U_0,U_1} \Delta^{(4)}_{a^*,L_i}$.

Лемма 15. *Предположим, что выполняется условие* (41). *Тогда существует семейство целых чисел* $e_\eta \geqslant 1$, $\eta \in C''_{a^*,s}$, *такое, что при* $s+2 \leqslant i \leqslant n$

$$\Delta^{(5)}_{a^*,L_i} = \mathrm{lc}_Z(\Delta^{(5)}_{a^*,L_i}) \cdot \prod_{\eta \in C''_{a^*,s}} \Big(Z - ((Y_{s+1} + tY_i)/Y_0)(\eta)Y_0\Big)^{e_\eta} \tag{42}$$

и

$$\Delta^{(5)}_{a^*,L_{s+1}} = \mathrm{lc}_Z(\Delta^{(5)}_{a^*,L_{s+1}}) \cdot \prod_{\eta \in C''_{a^*,s}} \Big(Z - (Y_{s+1}/Y_0)(\eta)Y_0\Big)^{e_\eta}.$$

Следовательно, при $s+2 \leqslant i \leqslant n$ *многочлен* $\Delta^{(5)}_{a^*,L_i}|_{t=0}$ *совпадает с* $\Delta^{(5)}_{a^*,L_{s+1}}$ *с точностью до ненулевого множителя из* k_{a^*}.

Доказательство. Пусть $u_{s+2}, \ldots, u_n$ – алгебраически независимые элементы над полем k. Пусть

$$K = \overline{k}(u_{s+2}, \ldots, u_n) \quad \text{и} \quad L = Y_{s+1} + \sum_{s+2 \leqslant i \leqslant n} u_i Y_i,$$

$$\widetilde{\Delta}_{a^*} = \widetilde{\Delta}_{K^\circ(\varepsilon); Y_0, Y_{s+1}, \ldots, Y_n; h^\circ_{a^*,1}, \ldots, h^\circ_{a^*,s}; Y_0, L} \in K^\circ_{a^*}(t, \varepsilon)[U_0, U_1].$$

Фактически $\widetilde{\Delta}_{a^*} \in k_{a^*}[\varepsilon, t, u_{s+2}, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_s, U_0, U_1]$. По лемме 9(b) и лемме 4 (с $\widetilde{C}_{a^*,s}$ вместо V_{a^*}) мы имеем

$$\mathrm{lc}_{U_0} \widetilde{\Delta}_{a^*} \in k_{a^*}[\varepsilon, t, u_{s+2}, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_s]$$

и $\deg_{U_0} \widetilde{\Delta}_{a^*} = \deg_{U_0,U_1} \widetilde{\Delta}_{a^*}$. Для всякого многообразия $W \in \mathcal{E}_4$ мы выбираем $\Phi_{W,L} \in \overline{k}[\varepsilon, t, u_{s+2}, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_s, Y_0, Z]$ неприводимым многочленом в этом кольце, см. раздел 5. Для всякого $W \in \mathcal{E}_4$ мы имеем $\mathrm{lc}_Z \Phi_{W,L} \in \overline{k}[\varepsilon]$, ср. с доказательством следствия 1(a) (здесь мы оставляем подробности читателю; фактически требуемое утверждение немедленно следует из леммы 9(b)).

Пусть

$$\delta_{a^*} = \mathrm{G\,C\,D}_{\varepsilon, t, u_{s+2}, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_s, U_0, U_1}(\mathrm{lc}_{U_0} \widetilde{\Delta}_{a^*}, \widetilde{\Delta}_{a^*}).$$

Тогда $\delta_{a^*} \in k_{a^*}[\varepsilon, t, u_{s+2}, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_s]$. Здесь можно рассматривать $\widetilde{\Delta}_{a^*}$ как полином от U_0, U_1 с коэффициентами из последнего кольца, и тогда δ_{a^*} является наибольшим общим делителем всех этих коэффициентов. Положим $\Delta^{(4)}_{a^*} = \widetilde{\Delta}_{a^*}/\delta_{a^*}$. Мы применяем лемму 11(a) с

$(K, K, L, \widetilde{\Delta}_{a^*})$ вместо $(k, k_{a^*}, L_1, \Delta_3)$. Тогда из утверждения (a) этой модифицированной леммы вытекает, что

$$(\Delta_{a^*}^{(4)}/\mathrm{lc}_{U_0}\Delta_{a^*}^{(4)})|_{\{U_0=Z,\,U_1=-Y_0\}} = \prod_{W\in\mathcal{E}_4}(\Phi_{W,L}/\mathrm{lc}_Z\Phi_{W,L})^{e'_{W,L}} \tag{43}$$

для некоторых целых чисел $e'_{W,L} \geqslant 1$. Следовательно, по лемме Гаусса $\mathrm{lc}_{U_0}\Delta_{a^*}^{(4)}$ совпадает с $\prod\limits_{W\in\mathcal{E}_4}(\mathrm{lc}_Z\Phi_{W,L})^{e'_{W,L}}$ с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}$. Таким образом, $\mathrm{lc}_{U_0}\Delta_{a^*,L}^{(4)} \in k_{a^*}[\varepsilon]$. Напомним, что выполнено условие (41). Теперь по лемме 13(a) и лемме 9(b) имеем $\mathrm{lc}_Z\Phi_{W,L} \in \overline{k}[\varepsilon]\setminus(\varepsilon)$. Поэтому $\mathrm{lc}_{U_0}\Delta_{a^*}^{(4)} \in k_{a^*}[\varepsilon]\setminus(\varepsilon)$.

По лемме 4(b) с $\widetilde{C}_{a^*,s}$ вместо V_{a^*} мы имеем

$$\Delta_{a^*}^{(4)} = \mathrm{lc}_{U_0}(\Delta_{a^*}^{(4)})\cdot\prod_{\eta\in\widetilde{C}_{a^*,s}}(U_0 + (L/Y_0)(\eta)U_1)^{e_\eta} \tag{44}$$

и

$$\Delta_{a^*,L_i}^{(4)} = \mathrm{lc}_{U_0}(\Delta_{a^*,L_i}^{(4)})\cdot\prod_{\eta\in\widetilde{C}_{a^*,s}}(U_0 + (L_i/Y_0)(\eta)U_1)^{e_\eta}, \quad s+1\leqslant i\leqslant n, \tag{45}$$

где e_η – кратность корня $\eta\in\widetilde{C}_{a^*,s}$ системы $h^\circ_{a^*,1} = \ldots = h^\circ_{a^*,s} = 0$.

Положим $v_{s+1,j} = 0$ для $s+2\leqslant j\leqslant n$. При $s+2\leqslant i\leqslant n$, $s+2\leqslant j\leqslant n$ положим $v_{i,j} = 0$, если $i\neq j$, и $v_{i,j} = t$, если $i = j$.

Пусть i – целое число, $s+1\leqslant i\leqslant n$. Обозначим

$$\overline{\Delta}_{a^*,L_i}^{(4)} = \Delta_{a^*}^{(4)}|_{\{u_j=v_{i,j}\;\forall j\}},$$

т.е. мы подставляем $u_j = v_{i,j}$ для всех $j = s+2,\ldots,n$ в многочлен $\Delta_{a^*}^{(4)}$ и обозначаем через $\overline{\Delta}_{a^*,L_i}^{(4)}$ полученный многочлен. Эта подстановка преобразует линейную форму L в L_i. Следовательно, в силу (44) и (45) многочлены $\overline{\Delta}_{a^*,L_i}^{(4)}$ и $\Delta_{a^*,L_i}^{(4)}$ совпадают с точностью до ненулевого множителя из локального кольца $k_{a^*}[\varepsilon]_{(\varepsilon)}$ при $s+1\leqslant i\leqslant n$. Поэтому $\overline{\Delta}_{a^*,L_i}^{(4)}|_{\{\varepsilon=0,\,U_0=Z,\,U_1=-Y_0\}}$ совпадает с $\Delta_{a^*,L_i}^{(5)}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}.

Далее, положим $\Delta_{a^*}^{(5)} = \Delta_{a^*}^{(4)}|_{\{\varepsilon=0,\,U_0=Z,\,U_1=-Y_0\}}$. Следовательно, $\mathrm{lc}_Z\Delta_{a^*}^{(5)} = \mathrm{lc}_{U_0}\Delta_{a^*}^{(4)}|_{\{\varepsilon=0\}} \in k_{a^*}$. Для всякого $W\in\mathcal{E}_6$ мы выбираем $\Phi_{W,L}\in\overline{k}[t, u_{s+2},\ldots,u_n, t_1,\ldots,t_s, Y_0, Z]$. Для всякого $W\in\mathcal{E}_6$ мы имеем $\mathrm{lc}_Z\Phi_{W,L}\in\overline{k}$, ср. с доказательством следствия 1(b) (здесь мы оставляем подробности читателю; фактически требуемое утверждение немедленно следует из леммы 9(c)). Согласно (43) и лемме 12 (с основным полем K вместо k), см. (32), мы имеем

$$\Delta^{(5)}_{a^*}/(\mathrm{lc}_{U_0}\Delta^{(5)}_{a^*}) = \prod_{W\in\mathcal{E}_6}(\Phi_{W,L}/(\mathrm{lc}_{U_0}\Phi_{W,L}))^{e_{W,L}}$$

для некоторых целых чисел $e_{W,L} \geqslant 1$.

