Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

Н. А. Широков

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ В ТЕОРЕМЕ ОБ УПОЛОВИНИВАНИИ ГЛАДКОСТИ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ В ШАРЕ

С. В. Кисляковым был задан вопрос об аналоге теоремы В. П. Хавина–Ф. А. Шамояна–Л. Карлесона–Й. Якобса об уполовинивании гладкости голоморфной в шаре пространства $\mathbb{C}^n$ функции по сравнению с гладкостью ее модуля на границе. Положительный ответ был получен в работе автора [1], там же был анонсирован результат о неулучшаемости оценки. В настоящей работе будет приведено доказательство этого факта.

Пусть $\mathbb{B}^n$ – открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, S^n – единичная сфера в $\mathbb{C}^n$, $\bar{\mathbb{B}}^n = \mathbb{B}^n \cup S^n$. При $0 < \alpha < 1$ для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \bar{\mathbb{B}}^n$ полагаем

$$f(z) = (z_1 - 1)^\alpha e^{\frac{z_1+1}{z_1-1}}, \tag{1}$$

и пусть $H^\beta(E)$ – пространство Гельдера порядка β, $0 < \beta < 1$, на множестве E. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть функция f определена на S^n формулой* (1)*. Тогда $|f| \in H^\alpha(S^n)$. При любом $\varepsilon > 0$*

$$f \notin H^{\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}(\bar{\mathbb{B}}^n). \tag{2}$$

Определение (1) функции f влечет $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{B}^n$, поэтому приведенная теорема показывает точность показателя $\alpha/2$ из работы [1]. Доказано будет даже более сильное утверждение, из которого последует соотношение (2), именно, если $\omega(t)$ – модуль непрерывности с условием $\omega(t) = o(t^{\frac{\alpha}{2}})$, то $f \notin H^{\omega(t)}(\bar{\mathbb{B}}^n)$.

Для доказательства теоремы потребуются некоторые геометрические объекты.

Ключевые слова: функции, голоморфные в шаре; гладкие функции; классы Гёльдера.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ No. 17-01-00607-а.

Пусть

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{z_1 = re^{i\theta} : 0 \leqslant 1 - r \leqslant \frac{1}{8}, \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{8}\},\\
D_2 &= \{z_1 = re^{i\theta} : 0 \leqslant 1 - r \leqslant \frac{1}{16}, \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{16}\},\\
\Omega_1 &= \{z \in S^n : z = (z_1, \dots, z_n), \quad z_1 \in D_1\},\\
\Omega_2 &= \{z \in S^n : z = (z_1, \dots, z_n), \quad z_1 \in D_2\}.
\end{aligned}$$

Для $\zeta = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $z_1(\zeta) = z_1$, $z'(\zeta) = (z_2, \dots, z_n)$. Выбор области Ω_1 и элементарные геометрические рассуждения дают следующий результат.

Утверждение 1. *Пусть $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_1$, $1 - |z_1(\zeta_1)| \geqslant 1 - |z_1(\zeta_2)|$,*

$$tz'(\zeta_1) = z'(\zeta_2) \stackrel{\text{def}}{=} z', \quad t \geqslant 1,$$

точка $\zeta_0 \in \Omega_1$ такая, что

$$1 - |z_1(\zeta_0)| = 1 - |z_1(\zeta_2)|, \quad \frac{z_1(\zeta_1)}{z_1(\zeta_0)} > 0, \quad z'(\zeta_0) = z'.$$

Тогда с некоторой абсолютной константой c_{abs} выполняется

$$|\zeta_1 - \zeta_0| + |\zeta_0 - \zeta_2| \leqslant c_{abs}|\zeta_1 - \zeta_2|. \tag{3}$$

