Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

А. М. Вершик, А. В. Малютин

АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

§1. Введение

В работах [2–6, 44, 45] развивается теория абсолюта графов, групп и полугрупп. Абсолют есть вероятностно-топологическая граница группы (полугруппы, графа), порожденная случайными блужданиями на группе: абсолют группы с фиксированной системой образующих можно определить как множество эргодических марковских мер (т.е. блужданий на группе), у которых система *копереходных вероятностей* такая же, как у простого (правого) случайного блуждания, порожденного равномерным распределением на образующих (подробности можно найти в вышеуказанных работах). К настоящему моменту описание абсолюта получено для свободной группы и некоторых других гиперболических групп, для абелевых групп и полугрупп. Так называемая *лапласова*, или *невырожденная*, часть абсолюта описана для произвольных нильпотентных групп. В готовящейся работе мы впервые полностью описываем абсолют для некоммутативной нильпотентной группы – дискретной группы Гейзенберга. Настоящая заметка содержит элемент, необходимый для этого описания, и здесь во введении мы кратко прокомментируем, как этот элемент встроен в общий контекст задачи.

В теории абсолюта (как и при изучениии случайных блужданий на графах и группах, в гармоническом анализе, теории потенциала и смежных областях) заметную роль играют функции числа путей заданной длины между вершинами графа (графа Кэли группы) и различного рода соотношения на эти величины. В частности, точки абсолюта, точки границ Мартина, гармонические функции, собственные функции лапласиана представляются как пределы функций числа путей, а часть интересующих нас утверждений, касающихся абсолюта,

Ключевые слова: дискретная группа Гейзенберга, гауссовы биномиальные коэффициенты, ограниченные разбиения, диаграммы Юнга, мультипликативный характер, абсолют, граница-выход.

Работа поддержана грантом РНФ 17-71-20153.

допускают переформулировку в терминах этих функций. В случаях графов с простыми или хорошо изученными функциями числа путей это обстоятельство используется в качестве ключа к доказательствам утверждений о блужданиях, границах и т.п. В графе Кэли дискретной группы Гейзенберга со стандартной системой образующих число геодезических путей между парами точек определенного положения задается числом *ограниченных разбиений* с ограничением на размер и количество частей или, что то же самое, числом *диаграмм Юнга* фиксированной площади, укладывающихся в прямоугольник заданной ширины и высоты. Эти числа хорошо известны в комбинаторике как *коэффициенты гауссовых многочленов* или *коэффициенты гауссовых q-биномиальных коэффициентов*. Гауссовы коэффициенты представляют собой довольно сложный объект, но они давно изучаются и о них накоплено существенное количество информации (см. приведенную ниже литературу). Ориентируясь на это, мы сводим один из главных переходов в нашей конструкции с описанием абсолюта группы Гейзенберга к вопросу о числе геодезических путей, переформулируем этот вопрос в терминах диаграмм Юнга и решаем его, опираясь на известные свойства q-биномиальных коэффициентов.

Прокомментируем вышеупомянутый переход чуть подробнее. В описании абсолюта группы Гейзенберга, которое мы строим, существенную роль играет абсолют полугруппы Гейзенберга. Один из центральных результатов о полугруппе заключается в том, что подмножество непрерывных мер в абсолюте полугруппы Гейзенберга изоморфно подмножеству непрерывных мер в абсолюте коммутативной полугруппы с двумя образующими (число путей в этом случае задается треугольником Паскаля), т.е. открытому интервалу (теорема де Финетти). Доказывая эту изоморфность, мы и используем подход с подсчетом количества путей и теорию разбиений, сводя проверку изоморфности к конкретному утверждению о поведении функции числа геодезических путей в графе Кэли группы Гейзенберга (предложение 1) и проверяя справедливость этого утверждения о числе геодезических с помощью его переформулировки на язык теории разбиений (лемма 1).

Объяснение того, какое конкретно место занимает описание абсолюта полугруппы Гейзенберга в описании абсолюта всей группы, и того, как конкретно доказательство изоморфности подмножеств непрерывных мер в абсолютах полугрупп сводится к утверждению о числе путей, будет приведено в готовящейся работе с описанием абсолюта. В настоящем же введении мы формулируем и комментируем нужное нам в доказательстве изоморфности утверждение о числе путей (предложение 1) и поясняем его переформулировку в терминах разбиений и диаграмм Юнга (лемма 1).

