Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

Н. А. Широков

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРНШТЕЙНА С ПОМОЩЬЮ АППРОКСИМАЦИИ

Обозначим через B_σ, $\sigma > 0$, множество целых функций f экспоненциального типа не выше σ, ограниченных на вещественной оси. Известно, что для любой функции f из B_σ справедливо соотношение $|f(z)| \leqslant M\exp(\sigma|\operatorname{Im} z|)$ с некоторой постоянной $M = M_f \geqslant 0$, при этом B_σ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{B_\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \|f(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Пространство B_σ называют пространством Бернштейна.

Пусть $\Lambda = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $z_n = x_n + iy_n$ – последовательность различных комплексных чисел, $x_n \underset{n\to-\infty}{\to} -\infty$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, l^∞ – пространство двусторонних последовательностей $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Проблема о возможности интерполяции в точках z_n любой последовательности $A \in l^\infty$ функциями из B_σ с указанием наименьших возможных σ для вещественных $z_n = x_n$ была решена А. Бёрлингом [1], а для комплексных – Х. Ортегой и К. Сейпом [2]. В настоящей работе рассматривается задача об одновременной интерполяции значений функции f и её нескольких первых производных. Применяется другой метод интерполяции, чем встречавшиеся в [1] и [2]. Оценка для σ получается хуже, чем в упомянутых работах, но позволяет предъявить сразу требуемую функцию, интерполирующую заданные последовательности своими значениями и значениями своих производных. Будем рассматривать последовательности $\Lambda = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $z_n = x_n + iy_n$, удовлетворяющие следующим условиям: для некоторого $l > 0$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$x_{n+1} - x_n \geqslant l; \tag{1}$$

для фиксированного $L \geqslant 0$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$|y_n| \leqslant L. \tag{2}$$

Ключевые слова: функции экспоненциального типа, пространство Бернштейна, интерполяция, аппроксимация.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ No. 17-01-00607-а.

Пусть, далее, имеются последовательности $A_k \in l^\infty$, $0 \leqslant k \leqslant r$, $A_k \overset{\text{def}}{=} \{a_{kn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Положим

$$\|\{A_k\}_{k=0}^r\| = \max_{0\leqslant k\leqslant r} l^k \|A_k\|_{l^\infty}. \tag{3}$$

В определении (3) случай $r = 0$ не исключается. Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть последовательность* Λ *и* A_k, $0 \leqslant k \leqslant r$, *удовлетворяют условиям* (1) – (3). *Тогда существует функция* $F_{\sigma_0}^{\text{int}} \in B_{\sigma_0}$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

$$F_{\sigma_0}^{\text{int}}(z_n) = a_{0n}, \quad \big(F_{\sigma_0}^{\text{int}}(z_n)\big)^{(k)} = a_{kn}, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

При этом можно выбрать $\sigma_0 \leqslant \frac{c_r}{l}$, *где* $c_r = c_r\big(\frac{L}{l}\big)$ *и зависящая от* t *функция* $c_r(t)$ *ограничена на* $[0, t_0]$ *при* $0 \leqslant t \leqslant t_0$ *для любого* $t_0 > 0$. *Для* $\|F_{\sigma_0}^{\text{int}}\|_{B_{\sigma_0}}$ *справедлива оценка*

$$\|F_{\sigma_0}^{\text{int}}\|_{B_{\sigma_0}} \leqslant c_{1r}(l, L) \cdot \|\{A_k\}_{k=0}^r\|. \tag{5}$$

§1. Предварительные построения

Обозначим через I_n отрезки

$$I_n = \Big\{z = x + iy_n : |x - x_n| \leqslant \frac{l}{4}\Big\}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

а через J_n – отрезки вещественной оси

$$J_n = \Big\{x : x_n + \frac{l}{2,01} \leqslant x \leqslant x_{n+1} - \frac{l}{2,01}\Big\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Через I_n^0 обозначим отрезки

$$I_n^0 = \Big\{z = x + iy_n : |x - x_n| \leqslant \frac{l}{2,01}\Big\}.$$

Через I_n' и I_n'' обозначим отрезки, соединяющие, соответственно, точки

$$x_n - \frac{l}{2,01} + iy_n \quad \text{и} \quad x_n - \frac{l}{2,01}, \qquad x_n + \frac{l}{2,01} + iy_n \quad \text{и} \quad x_n + \frac{l}{2,01}.$$