Но, очевидно, $\Phi_{W,L}/(\mathrm{lc}_{U_0}\Phi_{W,L}) = \prod_{\eta\in W}(Z-(L/Y_0)(\eta))$ для всякого $W\in\mathcal{E}_6$. Поэтому

$$\Delta^{(5)}_{a^*} = \mathrm{lc}_Z(\Delta^{(5)}_{a^*})\cdot\prod_{\eta\in C''_{a^*,s}}(Z-(L/Y_0)(\eta)Y_0)^{e_\eta} \tag{46}$$

для некоторых целых чисел $e_\eta \geqslant 1$.

Положим $\overline{\Delta}^{(5)}_{a^*,L_i} = \Delta^{(5)}_{a^*}|_{\{u_j=v_{i,j}\ \forall j\}}$ для $s+1\leqslant i\leqslant n$. Тогда из (46) следует, что

$$\overline{\Delta}^{(5)}_{a^*,L_i} = \mathrm{lc}_Z(\Delta^{(5)}_{a^*})\cdot\prod_{\eta\in C''_{a^*,s}}(Z-(L_i/Y_0)(\eta)Y_0)^{e_\eta} \tag{47}$$

для $s+1\leqslant i\leqslant n$. С другой стороны, очевидно,

$$\overline{\Delta}^{(5)}_{a^*,L_i} = \Delta^{(4)}_{a^*}|_{\{u_j=v_{i,j}\ \forall j;\ \varepsilon=0,\,U_0=Z,\,U_1=-Y_0\}} = \overline{\Delta}^{(4)}_{a^*,L_i}|_{\{\varepsilon=0,\,U_0=Z,\,U_1=-Y_0\}},$$

и, как мы видели, последний многочлен совпадает с $\Delta^{(5)}_{a^*,L_i}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*} для $s+1\leqslant i\leqslant n$. Лемма доказана. $\square$

Положим $\Delta^{(6)}_{a^*,L_i} = \Delta^{(5)}_{a^*,L_i}|_{Y_0=1}$ при $s+1\leqslant i\leqslant n$. Теперь при помощи конструкции из [6, раздел 2] вычислим многочлены

$$\Delta_{a^*,L_i,j} = \mathrm{SQF}_{j,t,t_1,\ldots,t_s,Z}(\Delta^{(6)}_{a^*,L_i}) \in k_{a^*}[t,t_1,\ldots,t_s,Z],$$

$$1\leqslant j\leqslant \deg_Z\Delta^{(6)}_{a^*,L_i},$$

задающие разложение на бесквадратные множители многочлена $\Delta^{(6)}_{a^*,L_i}$ в смысле (48), см. ниже. Фактически

$$\Delta_{a^*,L_i,j} \in k_{a^*}[t,t_1,\ldots,t_s,Z].$$

Многочлены $\Delta_{a^*,L_i,j}$ являются сепарабельными (т.е. не имеют кратных множителей в $\overline{k}[t,t_1,\ldots,t_s,Z]$).

Напомним, что целое число $\rho=\rho_s$ определено во введении, см. п. (iv), в котором $s=q$. Если характеристическая экспонента p равна 1, то $B_{0,i} = \{1, \dots, \deg_Z \Delta^{(6)}_{a^*,L_i}\}$, $B_{1,i} = \varnothing$. Если $p > 1$, то имеем $B_{r,i} = \{jp^r : 1 \leqslant j \leqslant (\deg_Z \Delta^{(6)}_{a^*,L_i})/p^r\}$ для всякого $r \geqslant 0$, см. [6, раздел 2]. По определению положим $r(j) = r$ в том и только в том случае, если $j \in B_r \setminus B_{r+1}$.

В этих обозначениях

$$\prod_{0\leqslant r\leqslant \rho} \prod_{j\in B_{r,i}\setminus B_{r+1,i}} \Delta^{j/p^r}_{a^*,L_i,j}(t^{p^r}, t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}, Z^{p^r}) = \lambda'_{a^*,i}\Delta^{(6)}_{a^*,L_i}, \tag{48}$$

где $0 \neq \lambda'_{a^*,i} \in k_{a^*}$, и многочлены $\Delta_{a^*,L_i,j}(t^{p^{r(j)}}, t_1^{p^{r(j)}}, \dots, t_s^{p^{r(j)}}, Z^{p^{r(j)}})$, $1 \leqslant j \leqslant \deg_{U_0} \Delta^{(6)}_{a^*,L_i}$, попарно различны в $k_{a^*}[t, t_1, \dots, t_s, Z]$, см. [6, раздел 2]. Поэтому для всякого j имеем $0 \leqslant \deg_Z \Delta_{a^*,L_i,j} \leqslant (\deg_Z \Delta^{(6)}_{a^*,L_i})/j$.

Обозначим через $\mathrm{Res}_Z(\Delta_{a^*,L_i,j}, \partial\Delta_{a^*,L_i,j}/\partial Z)$ дискриминант относительно Z многочлена $\Delta_{a^*,L_i,j}$. Если по крайней мере для одной пары (i,j), где $s+1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant \deg_Z \Delta^{(5)}_{a^*,L_i}$, многочлен $\Delta_{a^*,L_i,j}$ не сепарабелен относительно Z (т.е. $\mathrm{Res}_Z(\Delta_{a^*,L_i,j},\, \partial\Delta_{a^*,L_i,j}/\partial Z) = 0$), то мы переходим к следующему элементу $(Y_0, \dots, Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$. Согласно следствию 2 и лемме 7, применённой к многообразию $V''_{a^*,s}$, существует элемент $(Y_0, \dots, Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$, такой, что выполняется условие (49), см. ниже.

В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\mathrm{Res}_Z(\Delta_{a^*,L_i,j}, \partial\Delta_{a^*,L_i,j}/\partial Z) \neq 0, \quad s+1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant \deg_Z \Delta^{(6)}_{a^*,L_i}. \tag{49}$$

Положим

$$g_{a^*,L_i,r} = \prod_{j\in B_{r,i}\setminus B_{r+1,i}} \Delta_{a^*,L_i,j} \in k_{a^*}[t, t_1, \dots, t_s, Z], \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho.$$

Тогда каждый многочлен $g_{a^*,L_i,r}$ является сепарабельным относительно Z. Снова согласно (48) имеем

$$\deg_Z g_{a^*,L_i,r} \leqslant \deg_Z(\Delta^{(6)}_{a^*,L_i})/p^r.$$

Заметим, что

$$\sum_{0\leqslant r\leqslant \rho} \deg_Z g_{a^*,L_i,r} = \#\{(Y_{s+1}/Y_0 + tY_i/Y_0)(\eta) : \eta \in C''_{a^*,s}\} \tag{50}$$

(здесь мы оставляем подробности читателю). Так что если $i = s+1$, то “$+tY_i/Y_0$” в (50) можно опустить.

Следующая лемма аналогична лемме 6.

Лемма 16. *Пусть выполняются условия* (41) *и* (49). *В обозначениях* (42) *пусть* $e_\eta = p^{r_\eta} e'_\eta$, *где* $0 \leqslant r_\eta \leqslant \rho$, $e'_\eta \geqslant 1$, $\mathrm{GCD}\,(e'_\eta, p) = 1$, *для всякого* $\eta \in C''_{a^*,s}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\#\{(Y_{s+1}/Y_0)(\eta) \,:\, \eta \in C''_{a^*,s}\} = \#C''_{a^*,s}$,

(b) $\sum\limits_{0\leqslant r\leqslant\rho} \deg_Z g_{a^*,L_i,r} = \sum\limits_{0\leqslant r\leqslant\rho} \deg_Z g_{a^*,L_{s+1},r}$ *для всех* i,

(c) $\deg_Z g_{a^*,L_i,r} = \deg_Z g_{a^*,L_{s+1},r}$ *для всех* i, r,

(d) *для всякого* r, $0 \leqslant r \leqslant \rho$, *многочлен* $g_{a^*,L_{s+1},r}(t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})$ *совпадает с*
$$\prod_{\eta\in C''_{a^*,s},\, r_\eta = r} (Z - (Y_{s+1}/Y_0)(\eta))^{p^r}$$
с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}$, *и для всех* i, r, *где* $s+2 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant r \leqslant \rho$, *многочлен* $g_{a^*,L_i,r}(t^{p^r}, t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})$ *совпадает с*
$$\prod_{\eta\in C''_{a^*,s},\, r_\eta = r} (Z - (Y_{s+1}/Y_0)(\eta) - t(Y_i/Y_0)(\eta))^{p^r}$$
с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6, и мы оставляем его читателю. □

Если утверждение (c) леммы 16 не выполняется, то мы переходим к следующему элементу $(Y_0, \dots, Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$. Согласно следствию 2, лемме 7, применённой к многообразию $V''_{a^*,s}$, и лемме 13, существует элемент $(Y_0, \dots, Y_{s+1}) \in \mathcal{L}_s^{s+1} \times \mathcal{L}'_s$, такой, что справедливо утверждение (c) леммы 16.