Теперь мы перейдем к описанию интересующих нас свойств числа путей. Мы рассматриваем случай дискретной группы Гейзенберга со стандартной системой образующих:

$$N_2 = \langle x, y \mid [[x,y],x] = [[x,y],y] = 1\rangle. \qquad (1)$$

Для обращения с группой N_2 удобно иметь в виду ее классическое точное представление целочисленными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{x} & \mathrm{z} \\ 0 & 1 & \mathrm{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в котором элементы x^m, y^n и $[x,y]^k$ представлены соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из вида указанного представления следует (см., например, лемму 2.1 в [5]), что для элемента $g \in N_2$ существует единственная тройка целых чисел (m, n, k), такая, что

$$g = [x,y]^k y^n x^m.$$

Отсюда же можно получить удобную модель графа Кэли группы Гейзенберга, помещая элемент $g = [x,y]^k y^n x^m$ в точку трехмерного евклидова пространства с координатами (m, n, k).

В N_2 мы рассматриваем *полугруппу Гейзенберга* N_{2+}, порожденную элементами x и y. Полугруппа N_{2+} состоит из элементов

$$g = [x,y]^k y^n x^m \quad \text{с} \quad m \geqslant 0,\ n \geqslant 0 \text{ и } k \in [0, mn].$$

Для элемента $g \in N_2$ обозначим через $\dim(g)$ количество кратчайших (геодезических) путей в графе Кэли пары $(N_2, \{x,y\})$, ведущих к g из единицы группы. Нас интересует поведение функции dim в сравнительно простом случае – на полугруппе N_{2+}; в этом случае $\dim(g)$ совпадает с числом различных представляющих элемент g слов в образующих x и y (без обратных) и интерпретируется в терминах разбиений и диаграмм Юнга (ниже это объяснено более подробно).

Интересующий нас аспект поведения функции dim состоит в следующем: мы хотели бы убедиться, что на области N_{2+} вдали от края ∂N_{2+} (в смысле вложения в группу и словарной метрики на группе) функция dim обладает свойствами, близкими к свойствам *мультипликативного характера* (*мультипликативными характерами*, или просто *характерами*, групп и полугрупп мы называем гомоморфизмы в мультипликативную группу неотрицательных вещественных чисел; связь между характерами и абсолютом коммутативных и нильпотентных групп уже затрагивалась в [45] и [6]).

Приведем пример такого свойства. Полезно было бы показать, что функция dim на подполугруппе N_{2+} схожа с характерами в том смысле, что функции

$$f_x(g) := \frac{\dim(gx)}{\dim(g)} \quad \text{и} \quad f_y(g) := \frac{\dim(gy)}{\dim(g)}$$

локально близки к константам (если элемент $g \in N_{2+}$ находится достаточно далеко от края ∂N_{2+}) или (что то же самое) что функции

$$f_{xx}(g) := \frac{\dim(g) \cdot \dim(gxx)}{\dim(gx) \cdot \dim(gx)} \quad \text{и} \quad f_{yy}(g) := \frac{\dim(g) \cdot \dim(gyy)}{\dim(gy) \cdot \dim(gy)}$$

на области N_{2+} сколь угодно близки к 1 (при достаточном удалении от края ∂N_{2+}). Связь очевидна: для произвольного характера $\chi\colon G \to \mathbb{R}_+$ на произвольной группе G для любого элемента $z \in G$ функция $\frac{\chi(gz)}{\chi(g)}$ тождественно равна константе $\chi(z)$, а

$$\frac{\chi(g) \cdot \chi(gzz)}{\chi(gz) \cdot \chi(gz)} = 1.$$

Для наших целей достаточным оказывается установить наличие более слабого свойства функции dim, отвечающего более слабому – в сравнении с приведенным – свойству характеров, состоящему в том, что *каждый характер постоянен на классах смежности по коммутанту*. Соответствующее свойство функции dim выражается в том, что ее изменение при движении параметра по любому классу смежности коммутанта вдали от края области N_{2+} относительно мало в смысле близости к единице функции

$$f_{[x,y]}(g) := \frac{\dim(gxyx^{-1}y^{-1})}{\dim(g)}.$$

Приведем строгую формулировку.