Далее, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Предположим, что, по крайней мере одна из точек ζ_1, ζ_2, лежащих на сфере S^n, не принадлежит множеству Ω_1. Тогда для функции f, определенной в (1), выполняется оценка*

$$||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|| \leqslant c_f|\zeta_2 - \zeta_1|^\alpha. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\zeta_2 \notin \Omega_1$. Тогда, если $\zeta_1 \in \Omega_2$, то

$$|z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)| \geqslant c|z_1(\zeta_2) - 1|,$$

поэтому (1) влечёт

$$\begin{aligned}
||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|| &\leqslant |f(\zeta_2)| + |f(\zeta_1)|\\
&\leqslant |z_1(\zeta_2) - 1|^\alpha + |z_1(\zeta_1) - 1|^\alpha \leqslant c|z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)|^\alpha.
\end{aligned}$$

Если же $\zeta_1 \notin \Omega_2$, то, учитывая $\zeta_2 \notin \Omega_1$, из определения (1) получаем, что $f \in C^1(\overline{S^n \setminus \Omega_2})$, и поэтому

$$||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|| \leqslant |f(\zeta_2) - f(\zeta_1)| \leqslant c|\zeta_2 - \zeta_1| \leqslant c|\zeta_2 - \zeta_1|^\alpha,$$

что и доказывает утверждение 2. □

Определим еще один геометрический объект. Пусть $T \subset \mathbb{D}$ – область, ограниченная отрезками $[1, \frac{7}{8}e^{\frac{-i\pi}{8}}]$, $[1, \frac{7}{8}e^{\frac{\pi i}{8}}]$ и дугой

$$\{z = \frac{7}{8}e^{i\theta} : |\theta| \leqslant \frac{\pi}{8}\},$$

Σ – область на сфере S^n, определяемая соотношением

$$\Sigma = \{\zeta \in S^n : z_1(\zeta) \in T\}.$$

Установим следующее утверждение.

Утверждение 3. *Если* $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\Sigma}$ *или* $\zeta_1 \in \overline{\Sigma}$,

$$|z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)| < 0,01 \cdot |1 - z_1(\zeta_1)|,$$

то

$$||f(\zeta_1)| - |f(\zeta_2)|| \leqslant c|z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)|^\alpha. \tag{5}$$

Доказательство. Определение (1) функции f влечет

$$|f(\zeta)| = |z_1(\zeta) - 1|^\alpha \, e^{-\frac{1-|z_1(\zeta)|^2}{|z_1(\zeta)-1|^2}}, \tag{6}$$

поэтому при $\zeta \in \overline{\Sigma}$ из (6) получаем неравенство

$$|f(\zeta)| \leqslant |z_1(\zeta) - 1|^\alpha e^{-\frac{c_0}{|z_1(\zeta)-1|}}, c_0 > 0. \tag{7}$$

Далее, если $|z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)| \geqslant 0,01 \cdot |1 - z_1(\zeta_1)|$, то

$$\begin{aligned} ||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|| \leqslant |f(\zeta_2)| + |f(\zeta_1)| \leqslant |1 - z_1(\zeta_2)|^\alpha + |1 - z_1(\zeta_1)|^\alpha \\ \leqslant c|z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)|^\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Если $0,001 \cdot |1 - z_1(\zeta_1)|^2 \leqslant |z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)| \leqslant 0,01 \cdot |1 - z_1(\zeta_1)|$, то (7) дает

$$\begin{aligned} ||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|| \leqslant |f(\zeta_2)| + |f(\zeta_1)| \leqslant c \cdot |z_1(\zeta_1) - 1|^\alpha \cdot |z_1(\zeta_1) - 1|^\alpha \\ + c|z_1(\zeta_2) - 1|^\alpha \cdot |z_1(\zeta_2) - 1|^\alpha \leqslant c|z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)|^\alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

