Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

**П. Е. Нарышкин**

# ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ И МЕРЫ ПЛАНШЕРЕЛЯ

## §1. Введение

Алгоритм RSK – хорошо известное в комбинаторике отображение, сопоставляющее перестановке длины $n$ пару таблиц Юнга размера $n$ с одинаковой диаграммой. А. М. Вершик и С. В. Керов в [1] распространили его определение на пространства $\mathcal{A}^n$, где $\mathcal{A}$ – произвольное линейно упорядоченное множество. При этом в записывающей таблице ($P$) стоят элементы множества $\mathcal{A}$, а в нумерующей таблице ($Q$) – числа от 1 до $n$. Таким образом, мы рассматриваем отображение $\mathrm{RSK} : \mathcal{A}^n \to \mathbb{YT}_n(\mathcal{A}) \times \mathbb{YT}_n$, где $\mathbb{YT}_n$ – множество стандартных таблиц Юнга размера $n$, а $\mathbb{YT}_n(\mathcal{A})$ – множество таблиц Юнга размера $n$, заполненных элементами из $\mathcal{A}$. Давайте на время "забудем" про первую координату результата действия и будем рассматривать его как отображение из $\mathcal{A}^n$ в $\mathbb{YT}_n$. Тогда, как заметили Вершик и Керов, можно перейти к пределу и рассмотреть отображение $\mathrm{RSK} : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{YT}_\infty$. Здесь $\mathbb{YT}_\infty$ – множество бесконечных таблиц Юнга.

Вершик и Керов доказали в [1], что для любой центральной эргодической меры $\mu$ на $\mathbb{YT}_\infty$ найдется алфавит $\mathcal{A}$ и мера $m$ на нем, такие, что $\mathrm{RSK} : (\mathcal{A}, m)^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{YT}_\infty, \mu)$ – гомоморфизм пространств с мерой. В частности, если $\mu$ – мера Планшереля, то в качестве $\mathcal{A}$ берется отрезок $[0, 1]$, а в качестве $m$ – одномерная мера Лебега $\mathrm{Leb}_1$ на нем. Д. Ромик и П. Сняды в недавней работе [2] доказали, что в последнем случае $\mathrm{RSK} : ([0, 1]^{\mathbb{N}}, \mathrm{Leb}_\infty) \to (\mathbb{YT}_\infty, \mathrm{Planch})$ – изоморфизм пространств с мерой, где $\mathrm{Leb}_\infty = \otimes_{i=1}^{\mathbb{N}} \mathrm{Leb}_1([0, 1])$, а Planch – мера Планшереля. Позже Сняды обобщил этот результат в [3], доказав, что некоторый класс построенных Вершиком и Керовым гомоморфизмов – это изоморфизмы.

В данной работе мы обсудим несколько следствий из результата Ромика и Сняды, сообщенных А. М. Вершиком. Мы будем рассматривать

*Ключевые слова*: таблица Юнга, алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута, мера Планшереля, измеримые разбиения, эквивалентность по Кнуту.

Статья написана при частичной поддержке Российского научного фонда (грант 17-71-20153).

только случай, в котором алфавит $\mathcal{A}$ – это отрезок $[0,1]$, мера на нем – это мера Лебега $\mathrm{Leb}_1$, а центральная мера на $\mathbb{YT}_\infty$ – мера Паншереля.

## §2. Теорема об изоморфизме

Приведем здесь результат, доказанный Ромиком и Сняды [2, теорема 1.4], в удобной для нас формулировке.

**Теорема 1.** *Определённый в работе* [1] *гомоморфизм пространства* $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathrm{Leb}_\infty)$ *на пространство бесконечных таблиц Юнга, снабженное мерой Паншереля, является изоморфизмом пространств с мерой, переводящим левый сдвиг в преобразование Шютценберже. Это означает, что почти всякая реализация схемы Бернулли отвечает одной бесконечной нумерующей таблице.*

Далее мы обсудим несколько следствий из этой теоремы, записанных в других терминах.

## §3. Разбиения на множества

**3.1. Общая схема.** В этом разделе мы обсудим следующую общую задачу. Рассмотрим бесконечномерный куб $[0,1]^{\mathbb{N}}$ с мерой $\mathrm{Leb}_\infty$. Пусть для каждого $n$ задано разбиение (с точностью до множества меры 0) $\tilde{\xi}_n$ куба $[0,1]^n$ на конечный набор измеримых множеств. Предположим также, что эта последовательность разбиений

(1) возрастает, т. е. проекция каждого множества из $\tilde{\xi}_n$ на первые $n-1$ координат целиком содержится в каком-то множестве из $\tilde{\xi}_{n-1}$,

(2) стационарна, т. е. проекция каждого множества из $\tilde{\xi}_n$ на последние $n-1$ координат целиком содержится в каком-то множестве из $\tilde{\xi}_{n-1}$.

