Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 468, 2018 г.

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец

КВАНТОВЫЕ МАРКОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ И КВАНТОВЫЕ СКРЫТЫЕ МАРКОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ

В [1] мы определили квантовые марковские состояния. Здесь мы напомним это определение и приведем доказательства утверждений из [1] (которые даны там без доказательств).

Мы дадим определение квантового скрытого марковского состояния, порождаемого функцией от квантового марковского процесса, и покажем, как оно связано с другими определениями таких состояний.

Наши определения работают для квантовых марковских полей на Z^N и на графах. Мы разбираем пример с деревом Кэли.

§1. Квантовые марковские состояния

Пусть M_d – алгебра комплексных матриц порядка d. Положим $M_{d^n} = \bigotimes\limits_{j=1}^{n} (M_d)_j$. Алгебра M_{d^n} вкладывается в $M_{d^{n+1}}$ естественным образом: матрица $F \in M_{d^n}$ переходит в $F \otimes \mathrm{Id} \in M_{d^{n+1}}$.

Индуктивный предел последовательности M_{d^n}, пополненный относительно стандартной C^*-нормы, обозначим через Ω_d.

Состояние ρ – это непрерывный положительный функционал на Ω_d с $\rho(\mathrm{Id}) = 1$.

Ограничение состояния ρ на M_{d^n} обозначим через ρ_n. Этот функционал на M_{d^n} имеет вид

$$\rho_n(F) = \mathrm{Tr}(F\rho_n),$$

где матрица плотности ρ_n – неотрицательно определенная матрица и $\mathrm{Tr}(\rho_n) = 1$.

Матричные элементы матрицы ρ_n в базисе $\{e_{x_1} \otimes \cdots \otimes e_{x_n}\}$, где $x_i \in \{1, 2, \ldots, d\}, i = 1, \ldots, n$, а e_i – стандартный базис в C^d, обозначим через $\rho(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n)$.

Ключевые слова: скрытые марковские цепи, квантовые марковские состояния, квантовые скрытые марковские состояния, конечно коррелированные состояния, дерево Кэли.

Пусть $A \in M_{d^2} = M_d \otimes M_d$ – ненулевая неотрицательно определенная матрица с матричными элементами $a(x_1x_2, y_1y_2)$. Пусть B – матрица с матричными элементами $b(x_1, x_2) = a(x_1x_2, x_1x_2)$. Тогда B – неотрицательная матрица, и пусть ее спектральный радиус $\lambda > 0$.

По теореме Перрона–Фробениуса существуют неотрицательные вектор-столбец r и вектор-строка l, такие, что $lr = 1$, $Br = \lambda r$, $lB = \lambda l$.

Введем две матрицы – Q^+ с матричными элементами $q^+(i,j)$ и Q^- с матричными элементами $q^-(i,j)$:

$$q^+(i,j) = \sum_{k=1}^{d} a(ik, jk)r(k),$$
$$q^-(i,j) = \sum_{k=1}^{d} l(k)a(k,i)a(k,j).$$

Теперь определим квантовое марковское состояние на Ω_d формулами

$$\rho_1(x_1, y_1) = q^-(x_1, y_1)q^+(x_1, y_1),$$

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n | y_1, \dots, y_n) = \frac{q^-(x_1, y_1) \prod_{i=1}^{n-1} a(x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}) q^+(x_n, y_n)}{\lambda^{n-1}}.$$

Корректность этого определения будет доказана ниже.

Если σ_d – стандартный эндоморфизм сдвига на Ω_d, то определенное нами состояние инвариантно, т.е.

$$\rho(\sigma_d F) = \rho(F).$$

Если же заменить Q^- на неотрицательно определенную матрицу Q с матричными элементами $q(i,j)$ с условием $\sum_{j=1}^{d} q(j,j)r(j) = 1$, то соответствующее состояние ρ можно назвать квантовым марковским состоянием с начальной матрицей плотности ρ_1, где

$$\rho_1(i,j) = q(i,j)q^+(i,j).$$

Такое состояние, вообще говоря, не инвариантно, если $Q \neq Q^-$.

Теперь докажем корректность нашего определения.

Утверждение 1. Матрица ρ_n неотрицательно определена.

