Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

А. М. Вершик, П. Б. Затицкий

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОМ БОРЕЛЕВСКОМ АДИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. Введение

В работах [1,2] первый автор доказал, что любой эргодический автоморфизм пространства Лебега имеет адическую реализацию, т.е. изоморфен адическому сдвигу на пространстве путей некоторого градуированного графа с некоторой центральной мерой. В работе [6] доказано, что в качестве такого графа можно всегда брать так называемый униадический граф UA (см. §4), а изменять лишь центральную меру на пространстве его путей. Целью настоящей заметки является доказательство борелевского аналога этого утверждения: на пространстве путей униадического графа можно реализовать любой апериодический борелевский автоморфизм сепарабельного метрического пространства. Доказательство этого утверждения основано на построении так называемой борелевской базисной фильтрации данного автоморфизма. Более подробно историю вопроса см. в [5, 6].

Связь борелевского и метрического подходов в динамике и теории представлений рассматривалась в ряде работ, см. [7–10]. Одна из задач, связывающих оба подхода, состоит в описании инвариантных мер для данного борелевского автоморфизма или борелевской фильтрации.

Естественный вопрос, положительно решаемый в этой работе, состоит в том, можно ли определить в стандартном борелевском пространстве универсальный автоморфизм и его аппроксимацию так, чтобы любой борелевский автоморфизм стандартного борелевского пространства был изоморфен (с точностью до множества меры нуль для всех апериодических мер) ограничению этого автоморфизма на некоторое инвариантное подмножество, см. теорему 1. Этим борелевским пространством оказывается пространство путей определяемого нами

Ключевые слова: фильтрация, конечная определенность, универсальность, униадический граф, центральные меры.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН No. 01 "Фундаментальная математика и ее приложения" (грант PRAS-18-01).

униадического (= универсального + адического) графа, автоморфизмом – его адический автоморфизм, а аппроксимация определяется хвостовой фильтрацией графа. В доказательстве используется идея работы, где рассматривался старый и более простой вопрос о борелевской универсальности леммы Рохлина.

Следствия, полученные в этой работе и статье [6], относятся к теории равномерной аппроксимации действия группы $\mathbb{Z}$, в частности к новому способу кодирования автоморфизмов с помощью фильтраций.

Опишем подробнее постановку вопроса. Пусть X – стандартное борелевское пространство. Будем говорить, что отображение $T\colon X \to X$ является *борелевским автоморфизмом* пространства X, если оно обратимо и вместе с обратным борелевски измеримо. Символом $M_{\mathrm{ap}}(X,T)$ обозначим пространство всех борелевских T-инвариантных апериодических вероятностных мер на пространстве X. Будем говорить, что борелевское подмножество $\widehat{X} \subset X$ *метрически универсально*, если $\mu(\widehat{X}) = 1$ для любой меры $\mu \in M_{\mathrm{ap}}(X,T)$.

Основным результатом данной заметки является следующая теорема.

Теорема 1 (о борелевской универсальности униадического графа)**.** *Пусть T – апериодический борелевский автоморфизм сепарабельного метрического пространства X. Тогда найдется метрически универсальное борелевское подмножество $\widehat{X} \subset X$ и борелевски измеримое инъективное вложение этого подмножества в пространство путей $\mathcal{T}(UA)$ униадического графа UA, переводящее сдвиг T в адическое преобразование на $\mathcal{T}(UA)$.*

Доказательство теоремы 1 использует несколько различных идей. Первая идея – получение борелевского варианта леммы Рохлина (см. [4]). Вторая – идея итерации ослабленного варианта леммы Рохлина для построения базисной борелевской фильтрации и адической реализации автоморфизма (см. [1, 2] и [6]). Мы докажем ослабленный борелевский вариант леммы Рохлина (лемма 2), при помощи его итерации построим базисную борелевскую фильтрацию автоморфизма (теорема 2) и докажем теорему 1.

§2. Борелевские фильтрации

В работе [6] мы изучали измеримые разбиения пространства Лебега, а также фильтрации (убывающие последовательности измеримых разбиений[1]) на пространствах Лебега. В этой работе мы переносим основные понятия на борелевский случай.

2.1. Базисные фильтрации, цветные фильтрации.

Определение 1. Борелевской фильтрацией стандартного борелевского пространства будем называть убывающую последовательность борелевских разбиений $\Xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$, где ξ_0 – разбиение на точки.

Фильтрацию Ξ будем называть *локально конечной*[2], если для каждого n размеры элементов разбиения ξ_n равномерно ограничены некоторой константой, возможно, зависящей от n.