§7. Завершение описания основной рекурсии

В дальнейшем мы будем предполагать, что справедливо утверждение (c) леммы 16. Теперь по лемме 16(d) для всех i, r, где $s+1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant r \leqslant \rho$, мы имеем (в обозначениях, введённых в разделе 5)
$$g_{a^*,L_i,r}(t^{p^r}, t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})/\mathrm{lc}_Z(g_{a^*,L_i,r}) = \prod_{W\in\mathcal{E}_{6,r}} \Psi_{W,L_i}^{p^r},$$
где $\mathcal{E}_{6,r} \subset \mathcal{E}_6$. Подмножество $\mathcal{E}_{6,r}$ не зависит от L_i. Оно зависит только от r. Мы имеем $W \in \mathcal{E}_{6,r}$ в том и только в том случае, если $r_\eta = r$ для всякого $\eta \in W$.

Далее, $\bigcup\limits_{0\leqslant r\leqslant\rho}\mathcal{E}_{6,r}=\mathcal{E}_6$ и $\mathcal{E}_{6,r_1}\cap\mathcal{E}_{6,r_2}=\varnothing$ при $0\leqslant r_1\neq r_2\leqslant\rho$. Пусть $\iota_{5,6}(\mathcal{E}_{5,r})=\mathcal{E}_{6,r}$, см. раздел 5. Положим

$$V''_{a^*,s,r}=\bigcup_{W\in\mathcal{E}_{5,r}}W,\qquad C''_{a^*,s,r}=\bigcup_{W\in\mathcal{E}_{6,r}}W,\qquad 0\leqslant r\leqslant\rho.$$

Обозначим через $V'_{a^*,s,r}$ (соответственно $V_{a^*,s,r}$, $V'''_{a^*,s,r}$, $V''''_{a^*,s,r}$) объединение всех неприводимых компонент $W\in\mathcal{E}_{5,r}$, таких, что $W\subset V'_{a^*,s}$ (соответственно $W\subset V_{a^*,s}$, $W\subset V'''_{a^*,s}$, $W\subset V''''_{a^*,s}$).

Обозначим через $C'_{a^*,s}$ (соответственно $C_{a^*,s}$, $C'''_{a^*,s}$, $C''''_{a^*,s}$) объединение всех неприводимых компонент $\iota_{5,6}(W)$, где $W\in\mathcal{E}_5$ и $W\subset V'_{a^*,s}$ (соответственно $W\subset V'_{a^*,s}$, $W\subset V'''_{a^*,s}$, $W\subset V''''_{a^*,s}$).

Обозначим через $C'_{a^*,s,r}$ (соответственно $C_{a^*,s,r}, C'''_{a^*,s,r}, C''''_{a^*,s,r}$) объединение всех неприводимых компонент $\iota_{5,6}(W)$, где $W\in\mathcal{E}_{5,r}$ и $W\subset V'_{a^*,s}$ (соответственно $W\subset V_{a^*,s}$, $W\subset V'''_{a^*,s}$, $W\subset V''''_{a^*,s}$).

Таким образом, $C''_{a^*,s,r}$(соответственно $C'_{a^*,s,r}$, $C_{a^*,s,r}$, $C'''_{a^*,s,r}$, $C''''_{a^*,s,r}$) является подмножеством всех η из $C''_{a^*,s}$ (соответственно $C'_{a^*,s}$, $C_{a^*,s}$, $C'''_{a^*,s}$, $C''''_{a^*,s}$), таких, что $r_\eta=r$.

Заметим, что если $n-s\geqslant m$, то по свойству (α_{n-s}), см. раздел 5 и раздел 4, имеем $V'''_{a^*,s}=\varnothing$ и, следовательно, $V'''_{a^*,s,r}=\varnothing$ при $0\leqslant r\leqslant\rho$.

Положим $g_{a^*,r}=g_{a^*,L_{s+1},r}\in k_{a^*}[t_1,\dots,t_s,Z]$. Теперь по лемме 16(d) для всякого r и для всякого i многочлен

$$g_{a^*,L_i,r}|_{t=0}=g_{a^*,L_i,r}(0,t_1,\dots,t_s,Z)$$

совпадает с $g_{a^*,r}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Пусть $\mu_{a^*,r}=\mathrm{lc}_Z g_{a^*,r}$ (соответственно $\mu_{a^*,L_i,r}=\mathrm{lc}_Z g_{a^*,L_i,r}$, $0\leqslant i\leqslant n$). Заменяя $g_{a^*,r}$ на

$$g_{a^*,r}\prod_{s+2\leqslant j\leqslant n}\mu_{a^*,L_j,r}$$

и каждый многочлен $g_{a^*,L_i,r}$ на

$$g_{a^*,L_i,r}\mu_{a^*,r}\prod_{s+2\leqslant j\neq i\leqslant n}\mu_{a^*,L_j,r},$$

мы будем предполагать без ограничения общности, что $g_{a^*,L_i,r}(0,Z)=g_{a^*,r}$ при $s+2\leqslant i\leqslant n$.

Если $\deg_Z g_{a^*,r}=0$, то положим $\Phi_{a^*,s,r}=1$, $\lambda_{a^*,s,r,0}=\lambda_{a^*,s,r,1}=1$, $J_{a^*,s,r}=\varnothing$, $\Phi^{(1)}_{a^*,s,r}=1$ и $\Psi_{a^*,s,r,i_1,i_2}=1$, $\Psi^{(1)}_{a^*,s,r,i_1,i_2}=1$ для всех i_1,i_2, см. начало раздела.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\deg_Z g_{a^*,r} > 0$. Рассмотрим сепарабельную $\overline{k}$-алгебру

$$\Lambda_r = \overline{k}[t_1, \ldots, t_s, Z]/(g_{a^*,r}^{1/p^r}(t_1^{p^r}, \ldots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})).$$

Положим $\theta_{a^*,r} = Z \bmod g_{a^*,r}^{1/p^r}(t_1^{p^r}, \ldots, t_s^{p^r}, Z^{p^r}) \in \Lambda_r$ и

$$\theta'_{a^*,r,i} = -\left(\frac{\partial g_{a^*,L_i,r}}{\partial t}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g_{a^*,L_i,r}}{\partial Z}\right)\Bigg|_{\substack{t_1 \to t_1^{p^r}, \ldots, t_s \to t_s^{p^r}, \\ t \to 0,\, Z \to \theta_{a^*,r}^{p^r}}}, \quad s+2 \leqslant i \leqslant n$$

(это означает, что мы подставляем $t_i^{p^r}$ вместо t_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, 0 вместо t и $\theta_{a^*,r}^{p^r}$ вместо Z).

Пусть $\overline{k}(t_1, \ldots, t_s)[\theta_{a^*,r}]$ – локализация кольца Λ_r относительно мультипликативно замкнутого множества $\overline{k}[t_1, \ldots, t_s] \setminus \{0\}$, и пусть $\overline{k}(V''_{a^*,s,r} \setminus \mathcal{Z}(Y_0))$ – полное кольцо частных кольца регулярных функций $\overline{k}[V''_{a^*,s,r} \setminus \mathcal{Z}(Y_0)]$ алгебраического многообразия $V''_{a^*,s,r} \setminus \mathcal{Z}(Y_0)$. Тогда (ср. с разделом 3) существует естественный изоморфизм $\overline{k}$-алгебр

$$\overline{k}(V''_{a^*,s,r} \setminus \mathcal{Z}(Y_0)) \to \overline{k}(t_1, \ldots, t_s)[\theta_{a^*,r}],$$

такой, что $Y_i/Y_0 \mapsto t_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, $Y_{s+1}/Y_0 \mapsto \theta_{a^*,r}$ и $(Y_i/Y_0)^{p^r} \mapsto \theta'_{a^*,r,i}$ при $s+2 \leqslant i \leqslant n$.

Рассмотрим сепарабельную k-алгебру $\Lambda_r^{(1)} = \overline{k}[t_1, \ldots, t_s, Z]/(g_{a^*,r})$. Положим $\theta_{a^*,r}^{(1)} = Z \bmod g_{a^*,r} \in \Lambda_r^{(1)}$.

При $s+2 \leqslant i \leqslant n$

$$g_{a^*,L_i,r} = g_{a^*,r} + \sum_{j \geqslant 0} g_{a^*,L_i,r,j} t^j \in \overline{k}[t, t_1, \ldots, t_s, Z],$$

где $g_{a^*,L_i,r,j} \in \overline{k}[t_1, \ldots, t_s, Z]$. Положим $g'_{a^*,r} = \frac{\partial}{\partial Z}(g_{a^*,r})$. Мы имеем

$$-\left(\frac{\partial g_{a^*,L_i,r}}{\partial t}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g_{a^*,L_i,r}}{\partial Z}\right)\Bigg|_{t=0, Z=\theta^{(1)}_{a^*,r}} = -\left(g_{a^*,L_i,r,1}/g'_{a^*,r}\right)|_{Z=\theta^{(1)}_{a^*,r}} \in \Lambda_r^{(1)}.$$

Пусть $\delta_{a^*,r}$ – дискриминант многочлена $g_{a^*,r}$ относительно Z. Тогда можно записать $-\left(g_{a^*,L_i,r,1}/g'_{a^*,r}\right)|_{Z=\theta^{(1)}_{a^*,r}} = (\delta_{a^*,L_i,r}|_{Z=\theta^{(1)}_{a^*,r}})/\delta_{a^*,r}$, где $\delta_{a^*,L_i,r} \in k_{a^*}[t_1, \ldots, t_s, Z]$, $\deg_Z \delta_{a^*,L_i,r} < \deg_Z g_{a^*,r}$ и коэффициенты из k_{a^*} многочлена $\delta_{a^*,L_i,r}$ являются многочленами от коэффициентов всех $f_{a^*,j}$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, ср. с конструкцией многочленов $\delta_{a^*,i,r}$ в разделе 3. Следовательно,

$$\theta'_{a^*,r,i} = \frac{\delta_{a^*,L_i,r}(t_1^{p^r},\ldots,t_s^{p^r},\theta_{a^*,r}^{p^r})}{\delta_{a^*,r}(t_1^{p^r},\ldots,t_s^{p^r})}$$

для всех r, i.