Доказательство. Докажем сначала, что матрицы Q^+ и Q^- неотрицательно определены. Напомним, что

$$\begin{aligned} q^+(i,j) &= \sum_{k=1}^{d} a(ik,jk)r(k) = \sum_{k,l} a(ik,jl)r(k)\delta(k,l) \\ &= \sum_{k,l} a(ik,jl)\sqrt{r(k)}\delta(k,l)\sqrt{r(l)}. \end{aligned}$$

Так как A – неотрицательно определенная матрица,

$$a(ik,jl) = E(\xi_{ik}\overline{\xi}_{jl})$$

для некоторой системы случайных величин ξ_{ij}, $i = 1,\dots,d$, $j = 1,\dots,d$. Кроме того,

$$\sqrt{r(k)}\delta(k,l)\sqrt{r(l)} = E(\eta_k\overline{\eta}_l),$$

где $\eta_1,\dots,\eta_d$ – независимые случайные величины, причем эта система случайных величин не зависит от системы случайных величин ξ_{ij}. Имеем

$$\begin{aligned} q^+(i,j) &= \sum_{k,l} a(ik,jl)\sqrt{r(k)}\delta(k,l)\sqrt{r(l)} = \sum_{k,l} E(\xi_{ik,\xi_{jl}})E(\eta_k\eta_l) \\ &= \sum_{k,l} E(\xi_{ik}\xi_{jl}\eta_k\eta_l) = E\Big(\sum_k \xi_{ik}\eta_k\Big)\Big(\sum_l \xi_{jl}\eta_l\Big) = E(\widetilde{\xi_i}\widetilde{\xi_j}), \end{aligned}$$

где $\widetilde{\xi_i} = \sum\limits_k \xi_{ik}\eta_k$. Неотрицательная определенность матрицы Q^+ доказана. Точно так же доказывается неотрицательная определенность матрицы Q^-.

Рассмотрим независимые системы случайных величин

$$\begin{aligned} &(\eta_1^-,\dots,\eta_d^-),\ (\eta_1^+,\dots,\eta_d^+), \\ &(\xi_{ij}^1, i = 1,\dots,d,\ j = 1,\dots,d),\ (\xi_{ij}^2, i = 1,\dots,d,\ j = 1,\dots,d), \\ &(\xi_{ij}^n, i = 1,\dots,d,\ j = 1,\dots,d)), \end{aligned}$$

для которых

$$q^-(i,j) = E(\eta_i^-\overline{\eta}_j^-),\ q^+(i,j) = E(\eta_i^+\overline{\eta}_j^+),\ a(ij,kl) = E(\xi_{ij}^t\overline{\xi}_{kl}^t).$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&\lambda^{n-1}\rho_n(x_1,\dots,x_n)\\
&\qquad = E(\eta^-_{x_1}\overline{\eta}^-_{y_1})E(\xi^1_{x_1x_2}\overline{\xi}^1_{y_1y_2})\dots E(\xi^1_{x_{n-1}x_n}\overline{\xi}^1_{y_{n-1}y_n})E(\eta^+_{x_n}\overline{\eta}^+_{y_n})\\
&\qquad = E(\eta^-_{x_1}\xi^1_{x_1x_2}\dots\xi^1_{x_{n-1}x_n}\eta_{x^+_n})\overline{(\eta^-_{y_1}\xi^1_{y_1y_2}\dots\xi^1_{y_{n-1}y_n}\eta_{y^+_n})}\\
&\qquad = E(\zeta_{x_1\dots x_n}\overline{\zeta}_{y_1\dots y_n}).
\end{aligned}
$$

Здесь $\zeta_{x_1\dots x_n} = \eta^-_{x_1}\xi^1_{x_1x_2}\dots\xi^1_{x_{n-1},x_n}\eta^+_{x_n}$. Неотрицательная определенность матрицы ρ_n доказана.

