Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

**Ф. В. Петров**

# АСИМПТОТИКА СЛЕДОВ ПУТЕЙ НА ГРАФАХ ЮНГА И ШУРА

## Предисловие А. М. Вершика

Задача прямого доказательства единственности меры Планшереля в классе невырожденных центральных мер на графе Юнга ставилась мной неоднократно, несмотря на несколько аналитических доказательств этого факта, начиная с теоремы Э. Тома, которая по существу опирается на исключительно красивую теорему Эдреи о характеризации экспоненты как единственной вполне положительной целой функции без нулей. Другие доказательства состояли в том, что искалась формула для той или иной характеристики таких мер (все меры по эргодическому методу порождаются некоторой последовательностью таблиц) и оказывалось, что эта характеристика может принимать в пределе только одно значение, а именно такое, как у меры Планшереля. Таково наше алгебро-аналитическое доказательство с С. Керовым в работе 1981 г., где за основу брались характеры или, что то же самое, меры цилиндров; таково и нижеследующее новое и более элементарное доказательство Ф. Петрова, в котором ищется предел переходных вероятностей центральной меры (марковской цепи) и он опять оказывается таким, как надо. Все эти и другие доказательства так или иначе основаны на формулах из теории симметрических функций и вычислении главных членов их асимптотик. Доказательство Ф. Петрова, видимо, самое короткое и простое из них. Но вопрос о прямом (геометрическом) доказательстве единственности центральной меры (по аналогии с теоремой единственности меры Хаара, или единственности инвариантной меры для некоторых действий групп преобразований) пока открыт. Такое доказательство очень помогло бы в анализе полезных обобщений этой теоремы.

---

*Ключевые слова*: мера Планшереля, граф Юнга, полиномиальные тождества, симметрические функции.

Работа поддержана грантом РНФ 17-71-20153.

## §1. Градуированные графы и меры на путях: общее

Под градуированным графом $G$ мы понимаем граф с множеством вершин $V$, разбитым на конечные подмножества-уровни $V_0, V_1, \dots$, и множеством ориентированных рёбер $E = E_0 \sqcup E_1 \sqcup E_2 \sqcup \dots$; в множестве $E_i$ рёбра идут из уровня $V_i$ в уровень $V_{i+1}$. Кратные рёбра, вообще говоря, допускаются. Зафиксируем номер уровня $m$ и выберем вершину $v$ на уровне $V_n$, где $n \geqslant m$. Рассмотрим равномерную меру на путях из $V_0$ в вершину $v$. Каждый такой путь имеет единственную вершину на уровне $V_m$, тем самым индуцируется мера $\nu_v^m$ на $V_m$. Поведение этих мер ("следов" путей в вершину $v$ на $m$-м уровне) играет важную роль в теории центральных мер на пространстве путей графа.

Введём необходимые определения.

Для вершины $v \in V$ определим её *размерность* $\dim(v)$ как количество путей из $V_0$ в $v$. Множество $\mathcal{P}(G)$ бесконечных путей в графе $G$, начинающихся в $V_0$, снабжено естественной (цилиндрической) топологией. Борелевская вероятностная мера на этом *пространстве путей* называется *центральной*, если для каждой вершины $v \in G$ вероятности прийти в неё по всем возможным путям из $V_0$ в $v$ равны между собой (и, следовательно, равны $1/\dim(v)$).

Предположим, что на множестве вершин $V$ заведена некоторая *функция иррегулярности* $\mathrm{irreg}(v) : V \mapsto (0,1]$. Её роль состоит в том, что меры $\nu_v^m$ имеют предел, когда $\mathrm{irreg}(v)$ стремится к 0. Для пути $P = (v_0, v_1, \dots) \in \mathcal{P}(G)$ определим функции $f_m(P) = \mathrm{irreg}(v_m)$.