Зафиксируем $n$ и для каждого множества $a \in \tilde{\xi}_n$ рассмотрим множество $a \times [0,1]^{\mathbb{N}}$. Набор всех таких множеств является разбиением пространства $[0,1]^n \times [0,1]^{\mathbb{N}} = [0,1]^{\mathbb{N}}$, которое мы обозначим через $\xi_n$. При этом свойство возрастания означает, что элементы разбиения $\xi_n$ состоят из дизъюнктных объединений элементов разбиения $\xi_{n+1}$, а свойство стационарности означает, что операция левого сдвига переводит разбиение $\xi_n$ в разбиение, подчиненное разбиению $\xi_{n-1}$.

**Определение 1.** Мы говорим, что такая последовательность разбиений сходится к разбиению на точки, и пишем $\xi_n \to \epsilon$, если почти любую точку $x$ куба $[0,1]^{\mathbb{N}}$ можно однозначно восстановить по последовательности множеств $a_n \in \xi_n$, содержащих $x$.

Рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Обозначим через $\mathcal{X}_n$ разбиение отрезка $[0,1]$ на $2^n$ отрезков вида $[m/2^n,(m+1)/2^n]$, $m \in \mathbb{Z}$. Положим $\tilde{\xi}_n = \otimes_{k=1}^n \mathcal{X}_n$. Тогда $\xi_n \to \epsilon$.

**Доказательство.** Действительно, пусть $x = (x_1, x_2, \ldots) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, и зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $n > k$ элемент разбиения $\xi_n$, содержащий $x$, определяет координату $x_k$ с точностью до $1/2^n$. Таким образом, в пределе все координаты точки $x$ однозначно восстанавливаются. $\square$

**Замечание 1.** Несложно видеть, что в этом примере количество элементов разбиения $\tilde{\xi}_n$ равно $2^{n^2}$.

**Пример 2.** Рассмотрим теперь разбиение $\tilde{\xi}_n$ куба на симплексы вида $\{y \in [0,1]^n \mid y_{\sigma(1)} \leqslant y_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant y_{\sigma(n)}\}$, индексированные перестановками $\sigma \in S_n$. Тогда $\xi_n \to \epsilon$.

**Доказательство.** Рассмотрим опять точку $x = (x_1, x_2, \ldots) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ и зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что множество из $\xi_n$, содержащее $x$, однозначно определяет порядок элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Следовательно, для $n > k$ известна величина $|\{l \leqslant n \mid x_l < x_k\}|$ – количество чисел, меньших $x_k$, среди $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По закону больших чисел для почти всех $x$

$$x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{l \leqslant n \mid x_l < x_k\}|}{n},$$

что означает, что в пределе все координаты восстанавливаются почти наверняка. $\square$

**Замечание 2.** В этом случае количество элементов разбиения $\tilde{\xi}_n$ равно $n!$.

**3.2. Следствие из теоремы об изоморфизме.** В этих терминах мы можем сформулировать первое следствие из теоремы об изоморфизме. Здесь RSK – отображение из $[0,1]^n$ в $\mathbb{YT}_n$.

**Следствие 1.** *Рассмотрим разбиение $\tilde{\xi}_n$ куба $[0,1]^n$ на множества вида $\mathrm{RSK}^{-1}(\tau)$, где $\tau$ – всевозможные таблицы Юнга размера $n$. Иными словами, два набора чисел $y_1, y_2 \in [0,1]^n$ лежат в одном множестве тогда и только тогда, когда их нумерующие таблицы совпадают. Тогда $\xi_n \to \epsilon$.*

**Доказательство.** Действительно, бесконечная таблица Юнга, получающаяся при применении RSK к последовательности $(x_1, x_2, \ldots)$, – это не что иное, как предел последовательности таблиц $Q_n$, полученных применением RSK к последовательностям $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Результат следует из теоремы 1. □

**Замечание 3.** Количество элементов в разбиении $\tilde{\xi}_n$ равно количеству различных таблиц Юнга размера $n$. Это число $(a_n)$ хорошо изучено: например, оно равно количеству инволюций в группе перестановок $S_n$. Асимптотически, при $n \to \infty$,

$$a_n \sim \sqrt{n!}e^{\sqrt{n}}(8\pi e n)^{-1/4}.$$

Эта формула была получена в [5, стр. 583].