Положим также $\delta_{a^*,L_{s+1},r} = Z\delta_{a^*,r}$ при $0 \leqslant r \leqslant \rho$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $Y_i = X_i$ при $s+2 \leqslant i \leqslant n$, ср. раздел 5. Напомним, что в разделе 5 для любого многочлена $F \in \overline{k(\varepsilon)}[X_0,\ldots,X_n]$ определён многочлен

$$F^\circ \in \overline{k(\varepsilon)}[t_1,\ldots,t_s,Y_0,Y_{s+1}\ldots,Y_n].$$

Ниже мы используем это определение с t вместо ε, т.е. с полем $\overline{k(t)}$ вместо $\overline{k(\varepsilon)}$. Теперь для всякого многочлена $F \in \overline{k}[t,X_0,\ldots,X_n]$ существует единственный многочлен $G \in \overline{k}[t,t_1,\ldots,t_s,Y_0,Y_{s+1}\ldots,Y_n]$, такой, что

$$(F^{p^r})^\circ = G(t^{p^r},t_1^{p^r},\ldots,t_s^{p^r},Y_0^{p^r},Y_{s+1}^{p^r},\ldots,Y_n^{p^r}).$$

По определению положим

$$F^\triangledown = G(t,t_1,\ldots,t_s,\delta_{a^*,r},\delta_{a^*,L_{s+1},r},\ldots,\delta_{a^*,L_n,r}) \in \overline{k}[t,t_1,\ldots,t_s,Z]. \quad (51)$$

Согласно нашей конструкции многочлен $g_{a^*,r}$ делит $h_{a^*,i}^\triangledown$ для всякого i, где $1 \leqslant i \leqslant n-s$ (здесь мы оставляем подробности читателю).

Предположим, что $s \geqslant n-m+1$ и, следовательно, $n-s \leqslant m-1$. Тогда определён многочлен $\widetilde{h}_{a^*,n-s+1}$ согласно формуле (27) с $j = n-s+1$, см. также исправление этой формулы в конце введения ко второй части. Расширим основное поле k до $k(t)$. Теперь многочлен $(\widetilde{h}_{a^*,n-s+1})^\triangledown$ определён согласно (51). Положим

$$g_{a^*,r}^{(4)} = \mathrm{G\,C\,D}_{\,t,t_1,\ldots,t_s,Z}\left(g_{a^*,r},(\widetilde{h}_{a^*,n-s+1})^\triangledown\right).$$

Здесь $\mathrm{G\,C\,D}_{\,t,t_1,\ldots,t_s,Z}$ является алгоритмом, соответствующим лесу вычислений, см. [6, раздел 2]. Поэтому

$$g_{a^*,r}^{(4)} \in k_{a^*}[t,t_1,\ldots,t_s,Z],$$

$$\deg_{t_1,\ldots,t_s,Z} g_{a^*,r}^{(4)} = D_{n-s+1}^{O(1)}$$

и степень $\deg_t g^{(4)}_{a^*,r}$ ограничена сверху величиной $D^{O(1)}_{n-s+1}$. Положим $g^{(5)}_{a^*,r} = \mathrm{LC}_t(g^{(4)}_{a^*,r})$; т.е. $g^{(5)}_{a^*,r}$ является старшим коэффициентом многочлена $g^{(4)}_{a^*,r}$ относительно t (см. [5], где дано точное определение леса вычислений $\mathrm{LC}_{\dots}$). Тогда, очевидно, $g^{(5)}_{a^*,r}$ является наибольшим общим делителем многочленов $g_{a^*,r}$ и $f^{\triangledown}_{a^*,i}$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, в кольце $k_{a^*}[t_1, \dots, t_s, Z]$.

Если $s < n - m + 1$, то положим $g^{(5)}_{a^*,r} = g_{a^*,r}$. В этом случае имеем $n - s - 1 \geqslant m - 1$ и, следовательно, по свойству (α_{n-s}), см. раздел 5 и раздел 4, многочлен $g_{a^*,r}$ делит $f^{\triangledown}_{a^*,i}$ при $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

Вернёмся к случаю произвольного s. Теперь по определению алгебраических многообразий $V'_{a^*,s}$ и $C'_{a^*,s}$ и лемме 16(d) многочлен $g^{(5)}_{a^*,r}(t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})$ совпадает с $\prod\limits_{\eta \in C'_{a^*,s,r}} (Z - (Y_{s+1}/Y_0)(\eta))^{p^r}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Положим $e_5 = \deg_Z g^{(5)}$. Положим

$$\Phi^{(1)}_{a^*,s,r} = Y_0^{e_5} g^{(5)}_{a^*,r}(Y_1/Y_0, \dots, Y_s/Y_0, Y_{s+1}/Y_0).$$

Тогда $\Phi^{(1)}_{a^*,s,r} \in k_{a^*}[Y_0, \dots, Y_{s+1}]$ является однородным многочленом относительно $Y_0, \dots, Y_{s+1}$. Далее, справедливы все утверждения пп. (iv)$'$ и (v)$'$ для $W_{a^*,s} = V'_{a^*,s}$, см. начало раздела.

Пусть $s \leqslant n-2$. Пусть $Y^{(i_1)} \in \mathcal{L}'_s$, $0 \leqslant i_1 \leqslant \varkappa_{2,s}$, см. введение. Пусть i_2 – целое число, $s+2 \leqslant i_2 \leqslant n$. Рассмотрим результант

$$\varphi^{(5)}_{a^*,r,i_1,i_2} = \mathrm{Res}_{Z_1}\Big(\delta_{a^*,r} Z - ((Y^{(i_1)} + tX_{i_2})^{\triangledown}|_{Z=Z_1}),\, g^{(5)}_{a^*,r}(t_1, \dots, t_s, Z_1)\Big).$$

Тогда

$$\varphi^{(5)}_{a^*,r,i_1,i_2} \in k_{a^*}[t, t_1, \dots, t_s, Z],$$

и $\varphi^{(5)}_{a^*,r,i_1,i_2}(t^{p^r}, t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})$ совпадает с

$$\delta^{e_5}_{a^*,r}(t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}) \prod_{\eta \in C'_{a^*,s,r}} \Big(Z - ((Y^{(i_1)}/Y_0) + t(X_{i_2}/Y_0))(\eta)\Big)^{p^r}$$

с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}.

Используя лемму 2 из работы [6] и нётерову нормализацию, мы вычисляем многочлен $\psi^{(5)}_{a^*,r,i_1,i_2} \in k_{a^*}[t, t_1, \dots, t_s, Z]$, совпадающий с $\varphi^{(5)}_{a^*,r,i_1,i_2}/\delta^{e_5}_{a^*,r}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Теперь

$\mathrm{lc}_Z\psi^{(5)}_{a^*,r,i_1,i_2} \in k_{a^*}$ и $\psi^{(5)}_{a^*,r,i_1,i_2}(t^{p^r}, t_1^{p^r}, \ldots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})$ совпадает с

$$\prod_{\eta\in C'_{a^*,s,r}} \Big(Z - ((Y^{(i_1)}/Y_0) + t(X_{i_2}/Y_0))(\eta)\Big)^{p^r}$$

с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Положим

$$\Psi^{(1)}_{a^*,s,r,i_1,i_2} = Y_0^{e_5}\psi^{(5)}_{a^*,r,i_1,i_2}(t, Y_1/Y_0, \ldots, Y_s/Y_0, Z/Y_0).$$

Тогда $\Psi^{(1)}_{a^*,s,r,i_1,i_2} \in k_{a^*}[t, Y_0, \ldots, Y_s, Z]$ является однородным многочленом относительно $Y_0, \ldots, Y_s, Z$. Далее, по лемме 8 справедливы все утверждения п. (xi)$'$ для $W_{a^*,s} = V'_{a^*,s}$, см. начало раздела.

Используя лемму 2 работы [6] и нётерову нормализацию, мы вычисляем многочлен $g^{(6)}_{a^*,r} \in k_{a^*}[t_1, \ldots, t_s, Z]$, совпадающий с $g_{a^*,r}/g^{(5)}_{a^*,r}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. По определению алгебраических многообразий $V'''_{a^*,s}$ и $C'''_{a^*,s}$ и лемме 16(d) многочлены

$$g^{(6)}_{a^*,r}(t_1^{p^r}, \ldots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})$$

и

$$\prod_{\eta\in C'''_{a^*,s,r}} (Z - (Y_{s+1}/Y_0)(\eta))^{p^r}$$

совпадают с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}.