Теорема 1. *В дискретной группе Гейзенберга*

$$N_2 = \langle x, y \mid [[x,y],x] = [[x,y],y] = 1\rangle$$

обозначим через $\dim(g)$ *количество кратчайших (геодезических) путей в графе Кэли пары* $(N_2, \{x,y\})$, *ведущих к элементу* g *из единицы группы. Тогда выполняется следующее свойство:*

$$\frac{\dim([x,y]^{k+1}y^n x^m)}{\dim([x,y]^k y^n x^m)} \xrightarrow[m,n,k\in\mathbb{N}]{\min\{m,n,k,mn-k\}\to+\infty} 1. \tag{2}$$

Переформулируем теорему 1 в терминах диаграмм Юнга. (За определениями базовых понятий теории разбиений и диаграмм Юнга мы отсылаем читателя к обширной литературе; см., например, [9].) Для перехода к диаграммам Юнга воспользуемся стандартной геометрической интерпретацией элементов дискретной группы Гейзенберга как путей на плоскости (см., например, [37]). Эта интерпретация может быть описана с помощью абелизации

$$N_2 \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} = \langle x, y \mid [x,y] = 1\rangle \tag{3}$$

и проекции

$$N_2 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad [x,y]^k y^n x^m \mapsto (m,n,k) \mapsto (m,n). \tag{4}$$

Гомоморфизм абелизации (3) (как всякий гомоморфизм с наследуемой системой образующих) дает проекцию на уровне графов Кэли. Вложив граф Кэли пары $(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, \{x,y\})$ в плоскость в виде двумерной целочисленной решетки, мы получаем проекцию группы Гейзенберга и ее графа Кэли на плоскость (будем считать, что элемент $[x,y]^k y^n x^m$ проектируется в точку с координатами (m,n)). Пути в графе Кэли группы Гейзенберга проектируются при этом в пути на плоскости. Ассоциируя элемент g группы Гейзенберга с путями в графе Кэли, ведущими к g из единицы группы, и проектируя эти пути в плоскость, мы получаем представление элементов группы Гейзенберга выходящими из начала координат путями в целочисленной решетке на плоскости. Отметим, что подход с представлением элементов группы путями на решетке допускает существенное обобщение; идея такого обобщения описывается в [1]. В случае группы Гейзенберга мы приходим к следующему хорошо известному факту (см., например, [37]).

Предложение 1. *В целочисленной решетке на плоскости два выходящих из начала координат пути представляют один и тот же элемент группы Гейзенберга тогда и только тогда, когда их концы* *совпадают, а ориентированная площадь образованного этими путями замкнутого контура равна нулю.*

В рамках описанной геометрической интерпретации четко выделяются геодезические пути, ведущие к элементам подполугруппы N_{2+}: если геодезический путь W в графе Кэли группы Гейзенберга ведет из единицы группы в элемент полугруппы N_{2+}, то проекция $\pi(W)$ этого пути является геодезическим путем (лестницей) на целочисленной решетке. Поставим в соответствие пути W диаграмму Юнга $Y(W)$, ограниченную проекцией $\pi(W)$, вертикальной координатной осью и горизонтальной прямой, проходящей через конечную точку пути $\pi(W)$. Из очевидных свойств вышеописанных представлений элементов группы Гейзенберга легко вытекает, что для каждого элемента $g = [x, y]^k y^n x^m$ из N_{2+} соответствие $W \mapsto Y(W)$ задает биекцию между ведущими к g из единицы группы геодезическими путями в графе Кэли пары $(N_2, \{x, y\})$ и множеством диаграмм Юнга площади k, укладывающихся в прямоугольник ширины m и высоты n.

Соответственно, теорема 1 получает следующую эквивалентную переформулировку.

Лемма 1. *Обозначим через $P_{m,n}(Q)$ число диаграмм Юнга площади Q, укладывающихся в прямоугольник ширины m и высоты n. Тогда*

$$\frac{P_{m,n}(Q+1)}{P_{m,n}(Q)} \xrightarrow[m,n,Q\in\mathbb{N}]{\min\{m,n,Q,mn-Q\}\to+\infty} 1.$$

О числах $P_{m,n}(Q)$, которые можно назвать “коэффициентами гауссовых q-биномиальных коэффициентов”, в литературе имеется довольно много информации – см., например, [9, гл. 3], [8, гл. 1], [22], [7, 10, 12, 16, 23–26, 41, 43]. Глубоко исследован родственный интересующему нас вопрос об унимодальности этих коэффициентов: см. [18–21, 28–32, 38, 39, 42, 46–49], а также [11, 33, 50]. Еще один близкий вопрос – вопрос о лог-вогнутости (см. [13–15, 27, 34–36, 40] и [17]). Однако наш вопрос, возникший из теории абсолюта, ранее, по всей видимости, не ставился, и нам не удалось обнаружить в литературе результата, из которого утверждение леммы 1 следовало бы напрямую. В следующей части настоящей заметки мы приводим полное подробное доказательство.

