Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

**Н. А. Широков**

# ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИБЛИЖЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Приближениям тригонометрическими полиномами посвящена огромная литература. В настоящей заметке рассматривается ситуация, которая, насколько известно автору, ранее не встречалась.

Пусть $\omega(x)$ – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt + x\int_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant c\omega(x), \tag{1}$$

множество $E$ есть объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$, $n \geqslant 1$, отрезки $[a_k,b_k]$ попарно дизъюнктны. Предположим, что для множества $E$ выполняется условие

$$E \cap (E+2\pi\nu) = \varnothing, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad \nu \neq 0. \tag{2}$$

Заметим, что условие (2) выполнено, если $n=1$, $E=[a_1,b_1]$ и $b_1-a_1 < 2\pi$. Через $H^\omega(E)$ обозначим пространство комплекснозначных функций $f$, заданных на $E$ и таких, что для $x_1$, $x_2 \in E$ справедлива оценка $|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant c_f\omega(|x_2-x_1|)$; при $r \in \mathbb{N}$ через $H^{\omega+r}(E)$ обозначаем пространство функций $f$ таких, что $f^{(r)} \in H^\omega(E)$.

Пусть, далее,

$$S_\rho = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta}), \quad |\zeta| = \rho\},$$
$$S_\rho([a,b]) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}S_\rho, \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad \rho > 1,$$
$$d_\rho(z,[a,b]) = \operatorname{dist}(z, S_\rho([a,b])), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для $x \in [a_m,b_m] \subset E$, $1 \leqslant m \leqslant n$, полагаем

$$d_\rho(x,E) = d_\rho(x, S_\rho([a_m,b_m])). \tag{3}$$

---

*Ключевые слова*: модуль непрерывности, целая функция экспоненциального типа, приближение, классы Гёльдера, аппроксимация, тригонометрические полиномы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ No. 17-01-00607-а.

Настоящая работа посвящена конструктивному описанию пространства $H^{\omega+r}(E)$ в терминах приближения тригонометрическими полиномами.

**Теорема.** a) *Пусть модуль непрерывности $\omega(x)$ и множество $E$ удовлетворяют условиям (1) и (2), соответственно, и пусть*

$$f \in H^{\omega+r}(E),$$

*$r \geqslant 0$, $r \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется тригонометрический полином $\pi_n(x)$ порядка не выше $n$ такой, что для любого $x \in E$ с некоторым $c_0 = c_0(f, E, r)$ выполняется соотношение*

$$|f(x) - \pi_n(x)| \leqslant c_0 d^r_{1+\frac{1}{n}}(x, E)\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x, E)). \tag{4}$$

b) *Предположим, что для функции $f : E \to \mathbb{C}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется тригонометрический полином $\pi_n$ порядка не выше $n$ такой, что для любого $x \in E$ справедлива оценка (4) с некоторой постоянной $c_0$. Тогда $f \in H^{\omega+r}(E)$.*

**Замечание.** Насколько известно автору, утверждение теоремы при $n = 1$, $E = [a_1, b_1]$, $b_1 - a_1 < 2\pi$ также является новым результатом.

**Доказательство части a) теоремы.**

Пусть

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (E + 2\pi k). \tag{5}$$

Продолжим функцию $f$ на множестве $\mathcal{E}$ с периодом $2\pi$, при $x \in E+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, положим $f(x) \overset{def}{=} f(x - 2k\pi)$. Условие (2) показывает, что такое продолжение корректно определено. Множество $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям, предполагаемым в [1]: все отрезки, входящие в $\mathcal{E}$, соизмеримы и все дополнительные интервалы в $\mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$ соизмеримы, что следует из (2) и (5). По теореме из [1] в таком случае для всякого $n \in \mathbb{N}$ можно найти целую функцию $F_n(z)$ экспоненциального типа не выше $n$ такую, что для $x \in E$ справедлива оценка

$$|F_n(x) - f(x)| \leqslant c_0 d^r_{1+\frac{1}{n}}(x, E)\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x, E)), \tag{6}$$

а при $x \in E + 2k\pi$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ имеется оценка

$$|F_n(x) - f(x)| \leqslant c_0 d^r_{1+\frac{1}{n}}(x, E + 2k\pi)\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x, E + 2k\pi)), \tag{7}$$