Докажем, что $\mathrm{Tr}(\rho_n) = 1$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\rho_n) &= \frac{1}{\lambda^{n-1}}\sum_{x_1,\dots,x_n} q^-(x_1,x_1)b(x_1,x_2)b(x_2,x_3)\dots b(x_{n-1},x_n)q^+(x_n,x_n)\\
&= \frac{1}{\lambda^{n-1}}\sum_{x_1,x_n} l(x_1)b^{(n-1)}(x_1,x_n)r(x_n)\\
&= \frac{1}{\lambda^{n-1}}\lambda^{n-1}\sum_{x_1} l(x_1)r(x_1) = 1.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$B^{n-1} = (b^{(n-1)}(i,j)),$$

где $b(i,j) = a(ij,ij)$. □

Утверждение 2 (условие согласованности)**.** Ограничение состояния ρ_{n+1} на алгебру $\otimes_{j=1}^n(M_d)_j$ совпадает с состоянием ρ_n.

Доказательство. Ограничение состояния ρ_{n+1} на $\otimes_{j=1}^n(M_d)_j$ задается матрицей плотности с матричными элементами

$$
\begin{aligned}
&\rho'_n(x_1\dots x_n, y_1,\dots,y_n) = \sum_{x_{n+1}} \rho_{n+1}(x_1\dots x_n x_{n+1}, y_1,\dots,y_n x_{n+1})\\
&\quad = \frac{1}{\lambda^{n-1}} q^-(x_1,y_1)\prod_{i=1}^{n-1} a(x_ix_{i+1},y_iy_{i+1})\\
&\qquad \times \Big(\frac{1}{\lambda}\sum_{x_{n+1}} a(x_nx_{n+1},y_ny_{n+1})\Big)q^+(x_{n+1},x_{n+1})\\
&\quad = \frac{1}{\lambda^{n-1}} q^-(x_1,y_1)\prod_{i=1}^{n-1} a(x_ix_{i+1},y_iy_{i+1})\frac{1}{\lambda}\lambda q^+(x_n,y_n)\\
&\quad = \rho_n(x_1\dots x_n, y_1\dots y_n).
\end{aligned}
$$

□

Утверждение 3 (инвариантность состояния)**.**

$$\rho(\sigma_d F) = \rho(F).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\begin{aligned}\rho'_n(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) &= \sum_{x_0} \rho_{n+1}(x_0 x_1 \dots x_n, x_0 y_1 \dots y_n) \\ &= \rho_n(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n).\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\rho'(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) \\ &= \Big(\frac{1}{\lambda}\sum_{x_0} q^-(x_0, x_0) a(x_0 x_1, y_0 y_1)\Big)\frac{1}{\lambda^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1} a(x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}) q^+(x_n, y_n) \\ &= q^-(x_1, y_1)\rho(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n).\end{aligned}$$

Рассмотрим $T \in M_d \otimes M_d$ с матричными элементами $t(ij, kl) = a(ik, jl)$.

Для $F \in M_d$, $G \in M_d$ обозначим через $F \star G$ адамаровскую операцию поэлементного умножения матриц F и G. Заметим, что если F и G – неотрицательно определенные матрицы, то $F \star G$ – тоже неотрицательно определенная матрица.

Поскольку A – неотрицательно определенная матрица, по теореме Чоя–Ямилковского ([4, 5]) матрица T задает вполне положительное отображение алгебры M_d в себя: $F \to TF$, где для $F = (f(i,j))$

$$(TF)(i,j) = \sum_{kl} t(ij, kl) f(k,l).$$

Определим отображение T_F алгебры M_d в себя формулой

$$T_F(G) = T(F^T \star G),$$

где $F^T = (f(j,i))$.

Возьмем матрицу $F \in M_d$. Обозначим через $\widetilde{F}_k \in M_{d^n}$ матрицу $\mathrm{Id} \otimes \dots \otimes \mathrm{Id} \otimes F \otimes \mathrm{Id} \dots \otimes \mathrm{Id}$, где F стоит на k-м месте. $\square$

Утверждение 4.

$$\rho(\widetilde{F}_1, \dots, \widetilde{F}_n) = \frac{\mathrm{Tr}(F_1(Q^- \star T_{F_1} T_{F_2} \dots T_{F_n} Q^+))}{\lambda^{n-1}}, \quad n \geqslant 2.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\rho(\widetilde{F}_1,\ldots,\widetilde{F}_n)\\
&=\sum_{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n} F_1^T(x_1,y_1)\ldots F_n^T(x_n,y_n)q^-(x_1,y_1)\\
&\times\frac{1}{\lambda^{n-1}}\prod_{i=1}^{n} a(x_ix_{i+1},y_iy_{i+1})q^+(x_n,y_n)\\
&=\frac{\sum\limits_{x_1,y_1} F_1^T(x_1,y_1)(q^-(x_1,y_1)T_{F_2}\ldots T_{F_n})Q^+(x_1,y_1)}{\lambda^{n-1}}\\
&=\frac{\mathrm{Tr}(F_1Q^-\star T_{F_2}\ldots T_{F_n}Q^+)}{\lambda^{n-1}}.
\end{aligned}$$