Следующий вопрос поставлен А. М. Вершиком.

**Проблема.** *Каким может быть минимально возможный рост числа элементов разбиения в стационарной последовательности, стремящейся к разбиению на отдельные точки?*

## §4. Эквивалентности по Кнуту

**4.1. Двойственные разбиения по Кнуту.** Рассмотрим сейчас алгоритм RSK в классическом смысле – как отображение из группы $S_n$ в $\mathbb{YT}_n \times \mathbb{YT}_n$. Хорошо известно, что определенные транспозиции соседних элементов перестановки, называемые преобразованиями Кнута, сохраняют P-таблицу перестановки (см., например, [4]). Также хорошо известно, что если $\mathrm{RSK}(\sigma) = (P, Q)$, то $\mathrm{RSK}(\sigma^{-1}) = (Q, P)$. Таким образом, естественно определить двойственные преобразования Кнута – образы преобразований Кнута при операции $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$. Можно также дать явное описание двойственных преобразований, аналогичное определению преобразований Кнута. Из определения очевидно, что такие преобразования сохраняют $Q$-таблицу.

Совокупность всех перестановок, которые могут быть получены друг из друга преобразованиями Кнута, называется классом Кнута и отвечает одной $P$-таблице. Аналогично определяется двойственный класс Кнута, отвечающий одной $Q$-таблице.

Пусть теперь RSK действует из $[0,1]^n$ в $\mathbb{YT}_n([0,1]) \times \mathbb{YT}_n$. Определение преобразований Кнута обобщается на этот случай очевидным образом, и все перестановки, которые могут быть получены из одной, образуют класс Кнута – множество всех точек из $[0,1]^n$ с одинаковой $P$-таблицей. Поскольку групповая структура, согласованная с RSK, на $[0,1]^n$ отсутствует, не имеется удовлетворительного определения двойственных преобразований Кнута. Тем не менее мы можем определить двойственный класс Кнута как множество всех точек куба с одинаковой $Q$-таблицей. На множестве двойственных классов Кнута естественным образом задается мера Планшереля (совпадающая с мерой Лебега этих множеств в кубе $[0,1]^n$).

**Следствие 2.** *Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n > N$ выполняется следующее: существует множество двойственных классов Кнута, имеющее меру Планшереля не меньше $1 - \epsilon$, дисперсия $k$-го элемента в которых меньше $\varepsilon$.*

**Доказательство.** Это напрямую следует из явного описания обратного к RSK отображения, полученного Ромиком и Сняды ([2, теорема 1.5]). □

**Замечание 4.** Можно было бы предположить, что в двойственных классах Кнута $k$-й элемент стабилизируется при росте $n$, однако это не так: по всей видимости, асимптотически он принимает значения из интервала длины $1/2$.

**4.2. Прямые разбиения по Кнуту.** Вернемся к языку разбиений из п. 3.1. Пусть дано разбиение $\tilde{\eta}_n$ куба $[0,1]^n$, все множества в котором конечны. Для каждого множества $b \in \tilde{\eta}_n$ и каждой точки $y = (y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ рассмотрим множество $a \times \{y\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Тогда все такие множества образуют разбиение куба $[0,1]^{\mathbb{N}}$, которое мы обозначаем $\eta_n$. Заметим, что все множества в $\eta_n$ конечны. Предположим, что разбиение $\eta_n$ убывает, то есть что все множества в $\eta_{n+1}$ – это дизъюнктные объединения множеств из $\eta_n$.

**Определение 2.** Рассмотрим точку $x \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ и для каждого $n$ найдем множество $b_n(x) \in \eta_n$, ее содержащее. Предположим, что для почти всех $x$ не существует измеримого множества $B(x) \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$, такого, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n(x) \subset B(x) \quad \text{и} \quad 0 < \mathrm{Leb}_\infty(B(x)) < 1.$$

Тогда мы говорим, что разбиение $\eta_n$ стремится к тривиальному (или что разбиение эргодическое), и пишем $\eta_n \to \nu$.