поскольку при $0 < x \leqslant 1$ имеет место оценка $x \geqslant ce^{-\frac{c_0}{x}}$. В случае

$$|z_1(\zeta_2) - z_1(\zeta_1)| \leqslant 0,001 \cdot |1 - z_1(\zeta_1)|^2$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_1)\|=\left|(|z_1(\zeta_2)-1|^\alpha-|z_1(\zeta_1)-1|^\alpha)e^{-\frac{1-|z_1(\zeta_2)|^2}{|z_1(\zeta_2)-1|^2}}\right.\\
&\left.+|z_1(\zeta_1)-1|^\alpha\left(e^{-\frac{1-|z_1(\zeta_2)|^2}{|z_1(\zeta_2)-1|^2}}-e^{-\frac{1-|z_1(\zeta_1)|^2}{|z_1(\zeta_1)-1|^2}}\right)\right|\\
&\leqslant c|z_1(\zeta_2)-z_1(\zeta_1)|\cdot|z_1(\zeta_1)-1|^{\alpha-1}+|z_1(\zeta_1)-1|^\alpha e^{-\frac{1-|z_1(\zeta_1)|^2}{|z_1(\zeta_1)-1|^2}}\\
&\times\left|e^{\frac{1-|z_1(\zeta_1)|^2}{|z_1(\zeta_1)-1|^2}-\frac{1-|z_1(\zeta_2)|^2}{|z_1(\zeta_2)-1|^2}}-1\right|\leqslant c|z_1(\zeta_2)-z_1(\zeta_1)|^\alpha\\
&+c|z_1(\zeta_1)-1|^\alpha e^{-\frac{1-|z_1(\zeta_1)|^2}{|z_1(\zeta_1)-1|^2}}\cdot\frac{|z_1(\zeta_2)-z_1(\zeta_1)|}{|z_1(\zeta_1)-1|^2}\\
&\leqslant c|z_1(\zeta_2)-z_1(\zeta_1)|^\alpha, \qquad (10)
\end{aligned}$$

поскольку при $0<x\leqslant 1$ имеем $e^{-\frac{c_0}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\leqslant c$. Неравенство (5) следует из соотношений (8)–(10). Утверждение 3 доказано. □

Утверждение 4. *Пусть* $\zeta_1=(z_1,\mathbb{O}_{n-1})\in\Omega_1\setminus\overline{\Sigma}$, $\zeta_2=(rz_1,z')\in\Omega_1\setminus\overline{\Sigma}$, $0<1-r\leqslant\frac{1}{8}$. *Тогда*

$$\||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_1)\|\leqslant c|\zeta_2-\zeta_1|^\alpha. \qquad (11)$$

Доказательство. Не умаляя общности, полагаем $z_1=e^{i\theta}$, $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{8}$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $1-r\leqslant 0,1\cdot\theta^2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&\||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_1)\|=\||rz_1-1|^\alpha\cdot e^{-\frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2}}-|z_1-1|^\alpha|\\
&\leqslant\left|(|rz_1-1|^\alpha-|z_1-1|^\alpha)e^{-\frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2}}\right|+|z_1-1|^\alpha\left|e^{-\frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2}}-1\right|\\
&\leqslant c|z_1-1|^{\alpha-1}(1-r)+c|z_1-1|^\alpha\frac{1-r}{\theta^2}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

При этом заметим, что

$$|\zeta_2-\zeta_1|=((1-r)^2|z_1|^2+|z'|^2)^{\frac12}=((1-r)^2+1-r^2)^{\frac12}=\sqrt{2}(1-r)^{\frac12}.$$

Тогда (12), с учетом равенств $z_1(\zeta_1)=z_1$, $z_1(\zeta_2)=rz_1$, влечет

$$\||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_1)\|\leqslant c(1-r)^\alpha+c|z_1-1|^\alpha\cdot\frac{|\zeta_2-\zeta_1|^2}{|z_1-1|^2}\leqslant c|\zeta_2-\zeta_1|^\alpha. \qquad (13)$$