Пусть $s = c$. Тогда положим $g^{(8)}_{a^*,s,r} = 1$, $0 \leqslant r \leqslant \rho_s$.

Пусть $s < c$. Мы собираемся определить и построить многочлен $g^{(8)}_{a^*,s,r}$ в этом случае. Пусть $s + 1 \leqslant s_1 \leqslant c$. Напомним, что по рекурсивному предположению на шаге номер s_1 получены линейные формы

$$Y_{s_1,0}, \ldots, Y_{s_1,s_1+1}$$

и многочлены $\Phi^{(1)}_{a^*,s_1,r_1} \in k_{a^*}[Y_{0,s_1}, \ldots, Y_{s_1,s_1}, Z]$, $0 \leqslant r_1 \leqslant \rho_{s_1}$. Далее, если $s_1 \leqslant n-2$, то также найдены многочлены $\Psi^{(1)}_{a^*,s_1,r_1,i_1,i_2} \in k_{a^*}[t, Y_{0,s_1}, \ldots, Y_{s_1,s_1}, Z]$, $0 \leqslant i_1 \leqslant \varkappa_{2,s_1}$, $s_1 + 2 \leqslant i_2 \leqslant n$, $1 \leqslant r_1 \leqslant \rho_{s_1} = \log_p D_{n-s_1}$. Если $c < n-1$, то положим $\varphi_{a^*,n-1} = 1$. Если $c = n-1$, то положим

$$\varphi_{a^*,n-1} = \prod_{0\leqslant r_1\leqslant\rho_{n-1}} \Phi^{(1)}_{a^*,n-1,r_1}(Y^{p^{r_1}}_{n-1,0}, \ldots, Y^{p^{r_1}}_{n-1,n}).$$

Если $s_1 \leqslant n-2$, то положим

$$\Phi^{(1)}_{a^*,s_1,r_1,i_1,i_2} = \Psi^{(1)}_{a^*,s_1,r_1,i_1,i_2}(t^{p^{r_1}}, Y^{p^{r_1}}_{s_1,0}, \ldots, Y^{p^{r_1}}_{s_1,s_1}, (Y^{(i_1)} + tX_{i_2})^{p^{r_1}})$$

(напомним, что здесь $Y^{(i_1)} \in \mathcal{L}_{s_1,\varkappa_{2,s_1}}$). Согласно п. (x)$'$, см. рекурсивное предположение в начале раздела, если $s_1 \leqslant n-2$, то

$$V'_{a^*,s_1,r_1} = \mathcal{Z}(\Phi^{(1)}_{a^*,s_1,r_1,i_1,i_2}, \forall i_1, i_2) \cap \mathbb{P}^n(\overline{k}),$$

а если $c = n-1$, то $V'_{a^*,n-1} = \mathcal{Z}(\varphi_{a^*,n-1})$.

Пусть u_1, u_2 – трансцендентные элементы над полем $k(t)$. Расширим основное поле k до $k(t)$. Теперь (см. (51)) определён многочлен $\varphi^{\nabla}_{a^*,n-1} \in k_{a^*}[t_1,\dots,t_s,Z]$, если $c = n-1$, а также все многочлены $(\Phi^{(1)}_{a^*,s_1,r_1,i_1,i_2})^{\nabla} \in k_{a^*}[t,t_1,\ \dots,t_s,Z]$, если $s_1 \leqslant n-2$. Положим $c_1 = \min\{c, n-2\}$ и

$$\varphi_{a^*,s,r} = \varphi^{\nabla}_{a^*,n-1} \cdot \prod_{s+1 \leqslant s_1 \leqslant c_1} \ \prod_{0 \leqslant r_1 \leqslant \rho_{s_1}} \left(\sum_{\substack{0 \leqslant i_1 \leqslant \varkappa_{2,s_1}, \\ s_1+2 \leqslant i_2 \leqslant n}} u_1^{i_1} u_2^{i_2} (\Phi^{(1)}_{a^*,s_1,r_1,i_1,i_2})^{\nabla} \right).$$

Положим

$$g^{(7)}_{a^*,r} = \mathrm{G\,C\,D}_{\,t,u_1,u_2,t_1,\dots,t_s,Z} \left(g^{(5)},\, \varphi_{a^*,s,r} \right).$$

Тогда

$$g^{(7)}_{a^*,r} \in k_{a^*}[t,u_1,u_2,t_1,\dots,t_s,Z],$$

а степени $\deg_{t_1,\dots,t_s,Z} g^{(7)}_{a^*,r}$ и $\deg_{t,u_1,u_2} g^{(7)}_{a^*,r}$ ограничены сверху величиной $D^{O(1)}_{n-s+1}$. Положим

$$g^{(8)}_{a^*,r} = \mathrm{LC}_t(\mathrm{LC}_{u_1}(\mathrm{LC}_{u_2}(g^{(7)}_{a^*,r}))).$$

Для произвольного $s \leqslant c$ по определению алгебраических многообразий $V''''_{a^*,s}$ и $C''''_{a^*,s}$ и лемме 16(d) многочлен $g^{(8)}_{a^*,r}(t_1^{p^r},\dots,t_s^{p^r},Z^{p^r})$ совпадает с

$$\prod_{\eta \in C''''_{a^*,s,r}} (Z - (Y_{s+1}/Y_0)(\eta))^{p^r}$$

с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*} (здесь мы оставляем подробности читателю).

Применяя лемму 2 из работы [6] и нётерову нормализацию, мы вычисляем многочлен $g^{(9)}_{a^*,r} \in k_{a^*}[t_1,\dots,t_s,Z_1]$, совпадающий с $g^{(6)}_{a^*,r}/g^{(8)}_{a^*,r}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. По определению алгебраических многообразий $V_{a^*,s}$ и $C_{a^*,s}$ и лемме 16(d) многочлены

$$g^{(9)}_{a^*,r}(t_1^{p^r},\dots,t_s^{p^r},Z^{p^r})$$

и

$$\prod_{\eta\in C_{a^*,s,r}} (Z-(Y_{s+1}/Y_0)(\eta))^{p^r}$$

совпадают с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Положим $e_9=\deg_Z g^{(9)}_{a^*,r}$. Положим

$$\Phi_{a^*,s,r}=Y_0^{e_9}g^{(9)}_{a^*,r}(Y_1/Y_0,\ldots,Y_s/Y_0,Y_{s+1}/Y_0).$$

Тогда $\Phi_{a^*,s,r}\in k_{a^*}[Y_0,\ldots,Y_{s+1}]$ – однородный многочлен относительно $Y_0,\ldots,Y_{s+1}$. Далее, выполняются все утверждения пп. (iv)$'$ и (v)$'$ для $W_{a^*,s}=V_{a^*,s}$, см. начало раздела.

Теперь предположим, что $s\leqslant n-2$. В этом случае пусть $Y^{(i_1)}\in\mathcal{L}'_s$, $0\leqslant i_1\leqslant\varkappa_{2,s}$, см. введение. Пусть i_2 – целое число, $s+2\leqslant i_2\leqslant n$. Рассмотрим результант

$$\varphi^{(9)}_{a^*,r,i_1,i_2}=\mathrm{Res}_{Z_1}\Big(\delta_{a^*,r}Z-((Y^{(i_1)}+tX_{i_2})^{\nabla}|_{Z=Z_1}),\ g^{(9)}_{a^*,r}(t_1,\ldots,t_s,Z_1)\Big).$$

Тогда

$$\varphi^{(9)}_{a^*,r,i_1,i_2}\in k_{a^*}[t,t_1,\ldots,t_s,Z],$$

и $\varphi^{(9)}_{a^*,r,i_1,i_2}(t^{p^r},t_1^{p^r},\ldots,t_s^{p^r},Z^{p^r})$ совпадает с

$$\delta^{e_9}_{a^*,r}(t_1^{p^r},\ldots,t_s^{p^r})\prod_{\eta\in C_{a^*,s,r}}\Big(Z-((Y^{(i_1)}/Y_0)+t(X_{i_2}/Y_0))(\eta)\Big)^{p^r}$$

с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}.

Применяя лемму 2 из работы [6] и нётерову нормализацию, мы вычисляем многочлен $\psi^{(9)}_{a^*,r,i_1,i_2}\in k_{a^*}[t,t_1,\ldots,t_s,Z]$, совпадающий с $\varphi^{(9)}_{a^*,r,i_1,i_2}/\delta^{e_9}_{a^*,r}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Теперь $\mathrm{lc}_Z\psi^{(9)}_{a^*,r,i_1,i_2}\in k_{a^*}$ и многочлен $\psi^{(9)}_{a^*,r,i_1,i_2}(t^{p^r},t_1^{p^r},\ldots,t_s^{p^r},\ Z^{p^r})$ совпадает с

$$\prod_{\eta\in C_{a^*,s,r}}\big(Z-((Y^{(i_1)}/Y_0)+t(X_{i_2}/Y_0))(\eta)\big)^{p^r}$$

с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Положим

$$\Psi_{a^*,s,r,i_1,i_2}=Y_0^{e_9}\psi^{(9)}_{a^*,r,i_1,i_2}(t,Y_1/Y_0,\ldots,Y_s/Y_0,Z/Y_0).$$

Тогда $\Psi_{a^*,s,r,i_1,i_2}\in k_{a^*}[t,Y_0,\ldots,Y_s,Z]$ – однородный многочлен относительно $Y_0,\ldots,Y_s,Z$. Далее, по лемме 8 выполняются все утверждения п. (ix)$'$ для $W_{a^*,s}=V_{a^*,s}$, см. начало раздела.