**Теорема 2.** *Рассмотрим стационарные возрастающую и убывающую последовательности измеримых разбиений $\tilde{\xi}_n$ и $\tilde{\eta}_n$ и предположим также, что при каждом $n$ разбиения $\tilde{\xi}_n$ и $\tilde{\eta}_n$ являются независимыми взаимными дополнениями друг друга.*

(1) *Предположим, что $\xi_n \to \epsilon$. Тогда несложно видеть, что $\eta_n \to \nu$.*
(2) *Из того, что $\eta_n \to \nu$, не следует, вообще говоря, что $\xi_n \to \epsilon$. Первый контрпример был дан в* [7], *см. также* [6, стр. 18].

Приведем несколько примеров.

**Пример 3.** Рассмотрим разбиение $\tilde{\xi}_n$ из примера 1. Положим

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \sim_n y = (y_1, y_2, \ldots),$$

если

$$\begin{cases} 2^n(x_k - y_k) \in \mathbb{Z}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ x_k = y_k, & k > n. \end{cases}$$

Тогда независимое дополнение $\tilde{\eta}_n$ к разбиению $\tilde{\xi}_n$ будет состоять в точности из классов эквивалентности по отношению $\sim_n$.

**Пример 4.** Возьмем разбиение $\tilde{\xi}_n$ из примера 2. Тогда независимое дополнение $\tilde{\eta}_n$ к нему будет состоять из орбит действия группы $S_n$ на $[0,1]^n$. Из теоремы 2 тогда следует, что действие бесконечной симметрической группы $S_\infty$ на $[0,1]^{\mathbb{N}}$ является эргодическим.

Применив теорему 2 к следствию 1 и использовав описание множеств разбиения из п. 4.1, получим следующее утверждение.

**Следствие 3.** *В схеме Бернулли $([0,1], \mathrm{Leb}_1)^{\mathbb{N}}$ преобразования Кнута действуют эргодично на $k$-м элементе последовательности для любого $k$. Это означает следующее: выберем случайным образом бесконечную последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Пусть $x^n$ – конечные последовательности, состоящие из первых $n$ элементов последовательности $x$. Пусть также $\gamma_n$ – эмпирическое распределение $k$-го элемента в классе Кнута последовательности $x^n$. Тогда $\gamma_n$ стремится к равномерному распределению на $[0,1]$ почти наверняка.*

## §5. Заключение

Хотя следствия 2 и 3 имеют чисто комбинаторный характер, их прямое комбинаторное доказательство пока неизвестно. Численные эксперименты, проводившиеся автором и другими, показывают, что сходимости соответственно к дельта-образному и равномерному распределениям очень медленные. Было бы важно найти доказательство этих следствий, не привлекающее сложных построений, связанных с предельной формой, сдвигом Шютценберже, теоремой Ромика и Сняды и др. Некоторые соображения на эту тему, часть из которых приведена выше, содержатся в готовящейся работе А. М. Вершика, которому автор выражает благодарность за информацию и руководство.

## Список литературы

1. S. V. Kerov, A. M. Vershik, *The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson–Schensted–Knuth algorithm.* – SIAM J. Algebr. Discrete Methods **7** (1986), No. 1, 116–124.
2. D. Romik, P. Śniady, *Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles.* — Ann. Probab. **43** (2015), No. 2, 682–737.
3. P. Śniady, *Robinson–Schensted–Knuth algorithm, jeu de taquin and Kerov–Vershik measures on infinite tableaux.* — SIAM J. Discrete Math. **28** (2014), No. 2, 598–630.
4. С. В. Фомин, *Приложение* 1 к книге Р. Стенли “Перечислительная комбинаторика”, т. 2. Мир, Москва, 2009.
5. P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics.* Cambridge Univ. Press, Cambridgeб 2009.
6. А. Вершик, *Теория фильтраций подалгебр, стандартность и независимость.* — Успехи мат. наук **72** (2017), вып. 2(434), 67–146.
7. А. Вершик, *Убывающие последовательности измеримых разбиений и их приложения.* — ДАН СССР **193** (1970), вып. 4, 748–751.

Naryshkin P. E. A remark on the isomorphism between the Bernoulli scheme and the Plancherel measure.

We formulate a theorem of Romik and Śniady which establishes an isomorphism between the Bernoulli scheme and the Plancherel measure. Then we derive from it several combinatorial results. The first one is related to measurable partitions; the other two are related to the Knuth equivalence. We also give several examples and one conjecture belonging to A. M. Vershik.

С. Петербургский государственный университет
С.-Петербург, Россия
*E-mail*: `p.e.naryshkin@gmail.com`

Поступило 22 сентября 2018 г.