Предположим, что при каждом фиксированном $m$ меры $\nu_v^m$ имеют предел, когда $\mathrm{irreg}(v) \to 0$. Обозначим предельную вероятностную меру на $V_m$ через $\lambda_m$.

Предположим, далее, что центральная мера $\mu$ на пространстве путей $\mathcal{P}(G)$ удовлетворяет следующему условию регулярности: нижний предел математических ожиданий функций $f_m$ равен 0. Иными словами, некоторая подпоследовательность функциональной последовательности $(f_m)$ стремится к 0 по мере (или в $L^1$, для функций со значениями в $[0,1]$ это равносильные требования).

**Предложение 1.** *В этих предположениях при каждом $m = 0, 1, \dots$ мера, индуцируемая мерой $\mu$ на уровне $V_m$, совпадает с $\lambda_m$.*

**Доказательство.** Фиксируем номер уровня $m$ и число $\varepsilon > 0$. Выберем $N > m$ так, что для $\mu$-случайного пути $P = (v_0, v_1, \dots)$ вероятность того, что $\mathrm{irreg}(v_N) > \varepsilon$, меньше $\varepsilon$. Пространство путей разбивается $N$-м уровнем на $|V_N|$ непересекающихся подмножеств. Суммарная мера тех из них, которые соответствуют вершинам с иррегулярностью больше $\varepsilon$, меньше $\varepsilon$. Соответствующий вклад этих множеств в след меры $\mu$ на уровне $V_m$ не превосходит $\varepsilon$. В силу центральности для каждого из остальных множеств условная мера, индуцируемая на $V_m$, имеет вид $\nu_v^m$, где $\operatorname{irreg}(v) < \varepsilon$. Все такие меры близки к $\lambda_m$, если $\varepsilon$ достаточно мало, а значит, и любая их выпуклая комбинация близка к $\lambda_m$. Отсюда следует, что след меры $\mu$ на уровне $V_m$ сколь угодно близок к $\lambda_m$, то есть совпадает с $\lambda_m$. □

Центральную меру, удовлетворяющую условиям предложения, по аналогии с графом Юнга (см. ниже) естественно называть *мерой Планшереля* на пространстве путей в графе $G$. Отметим, что чётким определением это не является: мы не говорим, каким требованиям "невырожденности" должна удовлетворять участвующая в таком определении функция иррегулярности.

Теоремы 2 и 3 (см. ниже) оправдывают такой подход к хорошо известным (см., например, [2, 4]) мерам Планшереля на графах Юнга и Шура соответственно.

## §2. Графы Юнга и Шура

Если $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$ – целые неотрицательные числа и $\sum \lambda_i = n$, будем называть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ *разбиением* целого неотрицательного числа $n = |\lambda|$. Если при этом равенство $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ влечет $\lambda_i = 0$, то есть все положительные части разбиения различны, будем называть разбиение *строгим.* Разбиению $\lambda$ соответствует *диаграмма Юнга* площади $n$ со строками длин $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, которую мы также обозначаем $\lambda$; строгой диаграммой будем называть диаграмму строгого разбиения.

Пусть $V_n$ – множество диаграмм Юнга площади $n$. Проведём ребро из $\lambda \in V_n$ в $\mu \in V_{n+1}$, если $\mu_i \geqslant \lambda_i$ при всех $i$ (это автоматически влечет, что $\mu_i = \lambda_i + 1$ для одного индекса $i$, а для других индексов $\lambda_i = \mu_i$; иными словами, диаграмма $\mu$ получается из диаграммы $\lambda$ добавлением одной клетки.) Таким образом задан градуированный *граф Юнга. Граф Шура* есть его подграф, индуцированный на множестве строгих диаграмм.

Определим иррегулярность $\operatorname{irreg}(\lambda)$ диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ как

$$\operatorname{irreg}(\lambda) = \frac{\lambda_1 + \max\{k : \lambda_k > 0\} - 1}{|\lambda|}.$$

Числитель есть количество клеток, принадлежащих первой строке и первому столбцу диаграммы $\lambda$.