Отметим, что вопрос о доказательстве более сильного, чем (2), свойства

$$\frac{\dim([x,y]^k y^n x^{m-1}) \dim([x,y]^k y^n x^{m+1})}{(\dim([x,y]^k y^n x^m))^2} \xrightarrow[m,n,k\in\mathbb{N}]{\min\{m,n,k,mn-k\}\to+\infty} 1 \qquad (5)$$

сохраняет свою актуальность – из свойства (5) вытекает компактность абсолюта группы Гейзенберга. Эквивалентная переформулировка свойства (5) в терминах q-биномиальных коэффициентов выглядит следующим образом:

$$\frac{P_{m,n-1}(Q)\cdot P_{m,n+1}(Q)}{(P_{m,n}(Q))^2} \xrightarrow[m,n,Q\in\mathbb{N}]{\min\{m,n,Q,mn-Q\}\to+\infty} 1.$$

§2. Доказательство леммы 1

Заметим в первую очередь, что в силу очевидной симметрии

$$P_{m,n}(Q) = P_{m,n}(mn-Q)$$

нам достаточно ограничиться рассмотрением случая $Q < mn/2$ и что в рамках этого случая, согласно результату о так называемой *унимодальности* (см. [9, гл. 3], [42], а также [31] и приведенную там литературу), выполняется неравенство

$$P_{m,n}(Q) \leqslant P_{m,n}(Q+1). \qquad (6)$$

Введем ряд вспомогательных терминов и обозначений. Клетку диаграммы Юнга назовем *угловой*, если ее удаление снова дает диаграмму Юнга. Количество угловых клеток диаграммы назовем ее *характеристикой*.

Обозначим через $Y_{m,n}(Q)$ множество диаграмм Юнга площади Q, укладывающихся в прямоугольник ширины m и высоты n. Для тройки натуральных чисел m, n и Q с $Q < mn/2$ построим двудольный ориентированный граф $\Gamma := \Gamma_{Q,m,n}$, сделав его вершинами диаграммы из $Y_{m,n}(Q)$ и $Y_{m,n}(Q+1)$. Вершины v и w в Γ соединим ребром, идущим из v в w, тогда и только тогда, когда v лежит в $Y_{m,n}(Q)$, а w (лежит в $Y_{m,n}(Q+1)$ и) получается из v добавлением клетки. Докажем ряд свойств графа Γ. Пусть $e = (v \to w)$ – ребро в Γ. Тогда имеют место следующие свойства.

(P1) Степень $\deg_\Gamma(w)$ вершины w (в графе Γ) равна ее характеристике.

(P2) Степень и характеристика вершины v отличаются не более чем на единицу.

(P3) Характеристики вершин v и w отличаются не более чем на единицу.

(P4) Степени вершин v и w отличаются не более чем на двойку.

Свойство (P1) очевидно. Чтобы доказать свойство (P2), поместим диаграмму v в угол прямоугольника ширины m и высоты n и рассмотрим простую ломаную длины $m+n$, идущую из левого нижнего угла прямоугольника в правый верхний и разрезающую прямоугольник на две части: диаграмму v и ее дополнение. Тогда количество левых поворотов по ходу движения ломаной совпадает с характеристикой диаграммы v, а количество правых поворотов – со степенью $\deg_\Gamma(v)$. Поскольку правые и левые повороты чередуются, их количество отличается не более чем на единицу. Для доказательства свойства (P3) заметим, что при добавлении клетки появляется одна новая угловая клетка (собственно, добавленная), а клетки сверху и слева от нее перестают быть угловыми, если таковыми являлись. Свойство (P4) следует из (P1), (P2) и (P3).

Обозначим через $E := E(\Gamma)$ множество всех ребер графа Γ. Для ребра $e = (v \to w)$ из E введем обозначения

$$\alpha(e) := \deg_\Gamma(v) \qquad \text{и} \qquad \omega(e) := \deg_\Gamma(w).$$

Тогда по построению выполняются равенства

$$P_{m,n}(Q) = \sum_{e\in E} \frac{1}{\alpha(e)} \qquad \text{и} \qquad P_{m,n}(Q+1) = \sum_{e\in E} \frac{1}{\omega(e)}.$$