Будем говорить, что Ξ – фильтрация *с порядком*, если на каждом элементе фактор разбиения ξ_{n+1}/ξ_n задан измеримый линейный порядок (измеримость означает, что множество всех точек, имеющих данный номер в элементах разбиения ξ_{n+1}/ξ_n, борелевски измеримо); эти упорядочения индуцируют согласованное упорядочение на элементах разбиений ξ_n и тем самым на классах предельного разбиения $\bigcap_n \xi_n$ (вообще говоря, не являющегося измеримым); мы предполагаем, что тип упорядочения есть тип $\mathbb{Z}$ для почти всех классов.

Базисной будем называть локально конечную фильтрацию с порядком.

Определение 2. Пусть T – борелевский автоморфизм стандартного борелевского пространства X, а $\Xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ – борелевская базисная фильтрация на X. Будем говорить, что фильтрация Ξ *базисная* для T, если предельное разбиение $\bigcap_n \xi_n$ есть разбиение на траектории автоморфизма T, а порядок фильтрации задается автоморфизмом T, т.е.

- каждый элемент α разбиения ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, является конечной траекторией некоторой точки $x \in X$ под действием T:
$$\alpha = \{T^j x\colon j = 0, \dots, |\alpha| - 1\};$$
- для всех $x \in X$ объединение всех элементов $\xi_k(x)$ разбиений ξ_k, содержащих точку x, совпадает с орбитой $\mathrm{Orb}_T(x)$ точки x под действием T.

[1]Элементы разбиений убывающей последовательности разбиений укрупняются. Упорядочения разбиений в комбинаторике и в теории меры противоположны, мы используем терминологию теории меры и функционального анализа.

[2]Отметим, что введенное понятие локальной конечности борелевской фильтрации, вообще говоря, отличается от принятого в метрической теории измеримых разбиений.

Определение 3. Пусть ξ – борелевское разбиение борелевского пространства X. Будем говорить, что ξ – *цветное разбиение*, если на факторпространстве X/ξ задано некоторое конечное борелевское разбиение $c[\xi]$, которое определяет *цвета* элементов разбиения ξ. Разбиение $c[\xi]$ будем называть *раскраской* разбиения ξ.

Борелевскую фильтрацию $\Xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ будем называть *цветной*, если каждое разбиение ξ_n снабжено некоторой раскраской $c[\xi_n]$.

2.2. Комбинаторная определенность борелевской фильтрации. Как и в работе [6], мы вводим понятие комбинаторной определенности базисной борелевской фильтрации.

Напомним конструкцию конечного дерева, описывающего структуру конечной фильтрации с порядком на конечном множестве. Пусть A – произвольное конечное множество, а $\{\eta_i\}_{i=0}^n$ – некоторая конечная фильтрация с упорядочением на нем, причем последнее разбиение η_n тривиально (состоит из одного непустого класса). Построим градуированное дерево с порядком, отвечающее этой конечной фильтрации, следующим образом. Вершины этажа с номером i в этом дереве будут отвечать элементам разбиений η_i. Из вершины этажа $i+1$ проведем ребро в вершину этажа i, если соответствующие им элементы разбиений вложены. Этаж n имеет одну вершину, а вершины нулевого этажа суть элементы множества A. Множество A снабжено линейным порядком: упорядочение фильтрации задает порядок на ребрах, исходящих из каждой вершины в вершины предыдущего этажа. Полученное градуированное дерево будем называть *деревом фильтрации на множестве* A (см. рис. 1). Множество всех упорядоченных градуированных конечных деревьев обозначим $\mathcal{OT}$. Кроме того, мы рассматриваем деревья с отмеченной вершиной (листом). Множество всех упорядоченных градуированных конечных деревьев с отмеченным листом обозначим $\mathcal{OTP}$. В случае, если фильтрация является цветной, раскраска естественным образом переносится на деревья – вершины дерева красятся в цвета соответствующих им элементов разбиений.

Пусть $\Xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ – (цветная) базисная борелевская фильтрация на пространстве X. Для $n \geqslant 0$ и $x \in X$ рассмотрим (цветное) упорядоченное градуированное дерево $\mathrm{otp}_n(x) \in \mathcal{OTP}$, соответствующее сужению конечной фильтрации $\{\xi_i\}_{i=0}^n$ на элементе разбиения ξ_n, содержащем точку x, с отмеченным листом, отвечающим точке x. Символом $\mathrm{ot}_n(x)$ обозначим то же (цветное) упорядоченное дерево, но без отмеченной вершины. На пространстве X рассмотрим борелевское разбиение $\bar{\xi}_n$

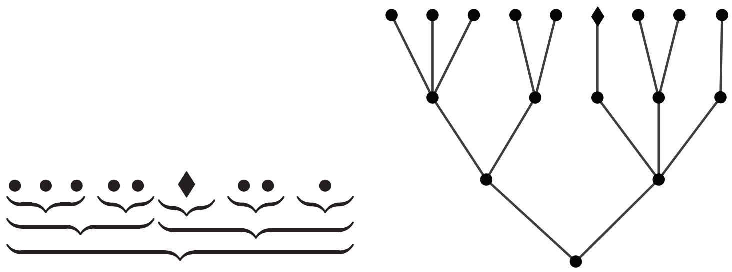

Рис. 1. Конечная фильтрация и ее дерево с отмеченной вершиной.