Случай 2. $1-r>0,1\cdot\theta^2$. В этом случае находим, что

$$|\zeta_2-\zeta_1|=\sqrt{2}(1-r)^{\frac{1}{2}}\geqslant c|z_1-1|,$$

поэтому

$$\big||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_1)|\big|\leqslant|f(\zeta_2)|+|f(\zeta_1)|\leqslant c|z_1(\zeta_1)-1|^\alpha=c|z_1-1|^\alpha\leqslant c|\zeta_2-\zeta_1|^\alpha. \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) доказывают утверждение 4. □

Утверждение 5. *Пусть* $\zeta_1=(r_1z_1,z_1')\in\Omega_1\setminus\overline{\Sigma}$, $\zeta_2=(r_2z_1,z_2')\in\Omega_1\setminus\overline{\Sigma}$, $z_1\in\mathbb{T}$, $r_1,r_2<1$. *Тогда*

$$\big||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_1)|\big|\leqslant c|\zeta_2-\zeta_1|^\alpha. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $r_1<r_2<1$. Имеем $|z_1'|^2=1-r_1^2$, $|z_2'|^2=1-r_2^2$, поэтому

$$|z_2'-z_1'|^2\geqslant 2-r_1^2-r_2^2-2\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем, что достаточно проверить оценку

$$\begin{aligned}\big||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_1)|\big|&\leqslant c\Big((r_2-r_1)^2+2-r_1^2-r_2^2-2\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\\&=c'\Big(1-r_1r_2-\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned} \tag{17}$$

Если $r_2-r_1\geqslant 0,01\cdot(1-r_1)$, то $|\zeta_2-\zeta_1|\geqslant c|\zeta_1-\zeta_0|$, $|\zeta_2-\zeta_1|\geqslant c|\zeta_2-\zeta_0|$, где $\zeta_0=(z_1,\mathbb{O}_{n-1})$, поэтому утверждение 4 влечет оценку

$$\begin{aligned}\big||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_1)|\big|&\leqslant\big||f(\zeta_2)|-|f(\zeta_0)|\big|+\big||f(\zeta_1)|-|f(\zeta_0)|\big|\\&\leqslant c|\zeta_2-\zeta_0|^\alpha+c|\zeta_1-\zeta_0|^\alpha\leqslant c|\zeta_2-\zeta_1|^\alpha.\end{aligned} \tag{18}$$

Теперь предположим, что $0 < r_2 - r_1 < 0,01 \cdot (1 - r_1)$. Положим $\delta = r_2 - r_1$, тогда

$$1 - r_1 r_2 - \sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} = 1 - r_1(r_1+\delta) - \sqrt{(1-r_1^2)(1-(r_1+\delta)^2)}$$
$$= 1 - r_1^2 - r_1\delta - \sqrt{(1-r_1^2)(1-r_1^2-2r_1\delta-\delta^2)}$$
$$= (1-r_1^2)\Big(1 - \frac{r_1\delta}{1-r_1^2} - \sqrt{1 - \frac{2r_1\delta+\delta^2}{1-r_1^2}}\Big)$$
$$= (1-r_1^2)\Big(1 - \frac{r_1\delta}{1-r_1^2} - \Big(1 - \frac{1}{2}\frac{2\delta r_1+\delta^2}{1-r_1^2} - \frac{1}{8}\Big(\frac{2r_1\delta+\delta^2}{1-r_1^2}\Big)^2 + \dots\Big)\Big)$$
$$\geqslant c'(1-r_1^2)\cdot\frac{\delta^2}{(1-r_1^2)^2} \geqslant c_1'\frac{\delta^2}{1-r_1},$$

поэтому

$$\Big(1 - r_1 r_2 - \sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \geqslant c'\frac{\delta^\alpha}{(1-r_1)^{\alpha/2}} = c'\frac{(r_2-r_1)^\alpha}{(1-r_1)^{\alpha/2}}. \quad (19)$$

Опять полагаем $z_1 = e^{i\theta}$, $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{8}$. Тогда $|r_1 z_1 - 1| \leqslant c\theta$, $|z_1 - 1| \leqslant c\theta$, $|r_1 z_1 - 1| \geqslant c'\theta$.