Для $M \in \mathbb{N}$ положим

$$E_M := \{e \in E\colon\ \min\{\alpha(e), \omega(e)\} > M\}.$$

Воспользовавшись свойством (P4), получаем, что

$$\begin{aligned} &P_{m,n}(Q+1) - P_{m,n}(Q) = \sum_{e\in E}\left(\frac{1}{\omega(e)} - \frac{1}{\alpha(e)}\right) \\ &\leqslant \sum_{e\in E} \frac{2}{\omega(e)\alpha(e)} = \sum_{e\in E_M} \frac{2}{\omega(e)\alpha(e)} + \sum_{e\in E\setminus E_M} \frac{2}{\omega(e)\alpha(e)} \\ &\leqslant \sum_{e\in E_M} \frac{2}{M\alpha(e)} + \sum_{e\in E\setminus E_M} \frac{2}{\alpha(e)} \leqslant \frac{2}{M}\cdot P_{m,n}(Q) + 2\cdot \sum_{e\in E\setminus E_M} \frac{1}{\alpha(e)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Теперь заметим, что в силу (P4) из принадлежности ребра $(v \to w)$ множеству $E \setminus E_M$ вытекает, что $\deg_\Gamma(v) \leqslant M + 2$. В таком случае в силу свойства (P2) характеристика диаграммы v не превосходит $M+3$. Обозначив через $P_{m,n}(Q, \leqslant M+3)$ число тех диаграмм в $Y_{m,n}(Q)$, характеристика которых не превосходит $M+3$, получаем, что

$$\sum_{e \in E \setminus E_M} \frac{1}{\alpha(e)} \leqslant P_{m,n}(Q, \leqslant M+3). \tag{8}$$

В силу (7) и (8) для произвольного $M \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\frac{P_{m,n}(Q+1)}{P_{m,n}(Q)} - 1 \leqslant \frac{2}{M} + 2 \cdot \frac{P_{m,n}(Q, \leqslant M+3)}{P_{m,n}(Q)}. \tag{9}$$

Взяв $M > \frac{4}{\varepsilon}$, получаем $\frac{2}{M} < \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, с учетом (6) для завершения доказательства леммы 1 достаточно показать, что для фиксированного M при достаточно больших m, n и Q (где $Q < mn/2$) второе слагаемое в правой части неравенства (9) мало. Это прямо следует из доказанной ниже леммы 2.

Обозначим через $P_{m,n}(Q,t)$ число диаграмм из $Y_{m,n}(Q)$ с характеристикой t.

Лемма 2. *Пусть* $t \in \mathbb{N}$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любых натуральных чисел* Q, m *и* n, *таких, что* $Q \leqslant mn/2$ *и*

$$\min\left\{m, n, \left\lceil\sqrt{2Q}\right\rceil\right\} \geqslant \max\left\{36t^2, 1/\varepsilon\right\},$$

выполняется неравенство

$$\frac{P_{m,n}(Q,t)}{P_{m,n}(Q)} < \varepsilon.$$

Лемма 2 утверждает, что среди диаграмм Юнга достаточно большой площади, умещающихся в прямоугольник с достаточно большими сторонами, доля диаграмм с фиксированной характеристикой мала. Для доказательства леммы 2 получим оценки на величины $P_{m,n}(Q,t)$ и $P_{m,n}(Q)$. Мы используем стандартные обозначения

$$\lfloor r \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z}\colon z \leqslant r\} \quad \text{и} \quad \lceil r \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z}\colon z \geqslant r\}.$$

Утверждение 1. *Если* Q, m *и* n *– натуральные числа и* $Q \leqslant mn/2$, *то*

$$P_{m,n}(Q) \geqslant \frac{(2Q)^{k-1}}{k!k^k}, \qquad \text{где} \qquad k = \min\left\{m, n, \left\lfloor\sqrt{2Q}\right\rfloor\right\}.$$

Доказательство. Положим $Q' := \lfloor \lfloor 2Q/k \rfloor \cdot k/2 \rfloor$ и покажем, что

$$
\begin{aligned}
P_{m,n}(Q) &\overset{\text{(i1)}}{\geqslant} P_{k,\lceil 2Q/k\rceil}(Q) \overset{\text{(i2)}}{\geqslant} P_{k,\lceil 2Q/k\rceil}(Q') \overset{\text{(i3)}}{\geqslant} P_{k,\lfloor 2Q/k\rfloor}(Q') \\
&\overset{\text{(i4)}}{\geqslant} \frac{\sum_{X=1}^{\lfloor 2Q/k\rfloor\cdot k} P_{k,\lfloor 2Q/k\rfloor}(X)}{\lfloor 2Q/k\rfloor \cdot k} \overset{\text{(i5)}}{=} \frac{C^k_{\lfloor 2Q/k\rfloor+k} - 1}{\lfloor 2Q/k\rfloor \cdot k} \\
&\overset{\text{(i6)}}{\geqslant} \frac{(2Q/k)^k}{k!}\frac{1}{2Q} = \frac{(2Q)^{k-1}}{k!k^k}.
\end{aligned}
$$