где при $x \in E + 2k\pi$ положим $d_\rho(x, E + 2k\pi) \stackrel{\text{def}}{=} d_\rho(x - 2k\pi, E)$. Пусть $d_\rho(x, \mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} d_\rho(x, E + 2k\pi)$ при $x \in E + 2k\pi$, и положим

$$c(F) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathcal{E}} \frac{|F(x) - f(x)|}{d^r_{1+\frac{1}{n}}(x, \mathcal{E})\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x, \mathcal{E}))}. \tag{8}$$

Из (6), (7), (8) заключаем, что $c(F_n) \leqslant c_0$. Пусть $\nu \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathcal{E}} \frac{|F_n(x + 2\pi\nu) - f(x)|}{d^r_{1+\frac{1}{n}}(x, \mathcal{E})\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x, \mathcal{E}))} \\ &= \sup_{x \in \mathcal{E}} \frac{|F_n(x) - f(x - 2\pi\nu)|}{d^r_{1+\frac{1}{n}}(x - 2\pi\nu, \mathcal{E})\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x - 2\pi\nu, \mathcal{E}))} \\ &= \sup_{x \in \mathcal{E}} \frac{|F_n(x) - f(x)|}{d^r_{1+\frac{1}{n}}(x, \mathcal{E})\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x, \mathcal{E})) = c(F_n)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть $F_{n,\nu}(z) \stackrel{def}{=} F_n(z + 2\pi\nu)$. Тогда соотношения (8) и (9) влекут, что

$$c(F_{n,\nu}) \leqslant c_0, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Положим

$$D = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \max_{x \in [a_k, b_k]} c_0 d_2^r(x, E)\omega(d_2(x, E)), \tag{11}$$

$$M_0 = \max_{x \in E} |f(x)|. \tag{12}$$

В таком случае из (10), (11), (12) заключаем, что при $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}$ справедливо неравенство

$$|F_{n,\nu}(x)| \leqslant |F_{n,\nu}(x) - f(x)| + |f(x)| \leqslant D + M_0 \stackrel{\text{def}}{=} M_1. \tag{13}$$

По теореме Б. Я. Левина [2] из оценки (13) следует оценка для целой функции $F_{n,\nu}$ экспоненциального типа не выше $n$ на всей вещественной оси:

$$|F_{n,\nu}(x)| \leqslant M_2, \quad M_2 = M_2(M_1, \mathcal{E}, n), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Из (14) находим, что при $z \in \mathbb{C}$ выполняется соотношение

$$|F_{n,\nu}(z)| \leqslant M_2 e^{n|\operatorname{Im} z|}. \tag{15}$$

Положим

$$\Phi_{n,N} = \frac{1}{2N+1} \sum_{\nu=-N}^{N} F_{n,\nu}. \tag{16}$$

Из (15), (16) находим, что при $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$|\Phi_{n,N}(z)| \leqslant \frac{1}{2N+1} \sum_{\nu=-N}^{N} |F_{n,\nu}(z)| \leqslant M_2 e^{n|\operatorname{Im} z|}. \tag{17}$$

Оценка (17) показывает, что семейство функций $\{\Phi_{n,N}(z)\}_{N=1}^{\infty}$ является нормальным семейством на всей комплексной плоскости, поэтому существует подпоследовательность $\{N_l\}_{l=1}^{\infty}$, для которой подпоследовательность функций $\{\Phi_{n,N_l}(z)\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к целой функции $\pi_n(z)$. Из (17) следует, что при $z \in \mathbb{C}$ имеем оценку

$$|\pi_n(z)| \leqslant M_2 e^{n|\operatorname{Im} z|}, \tag{18}$$

т.е. $\pi_n$ – целая функция экспоненциально типа не выше $n$. Далее, учитывая оценку (15), находим, что для фиксированного $z \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
&\Phi_{n,N_l}(z+2\pi) - \Phi_{n,N_l}(z) \\
&= \frac{1}{2N_l+1}\left(\sum_{k=-N_l}^{N_l} F_n(z+2k\pi+2\pi) - \sum_{k=-N_l}^{N_l} F_n(z+2k\pi)\right) \\
&= \frac{1}{2N_l+1}\big(F_n(z+2(N_l+1)\pi) - F_n(z-2N_l\pi)\big) \to 0 \text{ при } l \to \infty,
\end{aligned} \tag{19}$$