Теперь мы вернёмся к случаю произвольных s, c, $0 \leqslant s \leqslant c \leqslant n-1$. Мы применяем модифицированную версию теоремы 1 из работы [6] (см. замечание 2 во введении) и строим разложение многочлена $\Phi_{a^*,s,r}$ на абсолютно неприводимые множители в кольце $\overline{k}[Y_0, \dots, Y_{s+1}]$. Это разложение получается при помощи многозначного леса вычислений, см. замечание в конце раздела 2.

Таким образом, мы получаем конечное (или пустое) семейство многочленов $H_{a^*,j} \in k_{a^*}[Z]$, $j \in J_{a^*,s,r}$, их дискриминанты $0 \neq \Delta_{a^*,j} \in \overline{k}$, множество корней $\Xi_{a^*,j}$ каждого многочлена $H_{a^*,j}$, ненулевые элементы $\lambda_{a^*,s,r,0}$, $\lambda_{a^*,s,r,1} \in k_{a^*}$, многочлены $\Phi_{a^*,j} \in k_{a^*}[Z, Y_1, \dots, Y_{s+1}]$, $j \in J_{a^*,s,r}$, и неприводимые над $\overline{k}$ компоненты $W_{a^*,j,\xi}$, $\xi \in \Xi_{a^*,j}$, $j \in J_{a^*,s,r}$, алгебраического многообразия $V_{a^*,s,r}$. Эти объекты удовлетворяют свойствам (vi)$'$–(viii)$'$ для многообразия $W_{a^*,s} = V_{a^*,s}$ (см. начало раздела), но с одним исключением. Именно, применяя конструкцию из [6], мы получаем многочлен

$$\varphi_{a^*,j,0} = \mathrm{lc}_{Y_{s+1}} \Phi_{a^*,j} \in k_{a^*}[Z]$$

с $\deg_Z \varphi_{a^*,j,0} < \deg_Z H_{a^*,j}$. Но в (vi)$'$ требуется, чтобы $\varphi_{a^*,j,0} \in k_{a^*}$.

Однако мы можем удовлетворить последнему условию, заменяя каждый многочлен $\Phi_{a^*,j}$ на новый следующим образом. Существуют многочлены $A_j, B_j \in k_{a^*}[Z]$, которые удовлетворяют условиям $\deg_Z A_j < \deg_Z H_{a^*,j}$, $\deg_Z B_j < \deg_Z \varphi_{a^*,j,0}$ и

$$A_j \varphi_{a^*,j,0} + B_j H_{a^*,j} = \mathrm{Res}_Z(\varphi_{a^*,j,0}, H_{a^*,j}),$$

где $0 \neq \mathrm{Res}_Z(\varphi_{a^*,j,0}, H_{a^*,j}) \in k_{a^*}$. Пусть $\deg_{Y_{s+1}} \Phi_{a^*,j} = e_1$. Положим

$$\widetilde{\Phi}_{a^*,j} = A_j \Phi_{a^*,j} + (\mathrm{Res}_Z(\varphi_{a^*,j,0}, H_{a^*,j}) - A_j \varphi_{a^*,j,0}) Y_{s+1}^{e_1}.$$

Пусть $\deg_Z \widetilde{\Phi}_{a^*,j} = e_2$, $\deg_Z H_{a^*,j} = e_3$ и $e_{2,3} = \max\{e_2 - e_3 + 1, 0\}$. Далее, применяя лемму 2 из работы [6], запишем

$$(\mathrm{lc}_Z H_{a^*,j})^{e_{2,3}} \widetilde{\Phi}_{a^*,j} = Q_{a^*,j} H_j + R_{a^*,j},$$

где $Q_{a^*,j}, R_{a^*,j} \in k_{a^*}[Y_0, \dots, Y_{s+1}, Z]$, $\deg_Z R_{a^*,j} < \deg_Z H_{a^*,j}$ и

$$\mathrm{lc}_{Y_{s+1}} R_{a^*,j} = (\mathrm{lc}_Z H_{a^*,j})^{e_{2,3}} \mathrm{Res}_Z(\varphi_{a^*,j,0}, H_{a^*,j}) \in k_{a^*}.$$

Наконец, мы заменяем каждый многочлен $\Phi_{a^*,j}$ на $R_{a^*,j}$. Это также требует замены элементов $\lambda_{a^*,s,r,0}$, $\lambda_{a^*,s,r,1}$. Фактически можно взять новые элементы $\lambda_{a^*,s,r,0} = \mathrm{lc}_Z \Phi_{a^*,s,r}$, $\lambda_{a^*,s,r,1} = \prod\limits_{j \in J_{s,r}} \mathrm{lc}_Z R_{a^*,j}$. Теперь выполняются свойства (vi)$'$–(viii)$'$ для многообразия $W_{a^*,s} = V_{a^*,s}$.

Напомним, что $\delta^{(0)} = \det((y_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n})$, см. (29). Положим $G_{a^*,s,r} = (\delta^{(0)})^{p^r}\delta_{a^*,r}$. Мы собираемся определить $G_{a^*,s,r,i}$ для $0 \leqslant i \leqslant n$. Запишем $\delta^{(0)}X_i = \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n} x_{i,j}Y_j$, $0 \leqslant i \leqslant n$, где $x_{i,j} \in \overline{k}$. Положим $\varepsilon_{a^*,Y_i,r} = \delta_{a^*,L_i,r}$ при $s+2 \leqslant i \leqslant n$; $\varepsilon_{a^*,Y_{s+1},r} = Z\delta_{a^*,r}$, $\varepsilon_{a^*,Y_0,r} = \delta_{a^*,r}$ $\varepsilon_{a^*,Y_i,r} = t_i\delta_{a^*,r}$ при $1 \leqslant i \leqslant s$. Наконец, положим

$$G_{a^*,s,r,i} = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} x_{i,j}^{p^r}\varepsilon_{a^*,s,r,j}$$

при $0 \leqslant i \leqslant n$.

Далее мы собираемся построить все многочлены $G_{a^*,j}$, $G_{a^*,j,i}$ при $0 \leqslant i \leqslant n$. Положим $\varphi_{a^*,j} = \Phi_{a^*,j}(Z, 1, t_1, \ldots, t_s, Y)$. Таким образом, $\deg_Y \varphi_{a^*,j} = e_1$ и $\varphi_{a^*,j,0} = \mathrm{lc}_Y\varphi_{a^*,j} \in k_{a^*}$. Пусть $\deg_Z \varphi_{a^*,j} = e_4$, $\deg_Z G_{a^*,X_i,r} = e_{6,i}$ и $e_{6,4} = \max_i\{e_{6,i} - e_4 + 1, 0\}$. Применяя лемму 2 из работы [6], мы можем записать

$$\varphi_{a^*,j,0}^{e_{6,4}} G_{a^*,X_i,r}(t_1, \ldots, t_s, Y) = Q_{a^*,i}\varphi_{a^*,j} + R_{a^*,i},$$

где $Q_{a^*,i}, R_{a^*,i} \in k_{a^*}[Z, t_1, \ldots, t_s, Y]$ и $\deg_Y R_{a^*,i} < \deg_Y \varphi_{a^*,j}$. Пусть $\deg_Z R_{a^*,i} = e_{7,i}$ и $e_{7,3} = \max_i\{e_{7,i} - e_3 + 1, 0\}$. Снова применяя лемму 2 из работы [6], мы можем записать

$$(\mathrm{lc}_Z H_{a^*,j})^{e_{7,3}} R_{a^*,i} = Q'_{a^*,i}\varphi_{a^*,j} + R'_{a^*,i},$$

где $Q'_{a^*,i}, R'_{a^*,i} \in k_{a^*}[Z, t_1, \ldots, t_s, Y]$ и выполняются неравенства

$$\deg_Y R'_{a^*,i} < \deg_Y \varphi_{a^*,j}, \qquad \deg_Z R'_{a^*,i} < \deg_Z H_{a^*,j}.$$

Положим

$$G_{a^*,j} = \delta_{a^*,r}\varphi_{a^*,j}^{e_{6,4}}(\mathrm{lc}_Z H_{a^*,j,0})^{e_{7,3}}, \quad G_{a^*,j,i} = R'_{a^*,i}.$$

Теперь выполняются свойства (x)$'$ и (ix)$'$ для $W_{a^*,s} = V_{a^*,s}$ (здесь отметим, что в (x) (и, следовательно, также в (x)$'$) следует заменить везде max на $\max_i$; это небольшое исправление, см. введение ко второй части).