Какие-то (или даже все) отрезки I_n' и I_n'' могут вырождаться в точки. Наконец, положим $\Gamma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (I_n^0 \cup I_n' \cup I_n'' \cup J_n)$. Отметим, что если все z_n вещественны, то $\Gamma = \mathbb{R}$. Кривая Γ делит плоскость $\mathbb{C}$ на две области: D_+, для которой $2i(L+1) \in D_+$, и $D_- = \mathbb{C} \setminus (D_+ \cup \Gamma)$.

Через K_n обозначим кольца

$$K_n = \Big\{ z : \frac{1}{4} l \leqslant |z - z_n| \leqslant \frac{1}{2} l \Big\}. \tag{6}$$

Далее будем применять некоторые конформные отображения. Существует и единственно отображение ψ_+ верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на область D_+, удовлетворяющее условиям

$$\psi_+(\infty) = \infty, \qquad \frac{\psi_+(iy)}{iy} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 1, \tag{7}$$

а также существует и единственно отображение ψ_- нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ на область D_- с условиями

$$\psi_-(\infty) = \infty, \qquad \frac{\psi_-(iy)}{iy} \xrightarrow[y \to -\infty]{} 1. \tag{8}$$

Обозначим через $\varphi_+(z)$ обратное к ψ_+ отображение области D_+ на $\mathbb{C}_+$, а через $\varphi_-(z)$ – обратное к ψ_- отображение D_- на $\mathbb{C}_-$. Определим следующие отображения областей D_+ и D_- на себя (см. [3, 4]). Для $s \in \mathbb{R}$ и $v > 0$, положим

$$z^+_{v,s}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_+(\varphi_+(z) + s + iv), \quad z \in D_+, \tag{9}$$

$$z^-_{v,s}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_-(\varphi_-(z) + s - iv), \quad z \in D_-. \tag{10}$$

При проверке нужных оценок приближения используется следующее утверждение; см. [3, 4].

Лемма 1. *Существует абсолютная постоянная* c^0_{abs} *такая, что при* $z_0 \in \partial D_+ = \partial D_-$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^0_{abs}}\Big(\frac{|s|}{v}+1\Big)^{-4}|z^+_{v,0}(z) - z_0| &\leqslant |z^+_{v,s}(z) - z_0| \\
&\leqslant c^0_{abs}\Big(\frac{|s|}{v}+1\Big)^{4}|z^+_{v,0}(z) - z_0|, \quad z \in D_+, \\
\frac{1}{c^0_{abs}}\Big(\frac{|s|}{v}+1\Big)^{-4}|z^+_{v,0}(z) - z| &\leqslant |z^+_{v,s}(z) - z| \\
&\leqslant c^0_{abs}\Big(\frac{|s|}{v}+1\Big)^{4}|z^+_{v,0}(z) - z|, \quad z \in D_+,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^0_{abs}}\Big(\frac{|s|}{v}+1\Big)^{-4}|z^-_{v,0}(z)-z_0| &\leqslant |z^-_{v,s}(z)-z_0| \\ &\leqslant c^0_{abs}\Big(\frac{|s|}{v}+1\Big)^{4}|z^-_{v,0}(z)-z_0|, \quad z\in D_-, \\ \frac{1}{c^0_{abs}}\Big(\frac{|s|}{v}+1\Big)^{-4}|z^-_{v,0}(z)-z| &\leqslant |z^-_{v,s}(z)-z| \\ &\leqslant c^0_{abs}\Big(\frac{|s|}{v}+1\Big)^{4}|z^-_{v,0}(z)-z|, \quad z\in D_-. \end{aligned} \tag{12}$$

В соотношениях (11) и (12) постоянная c^0_{abs} не зависит от l и L. В следующем утверждении используется постоянная $c_2(\frac{L}{l})$, зависящая от отношения $\frac{L}{l}$.