на прообразы точек при отображении otp_n. Последовательность $\bar{\Xi}$ измельчающихся разбиений $\{\bar{\xi}_n\}_{n\geqslant 0}$ будем называть *ассоциированной* с базисной фильтрацией Ξ.

Определение 4. Будем говорить, что (цветная) базисная борелевская фильтрация Ξ на пространстве X является *комбинаторно определенной*, если для любых двух точек $x, y \in X$ найдется номер n, такой, что точки x и y попадают в разные элементы разбиения $\bar{\xi}_n$.

Как и в метрическом случае (см. [6]), любую базисную борелевскую фильтрацию сепарабельного метрического пространства можно так раскрасить, чтобы она стала комбинаторно определенной.

Предложение 1. *Пусть* $\Xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ – *базисная борелевская фильтрация сепарабельного метрического пространства* X*. Тогда можно снабдить каждое разбиение некоторым цветом* (*см. определение* 3) *так, чтобы полученная цветная фильтрация была комбинаторно определенной.*

Доказательство теоремы повторяет доказательство, проведенное в работе [6], поэтому мы приведем лишь его схему: достаточно выбрать произвольную последовательность $\{\eta_n\}_{n\geqslant 0}$ конечных борелевских разбиений пространства X, в совокупности разделяющую точки, и для каждого $n \geqslant 0$ при помощи разбиения η_n задать раскраску элементов разбиения ξ_n.

В следующем пункте мы покажем, как по комбинаторно определенной цветной фильтрации строится ее адическая модель.

2.3. Адическая реализация комбинаторно определенной фильтрации. Конструкция, приведенная в работе [6], позволяет реализовать комбинаторно определенные (цветные) базисные фильтрации как хвостовые фильтрации на градуированных графах с адической структурой. Она дословно переносится на борелевский случай. Напомним ее вкратце. Для (цветной) базисной борелевской фильтрации $\Xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ пространства X построим градуированный граф $\Gamma = \Gamma[\Xi]$ следующим образом. На этаже n графа Γ поместим вершины, соответствующие разным (цветным) деревьям $\mathrm{ot}_n(x)$, $x \in X$, – их конечное число в силу локальной конечности фильтрации (и конечности множества цветов для каждого n). Соединим вершины соседних уровней ребрами в том случае, если соответствующие им (цветные) упорядоченные деревья вложены. Порядок на ребрах, входящих в каждую вершину, задается порядком в соответствующем этой вершине дереве. При этом если вершина v этажа n графа Γ соответствует дереву $\mathrm{ot} \in \mathcal{OT}$, то пути, приходящие из вершины нулевого этажа в v, естественным образом соответствуют листьям в дереве ot (с учетом порядка). Пространство X отображается в пространство путей $\mathcal{T}(\Gamma)$ построенного графа: точку $x \in X$ отправляем в путь, проходящий по вершинам, которые отвечают деревьям $\mathrm{ot}_n(x)$, $n \geqslant 0$; при этом начало этого пути длины n соответствует отмеченному листу в дереве $\mathrm{otp}_n(x)$.

Как и в метрическом случае, мы получаем следующий результат.

Предложение 2. *Если (цветная) базисная борелевская фильтрация Ξ пространства X является комбинаторно определенной, то она изоморфна хвостовой фильтрации построенного градуированного графа $\Gamma[\Xi]$ с адическим порядком.*

Предложение 2 сводит вопрос об адической реализации борелевского автоморфизма к вопросу о построении его комбинаторно определенной цветной базисной борелевской фильтрации.

§3. Борелевский вариант леммы Рохлина, построение базисной фильтрации борелевского автоморфизма

Пусть T – борелевский автоморфизм стандартного борелевского пространства X. Пусть $B \subset X$ – некоторое борелевское подмножество. Через $\mathrm{Orb}_T(B)$ мы будем обозначать орбиту множества B под действием преобразования T, а через $\mathrm{Orb}_{T,+}(B)$ положительную полуорбиту (иногда мы будем опускать символ T в обозначении орбиты):

$$\mathrm{Orb}_T(B) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^k B, \qquad \mathrm{Orb}_{T,+}(B) = \bigcup_{k\geqslant 0} T^k B.$$