□

§2. Квантовые скрытые марковские состояния

Пусть

$$\Omega_{d,D}=\otimes_{k=1}^{\infty}(M_d\otimes M_D)_k,\quad M_{d^nD^n}=\otimes_{k=1}^{n}(M_d\otimes M_D)_k.$$

Пусть $\{\widetilde{\rho}_n\}$ – последовательность матриц плотности $\widetilde{\rho}_n$ для квантового марковского состояния $\widetilde{\rho}$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\rho}(x_1\alpha_1\ldots x_n\alpha_n,y_1\beta_1\ldots y_n\beta_n)\\
&=\frac{q^-(x_1\alpha_1,y_1\alpha_1)\prod_{i=1}^{n-1}a(x_i\alpha_ix_{i+1}\alpha_{i+1},y_i\beta_iy_{i+1}\beta_{i+1})q^+(x_n\alpha_n,y_n\beta_n)}{\lambda^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Заметим, что C^*-алгебра Ω_d вложена в $\Omega_{d,D}$: элементу $F\in\Omega_d$ отвечает элемент $\widetilde{F}=F\otimes\mathrm{Id}$, где Id – единица в $\Omega_D=\otimes_{k=1}^{\infty}(M_D)_k$.

Определение. Квантовое скрытое марковское состояние ρ на Ω_d – это ограничение квантового марковского состояния на Ω_d, т.е.

$$\rho(F)=\widetilde{\rho}(\widetilde{F}).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\rho_n(x_1\ldots x_n,y_1\ldots y_n)\\
&=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\widetilde{\rho}(x_1\alpha_1\ldots x_n\alpha_n,y_1\alpha_1\ldots y_n\alpha_n)=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\widetilde{q}^-(x_1\alpha_1,y_1\alpha_1)\\
&\times\prod_{i=1}^{n-1}a(x_i\alpha_ix_{i+1}\alpha_{i+1},y_i\alpha_iy_{i+1}\alpha_{i+1})\widetilde{q}^+(x_n\alpha_n,y_n\alpha_n)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha_1,\alpha_n} \widetilde{q}^-(x_1\alpha_1 y_1\alpha_1) A(x_1x_2, y_1y_2)\ldots A(x_{n-1}x_n, y_{n-1}y_n) q^+(x_n, y_n)$$
$$= \frac{q^-(x_1, y_1)A(x_1x_2, y_1y_2)\ldots A(x_{n-1}x_n, y_{n-1}y_n)q^+(x_n, y_n)}{\lambda^{n-1}},$$

где $q^-(x_1, y_1) = (\widetilde{q}(x_1\alpha_j, y_1\alpha_j))$ – строчка длины D, а $q^+(x_n, y_n) = (q^+(x_n\alpha_n, y_n, \alpha_n))$ – столбец длины D. Матрица $A_{ij,kl}$ – это матрица с элементами $A = (a(i\alpha_1 j\alpha_2, k\alpha_1 l\alpha_2))$

Пример из [1]. . *Пусть* $d = 3, D = 2$ *и*

$$a(x_1\alpha_1 x_2\alpha_2, y_1\beta_1 y_2\beta_2) = v_{x_2}(\alpha_1, \alpha_2) v_{y_2}(\beta_1\beta_2),$$

где

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A_{ij,kl} = A_{jl} = (v_j(\alpha_1\alpha_2)v_l(\alpha_1\alpha_2)).$$

Это означает, что если $j \neq l$, то $A_{ij} = 0$, а если $j = l$, то

$$A_i = A_j = (v_j^2(\alpha_1\alpha_2)).$$

В результате получаем, что ρ_n – диагональная матрица, $q^- = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, $q^+ = (1, 1)$.