Приведём известные формулы для количества путей между двумя вершинами в графах Юнга и Шура.

Пусть $\mu, \lambda$ – диаграммы Юнга. Обозначим через $\dim(\lambda : \mu)$ количество путей из $\mu$ в $\lambda$ в графе Юнга; $\dim(\lambda) = \dim(\lambda : \varnothing)$ есть количество путей в $\lambda$ из пустой диаграммы.

Следуя Д. Кнуту, мы обозначаем $x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$ для произвольного $x$ и натурального $n$. Пусть $\mu$ и $\lambda$ – диаграммы Юнга, имеющие не более $k$ строк каждая. Мы считаем, что в каждой из диаграмм $\lambda, \mu$ их ровно $k$, но, возможно, некоторые имеют нулевую длину. Пусть $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 - 1 \leqslant n_3 - 2 \leqslant \dots \leqslant n_k - (k-1)$ – длины строк диаграммы $\lambda$, а $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 - 1 \leqslant m_3 - 2 \leqslant \dots \leqslant m_k - (k-1)$ – длины строк диаграммы $\mu$. Обозначим

$$a_\mu(x_1, \dots, x_k) = \det(x_i^{m_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}; b_\mu(x_1, \dots, x_k) = \det(x_i^{\underline{m_j}})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}.$$

Как известно (см., например, [6, теорема 8.1] или [8]; доказательство в полиномиальном духе, в котором выдержана и настоящая работа, см. в [12]),

$$\dim(\lambda : \mu) = \frac{(|\lambda| - |\mu|)!}{\prod n_i!} b_\mu(n_1, \dots, n_k). \tag{1}$$

Приведём аналогичные формулы для строгих диаграмм. Размерность строгой диаграммы с длинами строк $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \geqslant 0$, $\sum \lambda_i = n$, равна

$$\dim(\lambda) = \prod_{i<j} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} \cdot \frac{n!}{\prod \lambda_i!}$$

(мы используем обозначение $\dim(\lambda)$, не указывая явно, какой граф имеется в виду, – каждый раз это ясно из контекста).

Теперь рассмотрим две вершины $\lambda, \mu$ графа Шура, для которых $\lambda_i \geqslant \mu_i$ при всех $i$ (то есть хотя бы один путь из $\mu$ в $\lambda$ существует). Обозначим через $\ell = \ell(\mu)$ количество строк диаграммы $\mu$; таким образом, $\mu_\ell > 0$, $\mu_{\ell+1} = 0$.

Для многочлена $F(x_1, \dots, x_k)$ обозначим

$$\operatorname{Sym} F(x_1, \dots, x_k) = \sum_\pi F(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_k}),$$

где суммирование происходит по всем $k!$ перестановкам чисел $1, \dots, k$.

Для перечисления путей в графе Шура введём следующие многочлены (Иванов [5] называет их многочленами Окунькова) от $k \geqslant \ell$ переменных:

$$\psi_\mu(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{(k-\ell)!} \operatorname{Sym} \left( \prod_{i \leqslant \ell} x_i{}^{\underline{\mu_i}} \prod_{i \leqslant \ell, i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right).$$

Это в самом деле многочлен, поскольку множитель $x_i - x_j$ в знаменателе сокращается – это видно из естественного разбиения слагаемых на пары. Многочлен $\psi_\mu$ является симметрической функцией, то есть он симметричен и $\psi_\mu(x_1, \dots, x_k, 0) = \psi_\mu(x_1, \dots, x_k)$, что непосредственно видно из определения.