Случай 1. $\frac{1-r_1}{\theta^2} \leqslant 1$. Имеем соотношения

$$\big||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\big|$$
$$\leqslant \Big|(|r_2 z_1 - 1|^\alpha - |r_1 z_1 - 1|^\alpha)e^{-\frac{1-r_2^2}{|1-r_2z_1|^2}}\Big|$$
$$+ |r_1 z_1 - 1|^\alpha\Big|e^{-\frac{1-r_2^2}{|1-r_2z_1|^2}} - e^{-\frac{1-r_1^2}{|1-r_1z_1|^2}}\Big|$$
$$\leqslant c(r_2-r_1)|z_1-1|^{\alpha-1} + c\theta^\alpha e^{-\frac{1-r_1^2}{|1-r_1z_1|^2}}\Big|e^{\frac{1-r_1^2}{|1-r_1z_1|^2} - \frac{1-r_2^2}{|1-r_2z_1|^2}} - 1\Big|$$
$$\leqslant c(r_2-r_1)^\alpha + c\theta^\alpha\Big(\frac{r_2-r_1}{\theta^2} + \frac{(r_2-r_1)^2}{\theta^3}\Big)$$
$$\leqslant c(r_2-r_1)^\alpha + c\theta^{\alpha-2}(r_2-r_1). \quad (20)$$

Проверим, что

$$\theta^{\alpha-2}(r_2-r_1) \leqslant c\frac{(r_2-r_1)^\alpha}{(1-r_1)^{\alpha/2}}, \quad (21)$$

или

$$\theta^{\alpha-2} \leqslant c\frac{(r_2-r_1)^{\alpha-1}}{(1-r_1)^{\alpha/2}}. \quad (21')$$

Но $r_2 - r_1 < 0,01 \cdot (1 - r_1)$, поэтому $(r_2 - r_1)^{\alpha-1} \geqslant c'(1 - r_1)^{\alpha-1}$, и $(21')$ будет следовать из неравенства

$$\theta^{\alpha-2} \leqslant c\frac{(1-r_1)^{\alpha-1}}{(1-r_1)^{\alpha/2}} = c(1-r_1)^{\frac{\alpha}{2}-1},$$

которое эквивалентно соотношению

$$\left(\frac{\theta^2}{1-r_1}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \leqslant c,$$

или

$$\left(\frac{1-r_1}{\theta^2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant c. \tag{22}$$

Оценка (22) соответствует случаю 1, что заканчивает проверку соотношения (21). Из (19), (20) и (21) следует (17), и, значит, (15).

Случай 2. $\frac{1-r_1}{\theta^2} > 1$. Аналогично предыдущему случаю получаем

$$\begin{aligned} &\big||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\big| \leqslant \big||r_2 z_1 - 1|^\alpha - |r_1 z_1 - 1|^\alpha\big| e^{-\frac{1-r_2^2}{|1-r_2 z_1|^2}} \\ &+ |r_1 z_1 - 1|^\alpha e^{-\frac{1-r_1^2}{|1-r_1 z_1|^2}} \cdot \left| e^{\frac{1-r_1^2}{|1-r_1 z_1|^2} - \frac{1-r_2^2}{|1-r_2 z_1|^2}} - 1 \right| \\ &\leqslant c(r_2 - r_1)^\alpha + c \cdot \theta^\alpha e^{-\frac{1-r_1^2}{|1-r_1 z_1|^2}} \cdot \left| e^{\frac{1-r_1^2}{|1-r_1 z_1|^2} - \frac{1-r_2^2}{|1-r_2 z_1|^2}} - 1 \right|. \end{aligned} \tag{23}$$

Опять полагаем $\delta = r_2 - r_1$, рассмотрим два подслучая.