Башней Рохлина $\mathcal{R}[B]$ с основанием B мы будем называть последовательность попарно дизъюнктных борелевских множеств $B_0 = B$, $B_k = TB_{k-1}\setminus B_0$, $k\geqslant 1$. Множества B_k будем называть этажами башни, а B_0 – ее основанием. Очевидно, что объединение всех этажей башни является положительной полуорбитой множества B под действием преобразования T:

$$\cup_{k\geqslant 0} B_k = \mathrm{Orb}_+(B).$$

Пусть $h\in\mathbb{N}$. *Башней* $\mathcal{R}_h[B]$ *высоты* h *с основанием* B будем называть часть определенной выше башни Рохлина, состоящую из этажей $B_0,\dots,B_{h-1}$. Будем говорить, что башня является *полной*, если каждый этаж башни является полным образом основания под действием соответствующей степени преобразования T, т.е. $B_k = T^k B_0$. Через $\bar{\mathcal{R}}_h[B]$ будем обозначать объединение всех этажей башни. Говоря, что башни $\mathcal{R}_{h_1}[B_1]$ и $\mathcal{R}_{h_2}[B_2]$ не пересекаются, мы будем иметь в виду, что соответствующие множества $\bar{\mathcal{R}}_{h_1}[B_1]$ и $\bar{\mathcal{R}}_{h_2}[B_2]$ не пересекаются.

3.1. Борелевский вариант леммы Рохлина, ослабленная форма. Классическая лемма Рохлина служит фундаментом для теории равномерной аппроксимации автоморфизмов пространства Лебега. Вопрос о борелевском варианте леммы ставил в разговоре с первым автором В. А. Рохлин. В работе Гласнера и Вейса (см. [4, Proposition 7.9]) доказан следующий борелевский аналог этой леммы.

Лемма 1. *Пусть T – гомеоморфизм польского пространства (X,ρ). Пусть выбраны $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда найдется такое борелевское подмножество $B\subset X$, что башня $\mathcal{R}_n[B]$ полна и $\mu(\bar{\mathcal{R}}_h[B]) > 1-\varepsilon$ для любой меры $\mu\in M_{\mathrm{ap}}(X,T)$.*

Нам будет удобно модифицировать это утверждение, чтобы оно стало более приспособленным к итерированию и построению базисной фильтрации.

Определение 5. *Сигнатурой* будем называть конечное непустое подмножество множества натуральных чисел: $\mathfrak{s} = \{h_1,\dots,h_n\}\subset\mathbb{N}$. Будем говорить, что сигнатура $\mathfrak{s}$ *примитивна*, если числа, входящие в $\mathfrak{s}$, взаимно просты в совокупности. Сигнатуру $\mathfrak{s}=\{1\}$ будем называть *тривиальной*.

Пусть ξ – разбиение пространства X. Будем говорить, что разбиение ξ *подчинено сигнатуре* $\mathfrak{s}$, если каждый элемент разбиения ξ конечен и его мощность содержится в $\mathfrak{s}$.

Лемма 2. *Пусть T – борелевский автоморфизм сепарабельного метрического пространства (X,ρ). Пусть $\mathfrak{s}=\{h_1,\dots,h_n\}$ – нетривиальная примитивная сигнатура. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие борелевские подмножества $B_1,\dots,B_n\subset X$, что выполнены следующие свойства*:

(1) *башни $\mathcal{R}_{h_i}[B_i]$, $i=1,\dots,n$, полны и попарно дизъюнктны*;
(2) *T является биекцией на $\cup_{i=1}^n\bar{\mathcal{R}}_{h_i}[B_i]$*;
(3) *для любой меры $\mu\in M_{\mathrm{ap}}(X,T)$ выполнены соотношения*

$$\sum_{i=1}^n\mu\Big(\bar{\mathcal{R}}_{h_i}[B_i]\Big)=1,\qquad \sum_{i=1}^n\mu(B_i)<\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать что выполняются неравенства $1\leqslant h_1<\dots<h_n$. Найдем такое натуральное число N, что всякое натуральное число $m\geqslant N$ представимо в виде суммы $m=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_ih_i$ с целыми неотрицательными коэффициентами α_i и дополнительным ограничением $\alpha_1h_1<\varepsilon m$. Рассмотрим множество

$$X_N=\{x\in X\colon T^kx\neq x\quad\text{при}\quad 1\leqslant k\leqslant N\}.$$

Мы хотим найти последовательность борелевских множеств $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, такую, что для каждого j башня $\mathcal{R}_N[U_j]$ полна и $X_N=\cup_jU_j$.