Неравенство (i1) верно, так как прямоугольник размера $k \times \lceil 2Q/k \rceil$ "помещается" (возможно, после поворота на 90°) в прямоугольник размера $m \times n$, поскольку, как нетрудно проверить, в силу предположения на k выполняются неравенства

$$k \leqslant \min\{m,n\} \quad \text{и} \quad \lceil 2Q/k \rceil \leqslant \max\{m,n\}.$$

Неравенство (i2) выполняется в силу унимодальности (см. [9]), поскольку

$$\lceil 2Q/k \rceil \cdot k/2 \geqslant Q \geqslant Q'.$$

Неравенство (i3) выполняется, поскольку $\lceil 2Q/k \rceil \geqslant \lfloor 2Q/k \rfloor$. Неравенство (i4) выполняется, поскольку Q' – ближайшее целое к половине площади четырехугольника со сторонами k и $\lfloor 2Q/k \rfloor$, так что для любого X в силу унимодальности выполняется неравенство

$$P_{k,\lfloor 2Q/k\rfloor}(Q') \geqslant P_{k,\lfloor 2Q/k\rfloor}(X).$$

Равенство (i5) выполняется, поскольку общее количество диаграмм Юнга, укладывающихся в прямоугольник ширины a и высоты b, составляет C^a_{a+b}, а $P_{a,b}(0) = 1$. Неравенство (i6) при $k = 1$ обращается в равенство, а при $k > 1$ выполняется, поскольку при $1 < a \leqslant b$ выполняется неравенство

$$C^a_{a+b} - 1 \geqslant \frac{(b+1)^a}{a!}. \qquad \square$$

Утверждение 2. *Количество диаграмм Юнга площади Q с характеристикой t не превосходит числа*

$$C^{2t-1}_{2Q-1} \leqslant \frac{(2Q-1)^{2t-1}}{(2t-1)!}.$$

Доказательство. Любая диаграмма площади Q помещается в квадрат размера $Q \times Q$. При этом если прислонить диаграмму к левому верхнему углу квадрата, она будет однозначно характеризоваться простым монотонным путем длины $2Q$, идущим по ребрам размещенной в квадрате целочисленной решетки из левого нижнего в правый верхний угол квадрата по краю диаграммы и отрезающим диаграмму от квадрата. (Ср. с так называемыми *путями Дика.*) Заметим, что характеристика диаграммы совпадает с количеством левых поворотов у отвечающего ей пути, так что количество диаграмм (площади Q) с характеристикой t не превосходит числа путей указанного вида, у которых имеется в точности t левых поворотов. Пути указанного вида однозначно задаются позициями чередующихся правых и левых поворотов, которые располагаются на $2Q-1$ возможных позициях. Кроме того, если путь ограничивает диаграмму заданной площади Q, его можно восстановить как без информации о первом правом повороте, если таковой предшествовал первому левому, так и без информации о последнем правом повороте, если таковой следовал за последним левым. Таким образом, пути из интересующего нас класса однозначно задаются выбором мест для $2t-1$ чередующихся левых и правых поворотов из возможных $2Q-1$ позиций, что и дает оценку C_{2Q-1}^{2t-1}. □

Доказательство леммы 2. Положим

$$k := \min\left\{m, n, \left[\sqrt{2Q}\right]\right\}.$$

Из полученных оценок на $P_{m,n}(Q,t)$ и $P_{m,n}(Q)$ вытекает, что

$$\frac{P_{m,n}(Q,t)}{P_{m,n}(Q)} < \frac{(2Q-1)^{2t-1}}{(2t-1)!}\frac{k!k^k}{(2Q)^{k-1}} < \frac{k!k^k}{(2Q)^{k-2t}}.$$