А). $\frac{\delta}{\theta^2} \leqslant 0,001$. Учтем, что

$$\left| \frac{1-r_1^2}{|1-r_1 z_1|^2} - \frac{1-r_2^2}{|1-r_2 z_1|^2} \right| \leqslant c\frac{\delta}{\theta^2}, \tag{24}$$

тогда

$$c\theta^\alpha \cdot e^{-\frac{1-r_1^2}{|1-r_1 z_1|^2}} \cdot \left| e^{\frac{1-r_1^2}{|1-r_1 z_1|^2} - \frac{1-r_2^2}{|1-r_2 z_1|^2}} - 1 \right| \leqslant c\theta^\alpha \cdot \frac{\delta}{\theta^2} e^{-c_1 \frac{1-r_1}{\theta^2}},$$

и условие случая 2 вместе с неравенством $e^{-x} \leqslant \frac{c}{x}$ при $x \geqslant c_1 > 0$ влечет неравенство

$$c\theta^\alpha \frac{\delta}{\theta^2} e^{-c_1 \frac{1-r_1}{\theta^2}} \leqslant c\theta^\alpha \frac{\delta}{\theta^2} \cdot \frac{\theta^2}{1-r_1} = c\theta^\alpha \cdot \frac{\delta}{1-r_1}. \tag{25}$$

Проверим, что

$$\theta^\alpha \cdot \frac{\delta}{1-r_1} \leqslant c\frac{\delta^\alpha}{(1-r_1)^{\alpha/2}},$$

или

$$\theta^\alpha \cdot (1-r_1)^{\frac{\alpha}{2}-1} \leqslant c\delta^{\alpha-1}. \tag{26}$$

Поскольку $\delta \leqslant 0,01 \cdot (1-r_1)$, оценка (26) последует из неравенства

$$\theta^\alpha \cdot (1-r_1)^{\frac{\alpha}{2}-1} \leqslant c(1-r_1)^{\alpha-1},$$

то есть из неравенства

$$\left(\frac{\theta^2}{1-r_1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant c. \qquad (27)$$

Неравенство (27) является условием случая 2 и (19) и (23)–(27) дают, что подслучай A) влечет (17), и, следовательно, (15).

B). $\frac{\delta}{\theta^2} > 0,001$. Вновь используя (23), находим, что

$$\||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\| \leqslant c(r_2-r_1)^\alpha + c\theta^\alpha\left|e^{-\frac{1-r_1^2}{|1-r_1z_1|^2}} - e^{-\frac{1-r_2^2}{|1-r_2z_1|^2}}\right|$$

$$\leqslant c(r_2-r_1)^\alpha + c\theta^\alpha e^{-\frac{1-r_1^2}{|1-r_1z_1|^2}} + c\theta^\alpha e^{-\frac{1-r_2^2}{|1-r_2z_1|^2}}. \qquad (28)$$

Поскольку $r_2 - r_1 < 0,01 \cdot (1-r_1)$, получаем

$$\frac{1-r_1^2}{|1-r_1z_1|^2} \geqslant c_1\frac{1-r_1}{\theta^2}, \quad \frac{1-r_2^2}{|1-r_2z_1|^2} \geqslant c_1\frac{1-r_1}{\theta^2},$$

поэтому из (28) заключаем, что

$$\||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\| \leqslant c(r_2-r_1)^\alpha + c\theta^\alpha e^{-c_1\frac{1-r_1}{\theta^2}}. \qquad (29)$$

Учтем, что при $x \geqslant c_1 > 0$ выполнено $e^{-x} \leqslant \frac{c}{x^2}$, поэтому

$$\theta^\alpha e^{-c_1\frac{1-r_1}{\theta^2}} \leqslant c\theta^\alpha\frac{\theta^4}{(1-r_1)^2}. \qquad (30)$$

В подслучае B) имеем

$$\frac{\delta^\alpha}{(1-r_1)^{\alpha/2}} \geqslant c'\frac{\theta^{2\alpha}}{(1-r_1)^{\alpha/2}}. \qquad (31)$$