Пусть $s \leqslant n-2$ и $j \in J_{a^*,s,r}$. Далее мы собираемся построить все многочлены Ψ_{a^*,j,i_1,i_2}. Пусть $Y^{(i_1)} \in \mathcal{L}'_s$, $0 \leqslant i_1 \leqslant \varkappa_{2,s}$, см. введение. Пусть i_2 – целое число, $s+2 \leqslant i_2 \leqslant n$. Рассмотрим результант

$$\varphi_{a^*,j,i_1,i_2} = \mathrm{Res}_Y\Big(\delta_{a^*,r}Z_1 - ((Y^{(i_1)} + tX_{i_2})^{\triangledown}|_{Z=Y}),\ \varphi_{a^*,r}(Z, t_1, \ldots, t_s, Y)\Big).$$

Тогда $\varphi_{a^*,j,i_1,i_2} \in k_{a^*}[Z, t, t_1, \dots, t_s, Z_1]$. Для всякого $\xi \in \Xi_{a^*,j}$ элемент $\varphi_{a^*,r,i_1,i_2}(t^{p^r}, t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})|_{Z=\xi}$ совпадает с

$$\delta^{e_1}_{a^*,r}(t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}) \prod_{\eta \in \iota_{5,6}(W_{a^*,j,\xi})} \Big(Z_1 - ((Y^{(i_1)}/Y_0) + t(X_{i_2}/Y_0))(\eta)\Big)^{p^r}$$

с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Следовательно,

$$(\varphi_{a^*,j,i_1,i_2}|_{Z=\xi})/\delta^{e_1}_{a^*,r} = \varphi_{a^*,j,i_1,i_2,\xi} \in \overline{k}[t, t_1, \dots, t_s, Z_1], \quad \xi \in \Xi_{a^*,j}. \tag{52}$$

Запишем $\varphi_{a^*,j,i_1,i_2}/\delta^{e_1}_{a^*,r} = \sum\limits_{0 \leqslant i < e_3} \varphi_{a^*,j,i_1,i_2,i} Z^i$, где

$$\varphi_{a^*,j,i_1,i_2,i} \in k_{a^*}(t_1, \dots, t_s)[t, Z_1].$$

Решая линейную систему $\sum\limits_{0 \leqslant i < e_3} U_i \xi^i = \varphi_{a^*,j,i_1,i_2,\xi}$, $\xi \in \Xi_{a^*,j}$, относительно неизвестных $U_0, \dots, U_{e_3-1}$, мы выводим, что $\varphi_{a^*,j,i_1,i_2,i} \in k_{a^*}[t, t_1, \dots, t_s, Z_1]$. Поэтому

$$\varphi_{a^*,j,i_1,i_2}/\delta^{e_1}_{a^*,r} \in k_{a^*}[Z, t, t_1, \dots, t_s, Z_1].$$

Применяя лемму 2 из работы [6] и нётерову нормализацию, мы вычисляем многочлен $\psi_{a^*,j,i_1,i_2} \in k_{a^*}[Z, t, t_1, \dots, t_s, Z]$, совпадающий с $\varphi_{a^*,j,i_1,i_2}/\delta^{e_3}_{a^*,r}$ с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*}. Теперь $\mathrm{lc}_Z \psi_{a^*,j,i_1,i_2} \in k_{a^*}$ и многочлен

$$\psi_{a^*,j,i_1,i_2}(t^{p^r}, t_1^{p^r}, \dots, t_s^{p^r}, Z^{p^r})|_{Z=\xi}$$

совпадает с

$$\prod_{\eta \in \iota_{5,6}(W_{a^*,j,\xi})} \big(Z - ((Y^{(i_1)}/Y_0) + t(X_{i_2}/Y_0))(\eta)\big)^{p^r}$$

с точностью до ненулевого множителя из k_{a^*} для всякого $\xi \in \Xi_{a^*,j}$. Положим

$$\Psi_{a^*,j,i_1,i_2} = Y_0^{e_3} \psi_{a^*,j,i_1,i_2}(Z, t, Y_1/Y_0, \dots, Y_s/Y_0, Z_1/Y_0).$$

Тогда $\Psi_{a^*,j,i_1,i_2} \in k_{a^*}[Z, t, Y_0, \dots, Y_s, Z_1]$ является однородным многочленом относительно $Y_0, \dots, Y_s, Z_1$. Далее, по лемме 8 выполняются все утверждения п. (xii)$'$ для $W_{a^*,s} = V_{a^*,s}$, см. начало раздела.

Таким образом, сейчас выполняются свойства (iv)$'$–(xii)$'$ с $s = q$ для $W_{a^*,s} = V_{a^*,s}$. Остаётся построить многочлен $h_{a^*,n-s+1}$ и все многочлены $q_{a^*,n-s+1,w}$, $n-s+1 \leqslant w \leqslant m-1$, если $V'''_{a^*,s} \ne \varnothing$ и $s = q > c'-1$. Многообразие $V'''_{a^*,s}$ непусто тогда и только тогда, когда $\deg_Z g^{(6)}_{a^*,s,r} \ne 0$ для некоторого r, где $0 \leqslant r \leqslant \rho$. Следовательно, в этом случае $s \geqslant n-m+1$. Теперь положим

$$\delta^{(6)}_{a^*,r} = \mathrm{Res}_Z \left(g^{(6)}_{a^*,r}, (\widetilde{h}_{a^*,n-s+1})^{\triangledown} \right).$$

Тогда $0 \neq \delta^{(6)}_{a^*,r} \in k_{a^*}[t, t_1, \ldots, t_s]$. Далее, положим $N_1 = \sum_{0 \leqslant r \leqslant \rho} \deg_t \delta^{(6)}_{a^*,r}$. Мы перебираем элементы множества $\mathcal{I}_{N_1}$ и находим элемент $t' \in \mathcal{I}_{N_1}$, такой, что

$$\left(\prod_{0 \leqslant r \leqslant \rho} \delta^{(6)}_{a^*,r} \right)\Big|_{t=t'} \neq 0.$$

Положим $t_{a^*,n-s+1} = t'$ и $q_{a^*,n-s+1,w} = q_{n-s+1,w}|_{t=t'}$ при $n-s+1 \leqslant w \leqslant m-1$, $q_{a^*,n-s+1,n-s} = 1$ и $q_{a^*,n-s+1,w} = 0$ при $0 \leqslant w \leqslant n-s-1$. Положим $h_{a^*,n-s+1} = \widetilde{h}_{a^*,n-s+1}|_{t=t'}$, см. раздел 4. Тогда, очевидно, $\dim(V'''_{a^*,s} \cap \mathcal{Z}(h_{a^*,n-s+1})) = s-1$.

Если $V'''_{a^*,s} \neq \varnothing$ и $s = q > c'-1$, то мы переходим к следующему, $(q-1)$-му рекурсивному шагу.

Если $V'''_{a^*,s} = \varnothing$ или $s = q = c'-1$, то q-й шаг является заключительным. Положим $c'_{a^*} = s = q$. В этом случае $V_{a^*,s_2} = \varnothing$, $V_{a^*,s_2,r_2} = \varnothing$ при $0 \leqslant s_2 \leqslant q-1$, $0 \leqslant r_2 \leqslant \rho_{s_2}$. Положим $\Phi_{a^*,s_2,r_2} = 1$, $\lambda_{a^*,s_2,r_2,0} = \lambda_{a^*,s_2,r_2,1} = 1$, $J_{a^*,s_2,r_2} = \varnothing$ и $\Psi_{a^*,s_2,r_2,i_1,i_2} = 1$ при $0 \leqslant s_2 \leqslant q-1$, $0 \leqslant r_2 \leqslant \rho_{s_2}$, $0 \leqslant i_1 \leqslant \varkappa_{2,s_2}$, $s_2+2 \leqslant i_2 \leqslant n$.

Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{a^*} = \Big(&\{(\Phi_{a^*,s,r}, \lambda_{a^*,s,r,0}, \lambda_{a^*,s,r,1})\}_{\forall s,r}, \{G_{a^*,s,r,i}\}_{\forall s,r,i}, \\ &\{\Psi_{a^*,s,r,i_1,i_2}\}_{\forall s,r,i_1,i_2}, \\ &\{(H_{a^*,j}, \Delta_{a^*,j}, \Phi_{a^*,j})\}_{j \in J_{a^*,s,r}, \forall s,r}, \\ &\{\Psi_{a^*,j,i_1,i_2}\}_{j \in J_{a^*,s,r}, \forall i_1,i_2, \forall s,r}, \\ &\{h_{a^*,i}\}_{1 \leqslant i \leqslant n-c'_{a^*}}, \{q_{a^*,i,i_1}\}_{1 \leqslant i \leqslant n-c'_{a^*}, 0 \leqslant i_1 \leqslant m-1} \Big).\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{Q}_{a^*}$ является набором из 7 семейств.

Теперь аналогично разделу 3 при условии ($\mathfrak{g}$) описанная конструкция определяет многозначную функцию (или бинарное отношение)

$$\mathfrak{F} : \bigcup_{n,d_0,\ldots,d_{m-1}} \overline{k}^{\gamma_0+\ldots+\gamma_{m-1}} \to \mathcal{K}, \quad a^* \mapsto \mathcal{Q}_{a^*},$$

которое является алгоритмом, соответствующим многозначному лесу вычислений $T_1 = \{T_{1,n,d_0,\dots,d_{m-1}}\}_{\forall n,d_0,\dots,d_{m-1}}$ в смысле раздела 2. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(T_1)$. Значения этой функции зависят от выбора линейных форм $Y_{s,0},\dots,Y_{s,s+1}$ для всех s, где $c' \leqslant s \leqslant \min\{c, n-1\}$.