Количество путей из $\mu$ в $\lambda$ равно

$$\frac{(n-m)!}{n!} \cdot \dim(\lambda) \cdot \psi_\nu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, ). \tag{2}$$

## §3. Формулы

Для одночлена $Y$ и многочлена (или многочлена Лорана) $F$ будем обозначать $[Y]F$ коэффициент при $Y$ в многочлене $F$. Нам понадобится следующее общее утверждение о многочленах. Пусть $n \geqslant k \geqslant 0$ – целые числа и $F(x_1, \dots, x_n)$ – многочлен степени $k + n(n-1)/2$. Через $V = V(x_1, \dots, x_n)$ будем обозначать определитель Вандермонда $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. Тогда

$$[x_1 \dots x_k] \operatorname{Sym} \frac{F}{V} = [1] F \left( \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right) (x_1 + \dots + x_n)^k V. \tag{3}$$

**Доказательство.** Достаточно проверить равенство (3) в случае, когда $F = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ – одночлен. Обе части антисимметричны относительно $m_1, \dots, m_n$, поэтому можно считать, что $m_1 > m_2 > \dots > m_n$ (если среди $m_i$ есть равные, то из-за антисимметричности обе части равны 0). Обозначим теперь $m_i = (n-i) + \mu_i$, $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_n \geqslant 0$, $\sum \mu_i = k$. Тогда $F/V = s_\mu(x_1, \dots, x_n)$ – функция Шура, и обе части равенства (3) равны $\dim \mu$ (см. [6, 12]). □

Мне известно доказательство формулы (3), не использующее теорию симметрических функций, но оно довольно длинное.

Полезный метод вычисления коэффициентов многочленов даётся явной формой комбинаторной теоремы о нулях Н. Алона [7] (эта формула независимо переоткрывалась в [9–11], но по существу содержится уже в [1]).

**Теорема 1** (комбинаторная теорема о нулях). *Предположим, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – многочлен с коэффициентами в поле $F$ степени не более $d_1 + d_2 + \dots + d_n$, где $d_i$ – неотрицательные числа; коэффициент при одночлене $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ обозначим через $C$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – произвольные подмножества в $F$, такие, что $|A_i| = d_i + 1$ для всех $i$. Тогда*

$$C = \sum_{\alpha_i \in A_i} \frac{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{a \in A_i \setminus \alpha_i} (\alpha_i - a)}. \tag{4}$$

С помощью формулы (3) и теоремы 1 можно вычислить коэффициент при $x_1 \dots x_m$ в многочлене Окунькова $\psi_\mu$ для строгой диаграммы $\mu$ с $\ell$ строками длин $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_\ell > 0$, $m = |\mu| = \sum \mu_i$:

$$[x_1 x_2 \dots x_m] \psi_\mu(x_1, x_2, \dots) = 2^{m-\ell} \dim \mu. \tag{5}$$

**Доказательство.** Зафиксируем $n > m$. Имеем

$$\psi_\mu(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{Sym} F(x_1, \dots, x_n) / V(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$F(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(n-\ell)!} \prod_{i \leqslant \ell} x_i^{\underline{\mu_i}} \prod_{i \leqslant \ell, i<j} (x_i + x_j) \prod_{\ell < i < j} (x_i - x_j),$$

что позволяет применить формулу (3), предварительно заменив падающие степени $x_i^{\underline{\mu_i}}$ на обычные степени $x_i^{\mu_i}$ (на коэффициенты при одночленах старшей степени $m$ это не влияет). Отсюда, преобразуя правую часть равенства (3) при данном $F$, получаем, что искомый коэффициент равен

$$\frac{1}{(n-\ell)!} \left[ x_1^{n-1+\mu_1} \dots x_\ell^{n-1+\mu_\ell} x_{\ell+1}^{n-1} \dots x_n^{n-1} \right] \\ (x_1 + \dots + x_n)^m \prod_{i \leqslant \ell, i<j} (x_i + x_j) \prod_{\ell < i < j} (x_j - x_i) \prod_{i<j} (x_i - x_j). \tag{6}$$