Получаем классическое состояние ρ на Ω_3:

$$\rho_n(x_1\ldots x_n, x_1\ldots x_n) = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) A_{x_1}\ldots A_{x_n}(1, 1)^T,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cos^2 t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} \sin^2 t & 0 \\ 0 & \sin^2 t \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos^2 t & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} \sin^2 t & \cos^2 t \\ \cos^2 t & \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Это состояние отвечает скрытой марковской цепи. Конечно, такой результат получился при очень специальном выборе матриц v_1, v_2, v_3.

Покажем, что конечно коррелированные состояния (см. [2]) являются квантовыми скрытыми марковскими состояниями.

Напомним определение конечно коррелированных состояний на Ω_d. Пусть $\widehat{T}$ – матрица с блочными матричными элементами

$$t_{xy}(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2), \quad x, y \in \{1, 2, \dots, d\},\ \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \{1, 2, \dots, D\}.$$

Пусть $\widehat{T}$ – матрица вполне положительного отображения

$$\widehat{T} : M_d \otimes M_D \to M_D,$$

т.е.

$$\widehat{T}(F \otimes B) = \sum_{xy} F(x, y) t_{xy},$$

$$t_{xy} = (t_{xy}(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)) \in M_D \otimes M_D$$

при фиксированных x, y.

Обозначим через $\widehat{T}_F : M_D \to M_d$ следующее отображение:

$$B \to \widehat{T}(F \otimes B), \quad B \in M_D, \quad F \in M_d.$$

Потребуем, чтобы

$$\widehat{T}_{\mathrm{Id}}(q^+) = q^+, \quad \mathrm{Tr}(q^- \widehat{T}_{\mathrm{Id}} B) = \mathrm{Tr}(q^- B q^+)$$

для всех $B \in M_D$, где $q^+,\ q^-$ – неотрицательно определенные матрицы из M_D и $\mathrm{Tr}(q^+ q^-) = 1$.

Состояние $\widehat{\rho}$ на Ω_d называется конечно коррелированным состоянием, если

$$\widehat{\rho}(F_1 \otimes F_2 \otimes \dots \otimes F_n) = \mathrm{Tr}(\widehat{q^-} \widehat{T}_{F_1} \widehat{T}_{F_2} \dots \widehat{T}_{F_n} \widehat{q}^+).$$

Из этого определения следует, что

$$\widehat{\rho}_n(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = \mathrm{Tr}(\widehat{q^-} t_{y_1 x_1} \dots t_{y_n x_n} \widehat{q}^+).$$

Заметим, что если t_{xy} – матрицы, $\widehat{q}^+$ – столбец, $(\widehat{q}^-)^T$ – строка и мы запишем формулу в виде

$$\widehat{\rho}_n(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = (\widehat{q}^-)^T t_{y_1 x_1} \dots t_{y_n x_n} \widehat{q}^+,$$

то мы получим полный аналог формулы для классического случая скрытых марковских цепей.

Укажем связь квантовых скрытых марковских состояний и конечно коррелированных состояний, определенных в [2].

Положим $\Omega_{d,D^2} = \otimes_{k=1}^{\infty}(M_d \otimes M_D \otimes M_D)_k$ и рассмотрим квантовое марковское состояние $\widetilde{\rho}$ на Ω_{d,D^2}, заданное неотрицательно определенной матрицей

$$\widetilde{A} \in (M_d \otimes (M_D \otimes M_D)) \otimes (M_d \otimes (M_D \otimes M_D))$$

с матричными элементами

$$\widetilde{a}(x_1\alpha_1\alpha_1'x_2\alpha_2\alpha_2', y_1\beta_1\beta_1'y_2\beta_2\beta_2') = \widetilde{t}(x_1\alpha_1\alpha_1'y_1\beta_1\beta_1', x_2\alpha_2\alpha_2'y_2\beta_2\beta_2')$$

и матрицами $(\widetilde{q}^{+}(x\alpha\alpha', y\beta\beta'))$, $(\overline{\widetilde{q}^{+}(x\alpha\alpha', y\beta\beta')})$.

Состояние $\widetilde{\rho}_*(F) = \rho(\overline{F})$ (черта означает операцию комплексного сопряжения) описывается матрицами плотности $\overline{\rho}_n$ и тоже является квантовым марковским состоянием.