Не умаляя общности можно считать, что метрика ρ ограничена. Рассмотрим новую метрику на X:

$$\widetilde{\rho}(x,y)=\sum_{i=0}^\infty 2^{-i}\rho(T^ix,T^iy),\quad x,y\in X.$$

Этот ряд равномерно сходится, и метрика $\widetilde{\rho}$ сепарабельна на множестве X. Легко понять, что отображение T является липшицевым в этой метрике: $\widetilde{\rho}(Tx,Ty)\leqslant 2\widetilde{\rho}(x,y)$. Для каждой точки $x\in X_N$ точки T^ix, $i=0,\dots,N$, попарно различны, поэтому найдется такое $\delta>0$, что открытые шары $B_{\widetilde{\rho}}(T^ix,2^i\delta)$ в метрике $\widetilde{\rho}$, где $i=0,\dots,N$, попарно не пересекаются. Но тогда сдвиги открытого шара $B_{\widetilde{\rho}}(x,\delta)$ под действием преобразований T^i, $i=0,\dots,N$, попарно не пересекаются. В силу сепарабельности пространства $(X,\widetilde{\rho})$ мы можем представить множество X_N в виде счетного объединения таких шаров. Их мы и назовем U_j, $j \in \mathbb{N}$. Остается лишь показать, что каждый такой открытый шар в метрике $\widetilde{\rho}$ является измеримым по борелевской σ-алгебре, порожденной метрикой ρ. При фиксированном x для каждого i функция $y \mapsto \rho(T^i x, T^i y)$ борелевски измерима как композиция борелевски измеримых отображений. Стало быть, и функция $y \mapsto \widetilde{\rho}(x, y)$ тоже борелевски измерима, откуда следует и измеримость шара в метрике $\widetilde{\rho}$. Итак, искомое семейство U_j построено.

Построим теперь такую последовательность борелевских множеств $\{V_j\}$, что полуорбиты $\mathrm{Orb}_+(V_j)$ попарно дизъюнктны и

$$\bigcup_j \mathrm{Orb}(V_j) = \bigcup_j \mathrm{Orb}(U_j) = X_N.$$

Эту последовательность можно задать рекуррентно: $V_1 = U_1$, и

$$V_j = U_j \setminus \Big(\bigcup_{l=1}^{j-1} \mathrm{Orb}(V_l) \Big), \quad j \geqslant 2.$$

При фиксированном $j \in \mathbb{N}$ пусть $V_{j,k}$ – этаж с номером k в башне $\mathcal{R}[V_j]$. По построению $V_j \subset U_j$, поэтому башня $\mathcal{R}_N[V_j]$ полна. Каждое из множеств V_j представляется в виде счетного объединения:

$$V_j = \widetilde{V}_{j,\infty} \cup \bigcup_{k \geqslant N} \widetilde{V}_{j,k}, \quad \text{где } \widetilde{V}_{j,k} = T^{-k} V_{j,k} \setminus T^{-k-1} V_{j,k+1},$$
$$\widetilde{V}_{j,\infty} = \bigcap_{k \geqslant N} T^{-k} V_{j,k}.$$

Множество $\widetilde{V}_{j,k}$ состоит из тех точек основания башни, над которыми находится ровно k этажей, а множество $\widetilde{V}_{j,\infty}$ – из тех точек, над которыми башня бесконечна; поэтому башни $\mathcal{R}_k[\widetilde{V}_{j,k}]$ и $\mathcal{R}[\widetilde{V}_{j,\infty}]$ полны. Будем называть их элементарными башнями. Каждая элементарная башня имеет высоту как минимум N, поэтому может быть представлена в виде дизъюнктного объединения полных башен высот $h_1, \dots, h_n$; при этом представление может быть выбрано так, что суммарная доля этажей башен высоты h_1 не будет превосходить ε (при этом в разложении элементарных башен бесконечной высоты можно обойтись вообще без башен высоты h_1). Объединив башни одинаковой высоты h_i, $i = 1, \dots, n$, в одну, обозначим ее основание через A_i.

Очевидно, что все множества, используемые в построении, борелевские, а башни $\mathcal{R}_{h_i}[A_i]$, $i = 1, \dots, n$, попарно дизъюнктны. Для меры

$\mu \in M_{\mathrm{ap}}(X,T)$ имеем $\mu(X_N) = 1$. Отметим, что объединение построенных башен совпадает с объединением полуорбит $\mathrm{Orb}_+(V_j)$. Для любого $k \geqslant 1$ и любого j множество $T^{-k}V_j \setminus \mathrm{Orb}_+(V_j)$, очевидно, имеет попарно дизъюнктные образы под действием преобразований T^{lk}, $l \geqslant 1$, поэтому оно имеет меру нуль. Отсюда следует, что

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{R}}_{h_i}[A_i]\Big) = \mu\Big(\bigcup \mathrm{Orb}_+(V_j)\Big) = 1.$$

Из построения очевидно, что для каждой конечной элементарной башни $\mathcal{R}_k[\widetilde{V}_{j,k}]$ выполнено неравенство

$$\mu\Big(\bar{\mathcal{R}}_{h_1}[A_1] \cap \bar{\mathcal{R}}_k[\widetilde{V}_{j,k}]\Big) \leqslant \varepsilon\mu\Big(\bar{\mathcal{R}}_k[\widetilde{V}_{j,k}]\Big),$$