Для завершения рассмотрения подслучая B) достаточно проверить, что

$$\theta^\alpha \cdot \frac{\theta^4}{(1-r_1)^2} \leqslant c\frac{\theta^{2\alpha}}{(1-r_1)^{\alpha/2}},$$

или

$$\frac{\theta^{4-\alpha}}{(1-r_1)^{2-\alpha/2}} = \left(\frac{\theta^2}{1-r_1}\right)^{2-\frac{\alpha}{2}} \leqslant c. \qquad (32)$$

Но неравенство (32) согласуется с условием случая 2, поэтому соотношения (19) и (28)–(32) влекут (17) и, следовательно, (15) и в подслучае B). $\square$

Утверждение 6. *Пусть* $\zeta_1 = (rz_1, z_1')$, $\zeta_2 = (rz_2, z_2')$, $z_1 \in \mathbb{T}$, $z_2 \in \mathbb{T}$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_1 \setminus \Sigma$. *Тогда*

$$\big||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\big| \leqslant c|rz_2 - rz_1|^\alpha. \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $z_1 = e^{i\theta_1}$, $z_2 = e^{i\theta_2}$, предположим, не умаляя общности, что $0 < \theta_2 < \theta_1$, пусть $l = \theta_1 - \theta_2$. Если $l \geqslant 0,01 \cdot \theta_1$, то

$$\begin{aligned}\big||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\big| &\leqslant |f(\zeta_2)| + |f(\zeta_1)| \leqslant |z_1(\zeta_2) - 1|^\alpha + |z_1(\zeta_1) - 1|^\alpha \\ &\leqslant c\theta_2^\alpha + c\theta_1^\alpha \leqslant cl^\alpha \leqslant c|rz_2 - rz_1|^\alpha. \end{aligned}\tag{34}$$

Пусть $l < 0,01 \cdot \theta_1$. Аналогично утверждению 5 рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $\frac{1-r}{\theta_1^2} \leqslant 1$, тогда $\frac{l(1-r)}{\theta_1^3} \leqslant c$. Имеем соотношения

$$\begin{aligned}\big||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\big| &\leqslant \big||rz_2 - 1|^\alpha - |rz_1 - 1|^\alpha\big| e^{-\frac{1-r^2}{|1-rz_2|^2}} \\ &+ |rz_1 - 1|^\alpha \cdot e^{-\frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2}} \cdot \left| e^{\frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2} - \frac{1-r^2}{|1-rz_2|^2}} - 1 \right| \\ &\leqslant c\theta_1^{\alpha-1} l + c\theta_1^\alpha \frac{l(1-r)}{\theta_1^3} \leqslant cl^\alpha + c\theta_1^\alpha \frac{l}{\theta_1} \leqslant cl^\alpha. \end{aligned}\tag{35}$$

Случай 2. $\frac{1-r}{\theta_1^2} > 1$, $\frac{l(1-r)}{\theta_1^3} \leqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\big||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\big| &\leqslant \big||rz_2 - 1|^\alpha - |rz_1 - 1|^\alpha\big| e^{-\frac{1-r^2}{|1-rz_2|^2}} \\ &+ |rz_1 - 1|^\alpha e^{-\frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2}} \cdot \left| e^{\frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2} - \frac{1-r^2}{|1-rz_2|^2}} - 1 \right| \leqslant cl^\alpha \\ &+ c\theta_1^\alpha \cdot e^{-c_1 \frac{1-r}{\theta_1^2}} \cdot \frac{l(1-r)}{\theta_1^3} \leqslant cl^\alpha + c\theta_1^\alpha \cdot \frac{\theta_1^2}{1-r} \cdot \frac{l(1-r)}{\theta_1^3} \\ &= cl^\alpha + c\theta_1^{\alpha-1} l \leqslant cl^\alpha. \end{aligned}\tag{36}$$