и (19) влечет, что $\pi_n(z+2\pi) - \pi_n(z) = 0$, что вместе с неравенством (18) показывает, что $\pi_n(z)$ – тригонометрический полином порядка не выше $n$. Из соотношений (10) получаем, что

$$c(\Phi_{n,N}) \leqslant \frac{1}{2N+1} \sum_{\nu=-N}^{N} c(F_{n,\nu}) \leqslant c_0. \tag{20}$$

Для фиксированного $x \in \mathcal{E}$ определение (8) и формула (20) дают неравенство

$$\frac{|\Phi_{n,N_l}(x) - f(x)|}{d^r_{1+\frac{1}{n}}(x,\mathcal{E})\,\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x,\mathcal{E}))} \leqslant c_0,$$

откуда при $l \to \infty$ имеем

$$\frac{|\pi_n(x) - f(x)|}{d^r_{1+\frac{1}{n}}(x,\mathcal{E})\,\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x,\mathcal{E}))} \leqslant c_0. \tag{21}$$

Соотношение (21) доказывает часть а) теоремы.

**Для доказательства части b)** продолжим функцию $f$ $2\pi$-периодически на множество $\mathcal{E}$, как это было сделано в доказательстве части a). Поскольку тригонометрические полиномы $2\pi$-периодичны, при $x \in E + 2k\pi \subset \mathcal{E}$ из (4) получаем, что

$$\begin{aligned}
&|\pi_n(x) - f(x)| = |\pi_n(x - 2\pi k) - f(x - 2\pi k)| \\
&\leqslant c_0 d^r_{1+\frac{1}{n}}(x - 2\pi k, E)\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x - 2\pi k, E)) \\
&= c_0 d^r_{1+\frac{1}{n}}(x, E + 2\pi k)\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x, E + 2\pi k)) \\
&= c_0 d^r_{1+\frac{1}{n}}(x, \mathcal{E})\omega(d_{1+\frac{1}{n}}(x, \mathcal{E})).
\end{aligned} \tag{22}$$

Так как $\pi_n(z)$ является целой функцией экспоненциального типа не выше $n$, то оценка (22) позволяет применить теорему из [3], которая влечет $f \in H^{\omega+r}(\mathcal{E})$, в частности, $f \in H^{\omega+r}(E)$. Теорема доказана. $\square$

## Список литературы


1. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на счетном множестве отрезков вещественной оси. Дальнейшее обобщение.* — Вестник СПбГУ, серия 1, выпуск 2, 2018.
2. Б. Я. Левин, *Мажоранты в классах субгармонических функций.* — Теория функций, функциональный анализ и их приложения **52** (1989), 3–33.
3. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на счетном множестве отрезков вещественной оси.* 4. *Обратная теорема.* — Вестник СПбГУ, серия 1, выпуск 4 (2018).



Shirokov N. A. A note about approximation by trigonometric polynomials.

Let $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$; if $n > 1$ then we assume that the segments $[a_k, b_k]$ are pairwise disjoint. Suppose that the following property holds:

$$E \cap (E + 2\pi\nu) = \varnothing, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \ \nu \neq 0. \tag{1}$$

We denote by $H^{\omega+r}(E)$ the space of functions $f$ defined on $E$ such that $|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leqslant c_f\omega(|x_2 - x_1|)$, $x_1$, $x_2 \in E$, $f^{(0)} \equiv f$. We assume that a modulus of continuity $\omega$ satisfies the condition

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant c\omega(x). \tag{2}$$

We find a constructive description of the space $H^{\omega+r}(E)$ in terms of the rate of nonuniform approximation of $f \in H^{\omega+r}(E)$ by means of trigonometric polynomials if $E$ satisfies (1) and $\omega$ satisfies (2).

С.-Петербургский
государственный университет,
Петергоф, Университетский просп. 35,
198504 Санкт-Петербург;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
*E-mail*: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 21 февраля 2018 г.