Для применения теоремы 1 полезно поменять многочлен, не изменяя его старших коэффициентов. Именно, выражение $(x_1 + \dots + x_n)^m$ мы заменим на произведение $m$ скобок вида $x_1 + \dots + x_n - \mathrm{const}$, которые выберем позже, руководствуясь целью сделать большинство значений многочлена на произведении $A_1 \times \cdots \times A_n$ (эти множества также ещё предстоит выбрать) равными 0. Положим $A_i = [-\mu_i, n-1]$, где под отрезком $[a, b]$ понимается множество его целых точек (считаем, что $\mu_i = 0$ при $i > \ell$). Предположим, что попарно различные числа $a_i \in A_i$ таковы, что произведение $\prod\limits_{i \leqslant \ell, i<j} (x_i + x_j)$ не равно 0. Это значит, что если $-\theta_1, \ldots, -\theta_r$ – те из чисел $a_i$, которые отрицательны, то чисел $\theta_1, \ldots, \theta_r$ среди них нет, так что

$$a_1 + \cdots + a_n = n(n-1)/2 - 2\sum \theta_i \in n(n-1)/2 - [0, 2, 4, \ldots, 2m].$$

Это подсказывает заменить произведение $(x_1 + \cdots + x_n)^m$ на

$$\prod_{i=0}^{m-1} \bigl(x_1 + \cdots + x_n - n(n-1)/2 + 2i\bigr).$$

Теперь ненулевое значение многочлена достигается только если $a_i = -\mu_i$ при $i = 1, 2, \ldots, \ell$, а числа $a_{\ell+1}, \ldots, a_n$ – это некоторая перестановка множества $[0, 1, \ldots, n-1] \setminus \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell\}$. Все $(n-\ell)!$ ненулевых слагаемых в правой части формулы (4) оказываются равными. Непосредственное, но громоздкое вычисление соответствующих произведений, приводящее к (5), мы опускаем. □

## §4. Сравнение симметрических многочленов

**Лемма 1.** *Пусть $D$ – натуральное число, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неотрицательные числа, каждое из которых не превосходит $D^{-1} \sum x_i$. Обозначим через $\sigma_k$ сумму произведений этих чисел по $k$ – элементарный симметрический многочлен. Тогда*

$$\sigma_k \geqslant \binom{D}{k} D^{-k} \left(\sum x_i\right)^k. \tag{7}$$

**Доказательство.** Можно считать, что $n \geqslant D$ (иначе предположение леммы может выполняться только при $x_1 = \cdots = x_n = 0$).

Зафиксируем сумму $\sum x_i = S$ и все числа $x_i$ кроме двух – скажем, кроме $x_p$ и $x_q$. Заметим, что $\sigma_k$ имеет вид $x_p x_q C_1 + (x_p + x_q) C_2$ с постоянными неотрицательными $C_1, C_2$. Таким образом, раздвигая $x_p, x_q$ с сохранением их суммы, мы сохраняем правую часть неравенства (7) и не увеличиваем левую. Будем так делать, пока одна из переменных

$x_p, x_q$ не станет равна 0 или $S/D$. Конечное число таких операций приводит к ситуации, в которой $D$ переменных равны $S/D$, а остальные равны 0. В этом случае в (7) имеет место равенство. Но раз левая часть в процессе не увеличивалась, она всегда была не меньше правой. $\square$

Заметим, что

$$\binom{D}{k} D^{-k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{D}\right)\left(1-\frac{2}{D}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{D}\right) \geqslant \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{2D}\right) \quad (8)$$

(мы воспользовались известным неравенством $\prod(1-y_i) \geqslant 1-\sum y_i$ для чисел $y_i = i/D \in [0,1]$). Обозначим $T = (\sum x_i)^k - k! x_1 \dots x_k$. Это симметрический многочлен, содержащий все одночлены симметрического многочлена $(\sum x_i)^k$ кроме произведений $k$ различных переменных. Из (7) и (8) получаем

$$\sigma_k \geqslant \left(1 - \frac{k(k-1)}{2D}\right)\left(\sigma_k + \frac{1}{k!}T\right),$$

то есть

$$T \leqslant \frac{k(k-1)}{2D - k(k-1)} k! \sigma_k \quad (9)$$

при $D > k(k-1)/2$. Смысл неравенства (9) в том, что коэффициент в правой части стремится к 0 с ростом $D$. Иными словами, величина $\sigma_k$ намного больше любой другой симметризации одночлена степени $k$.