поэтому $\mu\big(\bar{\mathcal{R}}_{h_1}[A_1]\big) \leqslant \varepsilon$. Так как сигнатура $\mathfrak{s}$ не является тривиальной, $h_2 \geqslant 2$. Из того, что все башни $\mathcal{R}_{h_i}[A_i]$, $i = 1, \dots, n$, полны, следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{n} \mu(A_i) \leqslant \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2}\mu\big(\bar{\mathcal{R}}_{h_i}[A_i]\big) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Пусть $A = \cup_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{R}}_{h_i}[A_i]$ – объединение всех построенных башен. Из построения ясно, что $T(A) \subset A$. Положим $B = \cap_{k \geqslant 0} T^{-k}A$ и $B_i = A_i \cap B$, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что множества B_i наследуют свойства множеств A_i, которые мы проверяли ранее, но теперь отображение T является биекцией множества $\cup_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{R}}_{h_i}[B_i]$ на себя. □

3.2. Построение базисной фильтрации с заданной сигнатурой.

Теорема 2. *Пусть $\{\mathfrak{s}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность нетривиальных примитивных сигнатур. Пусть T – борелевский автоморфизм сепарабельного метрического пространства (X, ρ). Тогда найдется метрически универсальное T-инвариантное подмножество $\widehat{X} \subset X$, состоящее из апериодических точек, и базисная борелевская фильтрация $\Xi = \{\xi_k\}_{k \geqslant 0}$ на множестве $\widehat{X}$, такие, что разбиение ξ_k/ξ_{k-1} подчинено сигнатуре $\mathfrak{s}_k$ при всех $k \geqslant 1$.*

Доказательство. Доказательство теоремы основано на итеративном применении леммы 2. Зафиксируем последовательность ε_n, $n \in \mathbb{N}$, положительных чисел, стремящуюся к нулю. Для удобства будем считать, что $(X_1, \rho_1) = (X, \rho)$, $T_1 = T$.

Опишем один шаг построения. Пусть $m \geqslant 1$, и пусть T_m – борелевский автоморфизм сепарабельного метрического пространства (X_m, ρ_m). Пусть $\mathfrak{s}_m = \{h_{1,m}, \ldots, h_{n,m}\}$, где $h_{1,m} < \cdots < h_{n,m}$ и $n = n(m)$. Применим лемму 2 к борелевскому автоморфизму T_m пространства (X_m, ρ_m), сигнатуре $\mathfrak{s}_m$ и числу ε_m. Найдем соответствующий набор борелевских множеств $B_{1,m}, \ldots, B_{n,m}$. Положим $X_{m+1} = \cup_{j=1}^n B_{j,m}$ (объединение оснований башен), $Y_m = \cup_{j=1}^n \bar{\mathcal{R}}_{h_{j,m}}[B_{j,m}] = \mathrm{Orb}_{T_m}(X_{m+1})$ (объединение самих башен). Определим проекцию $\pi_m \colon Y_m \to X_{m+1}$ точек башен на основание:

$$\pi_m(T_m^k x) = x \quad \text{для } x \in B_{j,m}, \quad k = 0, \ldots, h_{j,m} - 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как T_m переводит борелевские множества в борелевские, очевидно, что отображение π_m борелевское. Определим разбиение ν_m на Y_m как разбиение на прообразы точек при проекции π_m. Иными словами, элементы разбиения ν_m – это множества вида $\{T_m^k x \colon k = 0, \ldots, h_{j,m} - 1\}$, $j = 1, \ldots, n$, $x \in B_{j,m}$.

Определим отображение T_{m+1} на X_{m+1} как отображение возвращения: для каждой точки $x \in X_{m+1}$ положим $T_{m+1}(x) = T_m^{r_m(x)} x$, где $r_m(x) = \min\{k \colon k > 0, T_m^k x \in X_{m+1}\}$. Легко понять, что при $j = 1, \ldots, n$ для $x \in B_{j,m}$ выполнено равенство $r_m(x) = h_{j,m}$, так как по построению множество Y_m, объединение башен, инвариантно относительно преобразования T_m. Легко проверить, что T_{m+1} – борелевский автоморфизм сепарабельного метрического пространства (X_{m+1}, ρ_{m+1}), где ρ_{m+1} – сужение метрики ρ_m на X_{m+1}.