Рассмотрим ограничение $\rho = \widetilde{\rho}|\Omega_d$ состояния $\widetilde{\rho}$ на подалгебру Ω_d. Матричные элементы матрицы плотности ρ_n имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho_n(x_1\dots x_n, y_1\dots y_n) = &\sum_{\alpha_1,\alpha_1',\dots,\alpha_n,\alpha_n'} \widetilde{q}^{-}(x_1\alpha_1\alpha_1', y_1\alpha_1\alpha_1') \\
&\times \prod_{i=1}^{n-1} \widetilde{t}(x_i\alpha_i\alpha_i'y_i\alpha_i\alpha_i', x_{i+1}\alpha_{i+1}\alpha_{i+1}', y_{i+1}\alpha_{i+1}\alpha_{i+1}') \\
&\quad \times \widetilde{q}^{+}(x_n\alpha_n\alpha_n', y_n\alpha_n\alpha_n') \\
&= \sum_{\alpha_1,\alpha_1',\dots,\alpha_n,\alpha_n'} q^{-}_{x_1,y_1}(\alpha_1\alpha_1') \prod_{i=1}^{n-1} t_{x_iy_i,x_{i+1}y_{i+1}}(\alpha_i,\alpha_i',\alpha_{i+1},\alpha_{i+1}') \\
&\quad \times q^{+}(x_ny_n(\alpha_n\alpha_n')) \\
&= \sum_{\alpha_1,\alpha_1',\alpha_n,\alpha_n'} q^{-}_{x_1,y_1}(\alpha_1,\alpha_1') \prod_{i=1}^{n-1} t_{x_iy_i,x_{i+1}y_{i+1}}(\alpha_1',\alpha_n') q^{+}_{x_ny_n}(\alpha_n,\alpha_n') \\
&= \mathrm{Tr}(Q^{-}_{x_1y_1} t_{x_1y_1,x_2y_2}\dots t_{x_{n-1}y_{n-1},x_ny_n} Q^{+}_{x_ny_n}).
\end{aligned}$$

Здесь $Q^{-}_{x_1y_1} = (q^{-}_{x_1y_1})^T$, $Q^{+}_{x_ny_n} = (q^{+}_{x_ny_n})$.

Если матричные элементы $t_{x_1y_1,x_2y_2}$ не зависят от x_1y_1, то существуют неотрицательно определенные матрицы $Q^-, Q^+ \in M_D$, такие, что

$$(Q^-)^T t_{x_1y_1} = Q^{-}_{x_1y_1}, \quad Q^{+}_{x_1y_1} = Q^+,$$

т.е.

$$\rho_n(x_1\dots x_n, y_1\dots y_n) = (Q^-)^T t_{x_1y_1}\dots t_{x_ny_n} Q^+.$$

Следовательно, если $\widetilde{\rho}_*(F) = \widetilde{\rho}(\overline{F})$, то ограничение квантового марковского состояния $\widetilde{\rho}_*$ на Ω_d совпадает с конечно коррелированным состоянием $\widehat{\rho}$. Полученная нами формула

$$\rho_n(x_1\dots x_n, y_1\dots y_n) = (Q^{-}_{x_1y_1})^T t_{x_1y_1,x_2y_2}\dots t_{x_{n-1}y_{n-1},x_ny_n} Q^{+}_{x_ny_n}$$

аналогична формуле для скрытой марковской цепи (см. [3]).

§3. Квантовые марковские поля, квантовые скрытые марковские поля. Пример с деревом Кэли

Пусть имеется счетный локально конечный граф Γ и возрастающая цепочка подграфов Γ_n, такая, что для любой вершины существует такое n, что Γ_n содержит эту вершину.

Пусть для вершины $\gamma \in \Gamma$ множество $v(\gamma)$ состоит из γ и всех ее соседей, т.е. вершин γ', таких, что (γ, γ') – ребро графа Γ.

Положим $\Omega(\Gamma) = \otimes_{\gamma\in\Gamma}(M_d)_\gamma$ и для каждой вершины γ зададим неотрицательно определенную матрицу $A \in \otimes_{j\in v(\gamma)}(M_d)_j$ с элементами $a(x|v(\gamma),\, y|v(\gamma))$, где $x(\,\cdot\,), y(\,\cdot\,)$ – функции на вершинах графа Γ со значениями в $\{1,\dots,d\}$.