## §5. Граф Юнга

**Теорема 2.** *Зафиксируем диаграмму $\mu$ площади $m$ и число $\varepsilon > 0$. Величина* $\dim(\lambda : \mu)$ *принадлежит интервалу* $\frac{\dim(\lambda)\dim(\mu)}{m!}(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ *в предположении, что число* $\operatorname{irreg}(\lambda)$ *достаточно мало.*

*Иными словами, мера, индуцируемая путями в $\lambda$ на уровне $m$, стремится при* $\operatorname{irreg}(\lambda) \to 0$ *к мере, сопоставляющей каждой диаграмме $\mu$ площади $m$ число* $(\dim \mu)^2/m!$, *– мере Планшереля на множестве диаграмм Юнга данной площади $m$.*

**Доказательство.** Обозначим $n = |\lambda|$, и пусть $k_0$ – количество строк диаграммы Юнга $\lambda$. Пусть $2 \operatorname{irreg}(\lambda) < 1/D$, где $D$ – большое натуральное число. Имеем $2D \leqslant k_0 \leqslant \frac{n}{2D}$ (первое неравенство следует из того, что длины строк диаграммы $\lambda$ не превосходят $\frac{n}{2D}$). Пусть $k \geqslant k_0$ и длины $k$ строк диаграммы $\lambda$ равны

$$0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 - 1 \leqslant n_3 - 2 \leqslant \dots \leqslant n_k - (k-1)$$

(мы считаем, что $k-k_0$ строк диаграммы $\lambda$ имеют длину 0). Пусть $D$ настолько велико, что диаграмма $\mu$ имеет не более $2D \leqslant k$ строк. Тогда, полагая при необходимости, что несколько строк диаграммы $\mu$ имеют длину 0, будем считать, что их ровно $k$, а их длины обозначим $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 - 1 \leqslant \dots \leqslant m_k - (k-1)$, $\sum m_i = m + \binom{k}{2}$.

Для пустой диаграммы Юнга $\mu = \varnothing$ слева в формуле (1) стоит $\dim(\lambda)$. Таким образом, частное $\dim(\lambda : \mu)/\dim(\lambda)$ есть число $\frac{(n-m)!}{n!}$, умноженное на частное определителей $b_\mu(n_1,\dots,n_k)/b_\varnothing(n_1,\dots,n_k)$. Знаменатель $b_\varnothing(n_1,\dots,n_k)$ есть определитель Вандермонда для чисел $n_1,\dots,n_k$.

Раскладывая каждый из многочленов $x^{\underline{m_j}}$ по одночленам и пользуясь линейностью определителя по строкам, представим определитель $b_\mu(n_1,\dots,n_k)$ как линейную комбинацию альтернантов $a_\pi(n_1,\dots,n_k)$, где $\pi$ – диаграмма Юнга, построчечно мажорируемая диаграммой $\mu$. Коэффициент при альтернанте $a_\pi$ есть некоторый многочлен от $k$ (поскольку многочленами от $k$ являются коэффициенты многочлена $x^{\underline{k+C}}$ при $x^{k+C_1}$ для постоянных $C, C_1$). Заметим, что $a_\pi/b_\varnothing = a_\pi/a_\varnothing$ – симметрическая функция Шура $s_\pi$. Пусть теперь $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \dots \geqslant \rho_k \geqslant 0$ – длины строк диаграммы $\lambda$; допускается несколько нулевых строк. Тогда $n_k = \rho_1 + (k-1)$, $n_{k-1} = \rho_2 + (k-2)$, $\dots$, $n_1 = \rho_k + (k-k)$. Коэффициент многочлена $s_\pi(x_1,\dots,x_k)$ при данном одночлене, как известно, не зависит от $k$. Разложим функцию