Поскольку $k! < \sqrt{2\pi k}k^k e^{-k+\frac{1}{12k}} < \sqrt{k}k^k e^{-k}3$, а $2Q \geqslant k^2$ (в силу предположения о том, что $k \leqslant \sqrt{2Q}$), имеем

$$\frac{k!k^k}{(2Q)^{k-2t}} < \frac{k^{4t+1/2}3}{e^k}.$$

Далее, поскольку $e^x > x^2$ для любого $x > 0$, так что для любого $p > 0$ при $x \geqslant p^2$ имеем $e^x \geqslant e^{\sqrt{x}p} > x^p$, из предположения о том, что $k \geqslant 36t^2 = (6t)^2$, выводим

$$\frac{k^{4t+1/2}\cdot 3}{e^k} < \frac{k^{4t+1/2}\cdot 3}{k^{6t}} = \frac{k^{1/2}\cdot 3}{k^{2t}} < \frac{k}{k^{2t}} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Список литературы

1. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры.* — УМН **55**, вып. 4 (334) (2000), 59–128.
2. А. М. Вершик, *Задача о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов.* — Функц. анал. и его прил. **48**, вып. 4 (2014), 26–46.
3. А. М. Вершик, *Оснащенные градуированные графы, проективные пределы симплексов и их границы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2015), 83–104.
4. А. М. Вершик, А. В. Малютин, *Фазовый переход в задаче о границе-выход для случайных блужданий на группах.* — Функц. анал. и его прил. **49**, вып. 2 (2015), 7–20.
5. А. М. Вершик, А. В. Малютин, *Бесконечные геодезические в дискретной группе Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **462** (2017), 39–51.
6. А. М. Вершик, А. В. Малютин, *Абсолют конечно порожденных групп*: II. *Лапласова и вырожденная части.* — Функц. анал. и его прил. **52**, вып. 3 (2018), 3–21.
7. Е. Ю. Смирнов, *Диаграммы Юнга и q-комбинаторика.* — Квант **1** (2015), 7–12.
8. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Мир, М., 1990.
9. Дж. Эндрюс, *Теория разбиений*, Наука, М., 1982.
10. G. Almkvist, G. E. Andrews, *A Hardy–Ramanujan formula for restricted partitions.* — J. Number Theory **38**, No. 2 (1991), 135–144.
11. G. E. Andrews, *On the difference of successive Gaussian polynomials.* — J. Statist. Plann. Inference **34**, No. 1 (1993), 19–22.
12. M. Braun, *An algebraic interpretation of the q-binomial coefficients.* — Int. Electron. J. Algebra **6** (2009), 23–30.
13. F. Brenti, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry: An update.* — In: Jerusalem Combinatorics '93, Contemp. Math. **178**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 71–89.
14. L. M. Butler, *A unimodality result in the enumeration of subgroups of a finite abelian group.* — Proc. Amer. Math. Soc. **101**, No. 4 (1987), 771–775.
15. L. M. Butler, *The q-log-concavity of q-binomial coefficients.* — J. Combin. Theory Ser. A **54**, No. 1 (1990), 54–63.
16. H. Cohn, *Projective geometry over $\mathbb{F}_1$ and the Gaussian binomial coefficients.* — Amer. Math. Monthly **111**, No. 6 (2004), 487–495.
17. S. DeSalvo, I. Pak, *Log-concavity of the partition function.* — Ramanujan J. **38**, No. 1 (2015), 61–73.
18. V. Dhand, *Rank-unimodality of Young's lattice via explicit chain decomposition*, `arXiv:1303.2536` (2013).
19. V. Dhand, *Tropical decomposition of Young's partition lattice.* — J. Algebraic Combin. **39**, No. 4 (2014), 783–806.
20. V. Dhand, *A combinatorial proof of strict unimodality for q-binomial coefficients.* — Discrete Math. **335** (2014), 20–24.
21. F. Goodman, K. M. O'Hara, *On the Gaussian polynomials.* — In: q-Series and Partitions, IMA Vol. Math. Appl. **18**, Springer, New York, 1989, pp. 57–66.
22. V. Kac, P. Cheung, *Quantum Calculus*, Springer-Verlag, New York, 2002.