Положим

$$\widehat{X} = \cap_{m \geqslant 1} \mathrm{Orb}_T(X_m) \setminus \mathrm{Orb}_T(\cap_{m \geqslant 1} X_m).$$

По индукции по m, где $m \geqslant 1$, легко показать, что для каждой точки $x \in \widehat{X}$ пересечение $\mathrm{Orb}_T(x) \cap X_m$ состоит из одной орбиты под действием преобразования T_m, то есть для каждой точки $y \in \mathrm{Orb}_T(x) \cap X_m$ выполнено равенство $\mathrm{Orb}_T(x) \cap X_m = \mathrm{Orb}_{T_m}(y) \cap X_m$. Отсюда следует, что при $m \geqslant 1$ выполнено равенство $\widehat{X} \cap X_m = \widehat{X} \cap Y_m$, поэтому

$$\pi_m^{-1}\big(X_{m+1} \cap \widehat{X}\big) = Y_m \cap \widehat{X} = X_m \cap \widehat{X}.$$

Для $m \geqslant 1$ определим разбиение ξ_m множества $\widehat{X} = X_1 \cap \widehat{X}$ как разбиение на прообразы точек множества $X_{m+1} \cap \widehat{X}$ под действием отображения $\pi_m \circ \cdots \circ \pi_1$. Ясно, что для каждой точки $x \in X_{m+1} \cap \widehat{X}$ прообраз $\pi_1^{-1} \circ \cdots \circ \pi_m^{-1}(x)$ совпадает с частью $\{T^k x \colon 0 \leqslant k < N\}$

траектории $\mathrm{Orb}_T(x)$, где число N таково, что $T^N x = T_{m+1}x$. Легко понять, что разбиение ξ_{m+1} является более крупным, чем ξ_m, и что фактор разбиения ξ_{m+1} по ξ_m изоморфен сужению разбиения ν_{m+1} на $Y_{m+1} \cap \widehat{X}$ и поэтому подчинен сигнатуре $\mathfrak{s}_{m+1}$.

Проверим, что множество $\widehat{X}$ метрически универсально. Для меры $\mu \in M_{\mathrm{ap}}(X,T)$ пусть μ_m, $m \geqslant 1$, есть сужение меры μ на множество X_m. Очевидно, что мера μ_m инвариантна относительно преобразования T_m. Точки из X_m, периодические для T_m, являются периодическими и для T, поэтому меры μ_m апериодические. Лемма 2 гарантирует, что $\mu_m(X_m \setminus Y_m) = 0$. Отсюда следует, что

$$\mu(\mathrm{Orb}_T(X_m) \setminus \mathrm{Orb}_T(X_{m+1})) = 0,$$

откуда по индукции легко показать, что $\mu(\mathrm{Orb}_T(X_m)) = 1$ при каждом m. Лемма 2 гарантирует, что $\mu(X_{m+1}) < (\frac{1}{2} + \varepsilon_m)\mu(X_m)$, поэтому $\mu(X_m) \to 0$, откуда следует, что $\mu(\mathrm{Orb}_T(\cap_{m\geqslant 1} X_m)) = 0$. Таким образом, $\mu(\widehat{X}) = 1$.

Нам осталось проверить лишь условие базисности построенной фильтрации. Достаточно показать, что при $x \in \widehat{X}$ точки x и $T^{-1}x$ лежат в одном элементе разбиения ξ_m при достаточно большом m. Но для каждого m точки, для которых x и $T^{-1}x$ не лежат в одном элементе разбиения ξ_m, – это в точности точки множества $X_{m+1} \cap \widehat{X}$. Эти множества вложены, и их пересечение по всем $m \geqslant 1$ пусто. □

§4. Униадический граф

Напомним конструкцию униадического графа – универсального полудиадического графа (см. [6]). На нулевом этаже графа поместим одну вершину. Далее, имея множество V_n вершин на этаже n, определим множество V_{n+1} вершин на этаже $n+1$ формулой $V_{n+1} = V_n^2 \sqcup \mathrm{copy}(V_n)$. Каждую вершину w из множества V_n^2 мы понимаем как упорядоченную пару (u, v) вершин этажа n и проводим ребра из u и v в w, задавая на них естественный порядок: ребро (v, w) больше ребра (u, w). Каждую вершину w множества $\mathrm{copy}(V_n)$ мы понимаем как копию некоторой вершины u этажа n и проводим единственное ребро из вершины u в вершину w. Построенный таким образом граф с адической структурой будем называть *униадическим* и обозначать UA (см. рис. 2). Название "униадический" происходит от слов "универсальный" и "полудиадический", где "полудиадический" означает, что в каждую вершину этажа n, где $n \geqslant 1$, приходит одно или два ребра из вершин этажа $n-1$. Предшественниками этого графа являются диадические графы: *граф неупорядоченных пар* (см. [5]) и *граф упорядоченных пар* (см. [3]); каждый из них представляет значительный интерес.

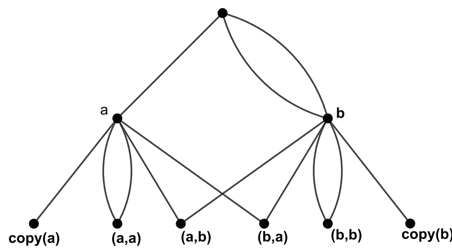

Рис. 2. Несколько первых этажей униадического графа UA.

Напомним две конструкции, применяемые к градуированным графам: индуцирование и телескопирование.