$$s_\pi(n_1,\dots,n_k) = s_\pi(\rho_1+k-1, \rho_2+k-2, \dots, \rho_k+k-k)$$

по одночленам от $\rho_1,\dots,\rho_k$. Коэффициент при одночлене $\prod\limits_i \rho_{\ell_i}^{\alpha_i}$, $\sum \alpha_i \leqslant |\pi|$, имеет вид $F(k-\ell_1, k-\ell_2, \dots)$, где $F$ – некоторый многочлен степени не выше $|\pi| - \sum \alpha_i$ (зависящий только от $\pi$ и набора показателей $\{\alpha_i\}$, но не от $k$). После суммирования по разным диаграммам $\pi$ (их список зависит только от $\mu$) коэффициент при том же одночлене станет многочленом от $k, k-\ell_1, k-\ell_2, \dots$, имеющем вид суммы слагаемых

$$\sum P(k)F(k-\ell_1, k-\ell_2, \dots), \quad \deg F \leqslant m - \sum \alpha_i. \tag{10}$$

Заметим, что поскольку ответ не должен меняться при увеличении $k$ на 1 (и добавлении $\rho_{k+1} = 0$), на самом деле это многочлен от $\ell_1, \ell_2, \dots$, причём степени не выше $m - \sum \alpha_i$ (последнее получается подстановкой любого фиксированного значения $k$ в (10)). Сумма соответствующих слагаемых при фиксированных показателях $\{\alpha_i\}$ и переменных номерах $\{\ell_i\}$ оценивается как $(\sum \rho_i)^{\sum \alpha_i} k^{m-\sum \alpha_i} = o(n^m)$, если только $m$ не равно $\sum \alpha_i$. Далее, в силу леммы 1 при $m = \sum \alpha_i$ сумма одночленов есть $o(n^m)$ при большом $D$, за исключением случая $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 1$. Коэффициент при таком одночлене – такой же, как и в функции Шура $s_\mu(\rho_1, \rho_2, \dots)$, и равен, как известно, $\dim(\mu)$. А основной симметрический многочлен $\sigma_m(\rho_1, \dots, \rho_m)$ ведет себя как $\frac{1}{m!}(\sum \rho_i)^m = n^m/m!$, опять же в силу леммы 1. Итого, $\dim(\lambda : \mu)/\dim(\lambda) = \dim(\mu)/\mu! + o(1)$, что и требовалось. $\square$

Этот подход к мере Планшереля на пространстве путей графа Юнга был предложен А. М. Вершиком; он же предложил взять существование предельных мер (при некоторых дополнительных предположениях вроде регулярности) за основу общего подхода к определению "меры Планшереля" на градуированных графах. В следующем разделе мы показываем, что этот подход успешно работает на ближайшем родственнике графа Юнга – графе Шура (соответствующем проективным представлениям симметрической группы в том же смысле, в котором граф Юнга соответствует линейным представлениям).

## §6. Граф Шура

**Теорема 3.** *Зафиксируем строгую диаграмму $\mu$ площади $m$ с $\ell$ строками и число $\varepsilon > 0$. Величина $\dim(\lambda : \mu)$ принадлежит интервалу $\frac{\dim(\lambda) 2^\ell \dim(\mu)}{|\mu|!}(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ в предположении, что число $\mathrm{irreg}(\lambda)$ достаточно мало.*

*Иными словами, мера, индуцируемая путями в $\lambda$ на уровне $m$, стремится при $\mathrm{irreg}(\lambda) \to 0$ к мере, сопоставляющей каждой диаграмме $\mu$ площади $m$ число $2^{m-\ell(\mu)}(\dim \mu)^2/m!$, – мере Планшереля на множестве строгих диаграмм Юнга данной площади $m$.*