23. D. E. Knuth, *Subspaces, subsets, and partitions.* — J. Combin. Theory Ser. A **10** (1971), 178–180.
24. T. Konstantopoulos, L. Yuan, *A probabilistic interpretation of the Gaussian binomial coefficients.* — J. Appl. Probab. **54**, No. 4 (2017), 1295–1298.
25. J. Konvalina, *Generalized binomial coefficients and the subset-subspace problem.* — Adv. Appl. Math. **21**, No. 2 (1998), 228–240.
26. J. Konvalina, *A unified interpretation of the binomial coefficients, the Stirling numbers, and the Gaussian coefficients.* — Amer. Math. Monthly **107**, No. 10 (2000), 901–910.
27. C. Krattenthaler, *On the q-log-concavity of Gaussian binomial coefficients.* — Monatsh. Math. **107**, No. 4 (1989), 333–339.
28. I. G. Macdonald, *An elementary proof of a q-binomial identity.* — In: q-Series and Partitions, IMA Vol. Math. Appl. **18**, Springer, New York, 1989, pp. 73–75.
29. K. M. O'Hara, *Unimodality of Gaussian coefficients: a constructive proof.* — J. Combin. Theory Ser. A **53**, No. 1 (1990), 29–52.
30. I. Pak, G. Panova, *Strict unimodality of q-binomial coefficients.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351** (2013), 415–418.
31. I. Pak, G. Panova, *Bounds on certain classes of Kronecker and q-binomial coefficients.* — J. Combin. Theory Ser. A **147** (2017), 1–17.
32. R. A. Proctor, *Solution of two difficult combinatorial problems with linear algebra.* — Amer. Math. Monthly **89**, No. 10 (1982), 721–734.
33. V. Reiner, D. Stanton, *Unimodality of differences of specialized Schur functions.* — J. Algebraic Combin. **7**, No. 1 (1998), 91–107.
34. B. E. Sagan, *Inductive and injective proofs of log concavity results.* — Discrete Math. **68**, No. 2–3 (1988), 281–292.
35. B. E. Sagan, *Inductive proofs of q-log concavity.* — Discrete Math. **99**, No. 1–3 (1992), 289–306.
36. B. E. Sagan, *Log concave sequences of symmetric functions and analogs of the Jacobi–Trudi determinants.* — Trans. Amer. Math. Soc. **329**, No. 2 (1992), 795–811.
37. M. Shapiro, *A geometric approach to the almost convexity and growth of some nilpotent groups.* — Math. Ann. **285** (1989), 601–624.
38. R. P. Stanley, *Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property.* — SIAM J. Algebraic Discrete Methods **1**, No. 2 (1980), 168–184.
39. R. P. Stanley, *Some aspects of groups acting on finite posets.* — J. Combin. Theory Ser. A **32**, No. 2 (1982), 132–161.
40. R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry.* — In: Graph Theory and its Applications: East and West, Ann. New York Acad. Sci. **576**, New York Acad. Sci., New York, 1989, pp. 500–535.
41. R. P. Stanley, F. Zanello, *Some asymptotic results on q-binomial coefficients.* — Ann. Comb. **20**, No. 3 (2016), 623–634.
42. J. J. Sylvester, *Proof of the hitherto undemonstrated Fundamental Theorem of Invariants.* — Philosophical Magazine **5** (1878), 178–188; reprinted in Coll. Math. Papers, Vol. 3, Chelsea, New York, 1973, pp. 117–126.
43. L. Takács, *Some asymptotic formulas for lattice paths.* — J. Statist. Plann. Inference **14**, No. 1 (1986), 123–142.

44. A. M. Vershik, *Intrinsic metric on graded graphs, standardness, and invariant measures.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **421** (2014), 58–67.
45. A. M. Vershik, A. V. Malyutin, *The absolute of finitely generated groups*: I. *Commutative* (*semi*)*groups*, to appear in European J. Math.; `https://doi.org/10.1007/s40879-018-0263-8`.
46. D. E. White, *Monotonicity and unimodality of the pattern inventory.* — Adv. Math. **38**, No. 1 (1980), 101–108.
47. D. Zeilberger, *A one-line high school algebra proof of the unimodality of the Gaussian polynomials* $\left[{n \atop k}\right]$ *for* $k < 20$. — In: q-Series and Partitions, IMA Vol. Math. Appl. **18**, Springer, New York, 1989, pp. 67–72.
48. D. Zeilberger, *Kathy O'Hara's constructive proof of the unimodality of the Gaussian polynomials.* — Amer. Math. Monthly **96**, No. 7 (1989), 590–602.
49. F. Zanello, *Zeilberger's KOH theorem and the strict unimodality of q-binomial coefficients.* — Proc. Amer. Math. Soc. **143**, No. 7 (2015), 2795–2799.
50. F. Zanello, *On Bergeron's positivity problem for q-binomial coefficients.* — Electron. J. Combin. **25**, No. 2 (2018), Paper 2.17.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный
университет, Санкт-Петербург, Россия;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

E-mail: `vershik@pdmi.ras.ru`

Поступило 13 августа 2018 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный
университет, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: `malyutin@pdmi.ras.ru`