Пусть Λ_n – множество вершин графа Γ_n, а $\partial\Lambda_n$ – граница множества Λ_n.

Теперь определим матричные элементы матрицы плотности ρ_n на $\otimes_{\gamma\in\Lambda_n}(M_d)_\gamma$ формулой

$$\rho_n(x(\gamma)|_{\Lambda_n}, y(\gamma)|_{\Lambda_n}) = c_n\Big(\prod_{\gamma\in\Lambda_{n-1}} a(x(\gamma)|v(\gamma))\widehat{q}_n(x(\gamma)|_{\partial\Lambda_n}, y(\gamma)|_{\partial\Lambda_n})\widehat{q}(x(e)y(e))\Big),$$

где $\widehat{q}_n$ – элементы неотрицательно определенной матрицы из алгебры $\otimes_{\gamma\in\partial\Lambda_n}(M_d)_\gamma$. Элементы $\widehat{q}_n$ задают граничные условия. Слабые пределы состояний ρ_n должны давать квантовые марковские поля.

Другая возможность, которую мы использовали для одномерного случая, – это требование согласованности матриц ρ_n. Заметим, что теперь ясно, как определить квантовые скрытые марковские поля. Ясно также, как определить квантовые марковские состояния любого порядка аналогично классическому случаю.

Пример с деревом Кэли. *Дерево Кэли – это граф Кэли для свободной полугруппы с единицей* e, *порожденной образующими* $\{g_1,\dots,g_m\}$. *В этом случае*

$$\Lambda_n = \{\gamma : \gamma \in \bigcup_{i_1,\dots i_k} eg_{i_1}\dots g_{i_k},\ k \leqslant n\}, \quad \Lambda_0 = e,$$

а $\partial\Lambda_n$ *–* n*-й уровень дерева* Γ.

Возьмем неотрицательно определенную матрицу $q \in M_d$ и положим

$$\widehat{q}_n(x(\gamma)|_{\partial\Lambda_n}), y(\gamma)|_{\partial\Lambda_n}) = \prod_{\gamma\in\partial\Lambda_n} q(x(\gamma), y(\gamma)),$$

$q(x(e), y(e)) = q$.

Условия согласованности приводят к уравнению для

$$r(i) = q(i, i), \quad i = 1, \dots, d.$$

Положим $b(i, j_1 \dots j_m) = a(ij_1 \dots j_m, ij_1 \dots j_m) \geqslant 0$. Уравнение имеет вид

$$\sum_{j_1, \dots, j_m} b(i, j_1 j_2 \dots j_m) r(j_1) \dots r(j_m) = \lambda r(i), \quad \lambda > 0, \quad \sum_i r(i) = 1.$$

Тогда $q(i, j)$ задается формулой

$$q(i, j) = \sum_{j_1, \dots, j_m} a(ij_1 \dots j_m, jj_1 \dots j_m) r(j_1) r(j_2) \dots r(j_m).$$

Список литературы

1. З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, *Замечания о квантовых марковских состояниях.* — Функц. анал. и его прил. **49**, вып. 3 (2015), 60–65.
2. M. Fannes, B. Nachtergaele, R. F. Werner, *Finitely correlated states of quantum spin chains.* — Comm. Math. Phys. **144** (1992), 443–490.
3. З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, *Софические меры и марковские цепи.* —- Зап. научн. семин. ПОМИ **326** (2006), 28–47.
4. A. Jamiolkowski, *Linear transformations which preserve trace and positive semidefinitness of operators.* — Rep. Math. Phys. **3** (1972), 275–278.
5. M. D. Choi, *Completely positive linear maps on complex matrices.* — Linear Algebra Appl. **10** (1975), 285–290.

Bezhaeva Z. I., Oseledets V. I. Quantum Markov states and quantum hidden Markov states.

The present article is a continuation of our previous paper “Remarks on quantum Markov states” (Funct. Anal. Appl. 49, No. 3 (2015), 205–209). We prove some propositions from that paper and define quantum Markov states and quantum hidden Markov states. Some connections are established with other definitions of these notions. We consider such states for lattices and graphs. We also consider an example with the Cayley tree.

Московский
государственный университет
им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: oseled@gmail.com

Поступило 30 июля 2018 г.