**Доказательство.** Обозначим через $n = |\lambda|$ и $k = \ell(\lambda)$ площадь и число строк диаграммы $\lambda$ соответственно. Если $\mathrm{irreg}(\lambda)$ достаточно мало, то $\lambda_i \geqslant \mu_i$ при всех $i$, так что пути из $\mu$ в $\lambda$ существуют и могут быть перечислены формулой (2). Таким образом, нас интересует предел функции $n^{-m}\psi_\mu(n_1, n_2, \dots, n_k)$ В силу (5) симметрическая функция $\psi_\mu(x_1, \dots)$ имеет вид $2^{m-\ell}\sigma_m + \dots$, где многоточие соответствует симметризациям одночленов степени $m$, не линейных по одной из переменных, а также одночленов степени меньше $m$. В силу леммы 1 такие одночлены (при подстановке $x_i = n_i$) при стремлении $n_1/n$ к нулю намного меньше первого слагаемого, которое, в свою очередь, удовлетворяет соотношению $\sigma_m(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{1}{m!}n^m + o(n^k)$. Отсюда следует требуемое. $\square$

Я глубоко признателен Анатолию Моисеевичу Вершику за многочисленные полезные обсуждения и инициирование этой работы.

## Список литературы

1. K. G. Jacobi, *Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum.* — J. Reine Angew. Math. **14** (1835), 281–288.
2. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга.* — ДАН СССР **233** (1977), вып. 6, 1024–1027.
3. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы.* — Функц. анал. и прил., **15** (1981), вып. 4, 15–27.
4. А. М. Бородин, *Мультипликативные центральные меры на графе Шура.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **240** (1997), 44–52.
5. В. Н. Иванов, *Размерность косых сдвинутых диаграмм Юнга и проективные характеры бесконечной симметрической группы.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **240** (1997), 115–135.
6. А. Ю. Окуньков, Г. И. Ольшанский, *Сдвинутые функции Шура.* — Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 2, 73–146.
7. N. Alon, *Combinatorial Nullstellensatz.* — Combin. Probab. Comput. **8** (1999), 7–29.
8. G. Olshanski, A. Regev, A. Vershik, *Frobenius–Schur functions, with appendix by V. Ivanov.* — In: Studies in Memory of Issai Schur, Progress in Math., Vol. 210 (2003), pp. 251–299.
9. U. Schauz, *Algebraically solvable problems: describing polynomials as equivalent to explicit solutions.* — Electron. J. Combin. **15** (2008), #R10.
10. M. Lasoń, *A generalization of combinatorial Nullstellensatz.* — Electron. J. Combin. **17** (2010), #N32.
11. R. N. Karasev, F. V. Petrov, *Partitions of nonzero elements of a finite field into pairs.* — Israel J. Math. **192** (2012), 143–156.
12. F. Petrov, *Polynomial approach to explicit formulae for generalized binomial coefficients.* — European J. Math. **2** (2016), No. 2, 444–458.

Petrov F. V. The asymptotics of traces of paths in the Young and Schur graphs.

Let $G$ be a graded graph with levels $V_0, V_1, \dots$. Fix $m$ and choose a vertex $v$ in $V_n$, where $n \geqslant m$. Consider the uniform measure on the paths from $V_0$ to the vertex $v$. Each such path has a unique vertex at the level $V_m$, and so a measure $\nu_v^m$ on $V_m$ is induced. It is natural to expect that such measures have a limit as the vertex $v$ goes to infinity in some "regular" way. We prove this (and compute the limit) for the Young and Schur graphs, for which regularity is understood as follows: the proportion of boxes contained in the first row and the first column goes to 0. For the Young graph, this was essentially proved by Vershik and Kerov in 1981; our proof is more straightforward and elementary.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный
университет,
С.-Петербург, Россия
*E-mail*: fedyapetrov@gmail.com

Поступило 23 сентября 2018 г.