Определение 6. Пусть Γ – градуированный граф, а $\{k_n\}_{n\geqslant 0}$ – строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, причем $k_0 = 0$. Определим *телескопирование* графа Γ следующим образом. На этаже n нового графа поместим вершины, соответствующие вершинам этажа k_n графа Γ. Между вершинами этажей n и $n+1$ проведем столько ребер, сколько путей было в графе Γ между соответствующими вершинами. Адический порядок на ребрах в новом графе задается адическим порядком на соответствующих этим ребрам путях в исходном графе.

Легко понять, что адическое преобразование на пространстве путей исходного графа и его телескопирования изоморфны.

Определение 7. Будем говорить, что градуированный граф Γ_1 является *индуцированным подграфом* градуированного графа Γ, если множества вершин и ребер графа Γ_1 являются подмножествами множеств вершин и ребер графа Γ соответственно и, кроме того, если v – вершина графа Γ_1, то в Γ_1 содержатся все ребра графа Γ, приходящие в вершину v из вершин предыдущего этажа. Порядок на ребрах при этом наследуется естественным образом.

Если Γ_1 – индуцированный подграф графа Γ, то пространство $\mathcal{T}(\Gamma_1)$ его путей является подмножеством пространства $\mathcal{T}(\Gamma)$ путей графа Γ, инвариантным относительно адического преобразования в графе Γ.

Для доказательства основной теоремы мы будем использовать следующее предложение, доказанное в работе [6].

Предложение 3. *Пусть* Γ *– градуированный граф с адической структурой, в каждую вершину которого, кроме вершины нулевого этажа, входит сверху как минимум два ребра. Тогда найдется некоторый индуцированный подграф графа* UA, *телескопирование которого изоморфно графу* Γ.

§5. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы нам остается воспользоваться полученными результатами. Пусть T – апериодический борелевский автоморфизм сепарабельного метрического пространства X. Выберем следующую последовательность сигнатур: $\mathfrak{s}_k = \{2, 3\}$ при $k \geqslant 1$. Далее, применив теорему 2, найдем метрически универсальное подмножество $\widetilde{X} \subset X$ и подчиненную сигнатуре базисную фильтрацию $\Xi = \{\xi_n\}_{n \geqslant 0}$ на $\widetilde{X}$. Используя предложение 1, раскрасим фильтрацию так, чтобы сделать ее комбинаторно определенной. Предложение 2 показывает, что раскрашенная базисная фильтрация Ξ изоморфна хвостовой фильтрации градуированного графа $\Gamma = \Gamma[\Xi]$ с адическим сдвигом. Отметим, что в каждую вершину графа Γ, кроме вершины нулевого этажа, входит либо два, либо три ребра сверху: это моментально следует из конструкции графа и того факта, что фильтрация Ξ была подчинена выбранной сигнатуре. Остается применить последний ингредиент доказательства – предложение 3. Оно позволяет эквивариантно вложить пространство путей графа $\Gamma[\Xi]$ в пространство путей униадического графа.

Список литературы

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
2. А. М. Вершик, *Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
3. А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, *Универсальная адическая аппроксимация, инвариантные меры и масштабированная энтропия.* — Изв. РАН. Сер. матем. **81**, вып. 4 (2017), 68–107.
4. E. Glasner, B. Weiss, *On the interplay between measurable and topological dynamics.* — In: B. Hasselblatt, A. Katok (eds.), Handbook of Dynamical Systems, Vol. 1B, Elsevier, Amsterdam, 2006, pp. 597–648.

5. А. М. Вершик, *Теория фильтраций подалгебр, стандартность и независимость*. — Успехи мат. наук **72**, вып. 2 (434) (2017), 67–146.
6. А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, *Комбинаторные инварианты метрических фильтраций и автоморфизмов; универсальный адический граф*. — Функц. анал. и прил. (2018).
7. A. Kechris, A. Louveau, *The classification of hypersmooth Borel equivalence relations*. — J. Amer. Math. Soc. **10**, No. 1 (1997), 215–242.
8. V. Kanovei, *Borel Equivalence Relations. Structure and Classification*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
9. S. Thomas, *A descriptive view of unitary group representations*. — J. European Math. Soc. **17** (2015), 1761–1787.
10. K. Schmidt, *Unique ergodicity for quasi-invariant measures*. — Math. Z. **167** (1979), 169–172.

Vershik A. M., Zatitskii P. B. On a universal Borel adic space.

We prove that the so-called uniadic graph and its adic automorphism are Borel universal, i.e., every aperiodic Borel automorphism is isomorphic to the restriction of this automorphism to a subset invariant under the adic transformation, the isomorphism being defined on a universal (with respect to the measure) set. We develop the concept of basic filtrations and combinatorial definiteness of automorphisms suggested in our previous paper.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 26 сентября 2018 г.

С.-Петербургский государственный
университет;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: pavelz@pdmi.ras.ru