Пусть v – вершина дерева $T_{1,n,d_0\dots d_{m-1}}$. Тогда этой вершине соответствует квазипроективное алгебраическое многообразие

$$\mathcal{W}_v = \mathcal{Z}(\psi_{v,1},\dots,\psi_{v,\mu_{v,1}}) \setminus \mathcal{Z}(\psi_{v,\mu_{v,1}+1},\dots,\psi_{v,\mu_{v,2}}) \subset \mathcal{U}_c. \tag{53}$$

Положим $A_{\mathfrak{g}}$ равным множеству $L(T_{1,n,d_0\dots d_{m-1}})$ листьев дерева $T_{1,n,d_0\dots d_{m-1}}$. Пусть $\alpha \in A_{\mathfrak{g}}$. Тогда (см. (53) с $v = \alpha$) все многочлены $\psi_{\alpha,j} \in k[a_1,\dots,a_\nu]$ имеют степени, ограниченные сверху величиной $D_{n-c'}^{O(1)}$ с абсолютной константой в $O(1)$. Заметим, что для каждого листа α его уровень $\mathrm{l}(\alpha)$ есть $D_{n-c'}^{O(1)}$. Имеем $\bigcup\limits_{\alpha\in A_{\mathfrak{g}}} \mathcal{W}_\alpha = \mathcal{U}_c$, т.е. мы получаем покрытие множества $\mathcal{U}_c$.

Далее, набор из 7 семейств

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\alpha = \Big(&\{(\Phi_{\alpha,s,r},\lambda_{\alpha,s,r,0},\lambda_{\alpha,s,r,1})\}_{\forall s,r},\ \{G_{\alpha,s,r,i}\}_{\forall s,r,i},\\ &\{\Psi_{\alpha,s,r,i_1,i_2}\}_{\forall s,r,i_1,i_2},\\ &\{(H_{\alpha,j},\Delta_{\alpha,j},\Phi_{\alpha,j})\}_{j\in J_{\alpha,s,r},\,\forall s,r},\\ &\{\Psi_{\alpha,j,i_1,i_2}\}_{j\in J_{\alpha,s,r},\,\forall i_1,i_2,\,\forall s,r},\\ &\{h_{\alpha,i}\}_{1\leqslant i\leqslant n-c'_\alpha},\ \{q_{\alpha,i,i_1}\}_{1\leqslant i\leqslant n-c'_\alpha,\,0\leqslant i_1\leqslant m-1}\Big)\end{aligned}$$

соответствует листу α. Здесь все объекты в правой части последнего равенства определены во введении, и для них справедливы условия (iv)–(xiii). Кроме того, для всякого s, где $c' \leqslant s \leqslant \min\{c, n-1\}$, листу α соответствуют линейные формы $Y_{s,0},\dots,Y_{s,s+1}$.

Теперь для всякого $a^* \in \mathcal{W}_\alpha$ мы имеем

$$\mathcal{Q}_{a^*} = \mathcal{Q}_\alpha|_{a_1=a_1^*,\dots,a_\nu=a_\nu^*}.$$

В частности, $c'_\alpha = c'_{a^*}$, и мы отождествляем $J_{\alpha,s,r}$ с $J_{a^*,s,r}$ и $\Xi_{a^*,j}$ с Ξ_{j,a^*} для всех $j \in J_{\alpha,s,r}$ и для всех s, r. Линейные формы $Y_{s,0},\dots,Y_{s,s+1}$, соответствующие листу α, совпадают с линейными формами, появляющимися в рекурсии для элемента $a^* \in \mathcal{W}_\alpha$, см. раздел 6 и настоящий раздел.

Из описания основной рекурсии и результатов работы [6] немедленно следует, что утверждения (b), (c) и (d) теоремы 1 выполняются с $A_{\mathfrak{g}}$ вместо A.

Более того, пусть s фиксировано. Положим

$$\mathcal{Q}_{\alpha,s} = \Big(\{(\Phi_{\alpha,s,r}, \lambda_{\alpha,r,0}, \lambda_{\alpha,s,r,1})\}_{\forall r},\ \{G_{\alpha,s,r,i}\}_{\forall r,i},\ \{\Psi_{\alpha,s,r,i_1,i_2}\}_{\forall r,i_1,i_2},$$
$$\{(H_{\alpha,j}, \Delta_{\alpha,j}, \Phi_{\alpha,j})\}_{j\in J_{\alpha,s,r},\,\forall r},\ \{\Psi_{\alpha,j,i_1,i_2}\}_{j\in J_{\alpha,r},\,\forall i_1,i_2,\,\forall r}\Big).$$

Тогда из описания основной рекурсии и результатов работы [6] следует, что все объекты из левой части последнего равенства вычисляются уже в некоторой вершине v дерева $T_{1,n,d_0,\dots,d_{m-1}}$ уровня $\mathrm{l}(v) = D_{n-s}^{O(1)}$. Лист α является потомком вершины v. Далее (см. (53)), все многочлены $\psi_{v,j} \in k[a_1,\dots,a_\nu]$ имеют степени, ограниченные сверху величиной $D_{n-s}^{O(1)}$ с абсолютной константой в $O(1)$.

Предположим, что условие ($\mathfrak{g}$) не обязательно выполняется. Обозначим через f семейство коэффициентов из $k[a_1,\dots,a_\nu]$ всех многочленов $f_0,\dots,f_{m-1}$. Тогда по теореме 3, применённой к дереву

$$T_{1,d_0,\dots,d_{m-1}}(f)$$

(см. определение этого дерева в разделе 2), мы получаем несократимое поддерево $T'_{1,d_0,\dots,d_{m-1}}(f)$ дерева $T_{1,d_0,\dots,d_{m-1}}(f)$, такое, что

$$\mathcal{S}(T'_{1,d_0,\dots,d_{m-1}}(f) = \mathcal{S}(T_{1,d_0,\dots,d_{m-1}}(f).$$

Положим $A = L(T'_{1,d_0,\dots,d_{m-1}}(f)$. Теперь справедливы все утверждения модифицированной теоремы 1. Таким образом, модифицированная теорема 1 доказана.

Обозначим $\Gamma = A$ и предположим, что A теперь не используется в обозначениях, введённых ранее (т.е. мы меняем обозначения). Наконец, применяя лемму 3 к покрытию $\mathcal{U}_c = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{W}_\gamma$, мы доказываем теорему 1.

Список литературы

1. A. Ayad, *Complexity of solving parametric polynomial systems.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **387** (2011), 5–52.
2. А. Л. Чистов, *Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов на неприводимые множители и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **137** (1984), 124–188.
3. A. L. Chistov, *An improvement of the complexity bound for solving systems of polynomial equations.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **390** (2011), 299–306.

4. А. Л. Чистов, *Оценка степени системы уравнений, задающей многообразие приводимых многочленов.* — Алгебра и анализ **24**, вып. 3 (2012), 199–222; и *"Исправление…"*, Алгебра и анализ **25**, вып. 2 (2013), 279.
5. А. Л. Чистов, *Вычисления с параметрами: теоретическое обоснование.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **436** (2015), 219–239.
6. А. Л. Чистов, *Эффективное разложение многочленов с параметрическими коэффициентами на абсолютно неприводимые множители.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **448** (2016), 286–325.
7. А. Л. Чистов, *Эффективные алгоритмы факторизации многочленов и их приложения*, Диссертация на соискание учёной степени доктора физ.-мат. наук, Ленинград, 1987.
8. А. Л. Чистов, *Системы с параметрами, или эффективное решение систем полиномиальных уравнений* 33 *года спустя.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **462** (2017), 122–166.
9. A. Chistov, H. Fournier, L. Gurvits, P. Koiran, *Vandermonde matrices, NP-completeness, and transversal subspaces.* — Found. Comput. Math. **3**, No. 4 (2003), 421–427.
10. D. Lazard, F. Rouillier, *Solving parametric polynomial systems.* — J. Symbolic Comput. **42**, No. 6 (2007), 636–667.
11. D. Lazard, *Résolution des systémes d'équations algébriques.* — Theoret. Comput. Sci. **15** (1981), 77–110.
12. D. Lazard, *Commutative algebra and computer algebra.* — Lect. Notes Comput. Sci. **144** (1983), 40–48.

Chistov A. L. Systems with parameters, or efficiently solving systems of polynomial equations: 33 years later. II.

Consider a system of polynomial equations with parametric coefficients over an arbitrary ground field. We show that the variety of parameters can be represented as a union of strata. For values of the parameters from each stratum, the solutions of the system are given by algebraic formulas depending only on this stratum. Each stratum is a quasiprojective algebraic variety with degree bounded from above by a subexponential function in the size of the input data. Also, the number of strata is subexponential in the size of the input data. Thus, here we avoid double exponential upper bounds on the degrees and solve a long-standing problem.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: alch@pdmi.ras.ru

Поступило 31 июля 2018 г.