Случай 3. $\frac{1-r}{\theta_1^2} > 1$, $\frac{l(1-r)}{\theta_1^3} > 1$, т.е. $l > \frac{\theta_1^3}{1-r}$. Имеем соотношение

$$\begin{aligned}\big||f(\zeta_2)| - |f(\zeta_1)|\big| &\leqslant |f(\zeta_2)| + |f(\zeta_1)| \leqslant c\theta_1^\alpha e^{-c_1 \frac{1-r}{\theta_1^2}} \\ &\leqslant c\theta_1^\alpha \frac{\theta_1^4}{(1-r)^2} = c\theta_1^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{1-r} \cdot \frac{\theta_1^3}{1-r} < c\theta_1^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{1-r} l \\ &= c \cdot \frac{\theta_1^2}{1-r} \cdot \theta_1^{\alpha-1} l \leqslant c\theta_1^{\alpha-1} l \leqslant cl^\alpha. \end{aligned}\tag{37}$$

Соотношения (34)–(37) доказывают утверждение 6. $\square$

Утверждения 1–6 доказывают, что $|f| \in H^{\alpha}(S^n)$.

Утверждение 7. *Пусть* $\omega(t) = o(t^{\frac{\alpha}{2}})$. *Тогда* $f \notin H^{\omega}(\overline{\mathbb{B}^n})$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $f(z_1, \mathbb{O}_{n-1}) \notin H^{\omega}(\overline{\mathbb{D}})$. Предположим, что справедливо включение $f(z_1, \mathbb{O}_{n-1}) \in H^{\omega}(\overline{\mathbb{D}})$. Тогда имелось бы соотношение

$$|f'(z, \mathbb{O}_{n-1})| \leq c_0 \omega(1-|z|) \cdot (1-|z|)^{-1}. \tag{38}$$

Но из (1) следует, что

$$f'(z_1, \mathbb{O}_{n-1}) = \alpha(z_1-1)^{\alpha-1} e^{\frac{z_1+1}{z_1-1}} - 2(z_1-1)^{\alpha} \cdot \frac{1}{(z_1-1)^2} e^{\frac{z_1+1}{z_1-1}},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} |f'(z_1, \mathbb{O}_{n-1})| &\geqslant 2(|z_1-1|^{\alpha-2} - \frac{\alpha}{2}|z_1-1|^{\alpha-1}) e^{-\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}} \\ &\geqslant 2(1-\alpha)|z_1-1|^{\alpha-2} e^{-\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}}. \end{aligned}$$

Пусть $1-|z_1|^2 = |1-z_1|^2$, $z_1 \to 1$, тогда

$$\begin{aligned} |f'(z_1, \mathbb{O}_{n-1})| &\geqslant 2(1-\alpha)e^{-1} \cdot (|z_1-1|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \\ &= 2(1-\alpha)e^{-1}(1-|z_1|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}. \end{aligned} \tag{39}$$

Но соотношение (39) при таких z_1 противоречит (38). Утверждение 7 и теорема доказаны. □

Список литературы

1. Н. А. Широков, *Гладкость голоморфной в шаре функции и ее модуля на сфере.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **447** (2016), 123–128.

Shirokov N. A. About sharpness of the estimate in a theorem concerning half smoothness of a function holomorphic in a ball.

Let $\mathbb{B}^n$ be the unit ball and S^n the unit sphere in $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Take α, $0 < \alpha < 1$, and define a function f on $\overline{\mathbb{B}^n}$ as follows:

$$f(z) = (z_1-1)^{\alpha} e^{\frac{z_1+1}{z_1-1}}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{B}^n}.$$

The main result of the paper is the following.

Theorem. *If considered on the unit sphere S^n, the function $\zeta \mapsto |f(\zeta)|$ belongs to the Hölder class $H^\alpha(S^n)$; the function f does not belong to the Hölder class $H^{\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}(\overline{\mathbb{B}^n})$ for any $\varepsilon > 0$.*

С.-Петербургский
государственный университет,
Петергоф, Университетский просп. 35,
198504 Санкт-Петербург;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 23 апреля 2018 г.