Лемма 2. *Существует постоянная $c_2 = c_2(\frac{L}{l})$ такая, что справедливы соотношения*:

$$|z^+_{v,0}(z)-z| \leqslant c_2|z^+_{v,0}(w)-w|^{\frac12}\cdot(|z-w|+|z^+_{v,0}(w)-w|)^{\frac12}, \qquad \text{где} \quad z,w\in\overline{D}_+, \tag{13}$$

$$|z^-_{v,0}(z)-z| \leqslant c_2|z^-_{v,0}(w)-w|^{\frac12}\cdot(|z-w|+|z^-_{v,0}(w)-w|)^{\frac12}, \qquad \text{где} \quad z,w\in\overline{D}_-. \tag{14}$$

Проверка того, что постоянная c_2 в соотношениях (13) и (14) зависит только от $\frac{L}{l}$, проводится с помощью применения результатов о поведении конформных отображений вблизи границы, развитых в работе В. И. Белого [5], с учетом конкретного вида кривой Г.

Использование соотношений (11)–(14) для оценок интегралов, которые будут нам нужны, подробно описаны в [4], поэтому в данной работе ограничимся формулировкой основных этапов этих рассуждений.

§2. Построение функций, связанных с последовательностями $\{A_k\}_{k=0}^r$

Положим

$$P_n(z) = a_{0n} + \sum_{k=1}^{r}\frac{a_{kn}}{k!}(z-z_n)^k, \qquad n\in\mathbb{Z}. \tag{15}$$

Положим $M_0 = \|\{A_k\}_{k=0}^r\|$. Отметим, что при $|z-z_n| \leqslant \frac{l}{2}$ из (15) следует, что

$$\begin{aligned}|P_n(z)| &\leqslant M_0 + \sum_{k=1}^{r} \frac{|a_{kn}|}{k!} l^k \cdot \left|\frac{z-z_n}{l}\right|^k \\ &\leqslant M_0 + \sum_{k=1}^{r} \frac{M_0}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k < M_0 e^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{16}$$

Определим функцию $h_n(z)$, принадлежащую классу $C^1(\mathbb{C})$, со свойствами:

$$h_n(z) \equiv 0, \quad |z-z_n| \geqslant \frac{l}{2}; \quad h_n(z) \equiv 1, \quad |z-z_n| \leqslant \frac{l}{4}; \tag{17}$$

$$|\mathrm{grad}\, h_n(z)| \leqslant c_r \cdot \frac{1}{l}, \quad z \in \mathbb{C}; \tag{18}$$

$$\int\limits_{[z_n-\frac{l}{2}, z_n+\frac{l}{2}]} P_n(z) h_n(z) dz = \int\limits_{x_n-\frac{l}{2}}^{x_n+\frac{l}{2}} P_n(x+iy_n) h_n(x+iy_n) dx = 0. \tag{19}$$

Построение требуемой функции h_n, удовлетворяющей условиям (17)–(19), можно осуществить так: задаём h_n в соответствии с соотношениями (17), а затем выбираем функцию $U_n(x) \in C^1\big([x_n-\frac{l}{2}, x_n+\frac{l}{2}]\big)$ так, чтобы $U_n\big(x_n-\frac{l}{2}\big) = U_n\big(x_n+\frac{l}{2}\big) = 0, U_n(x) \equiv 1$ при $x \in [x_n - \frac{l}{4}, x_n + \frac{l}{4}]$,

$$|U_n'(x)| \leqslant c_{1r} \cdot \frac{1}{l}, \quad x \in \Big[x_n - \frac{l}{2}, x_n + \frac{l}{2}\Big], \tag{20}$$

$$\int\limits_{x_n-\frac{l}{2}}^{x_n+\frac{l}{2}} P_n(x+iy_n) U_n(x) dx = 0. \tag{21}$$

В силу того, что

$$\begin{aligned}\max_{|z-z_n|\leqslant\frac{l}{2}} |P_n(z)| &\underset{r}{\asymp} \max_{z=x+iy_n: x\in[x_n+\frac{l}{4}, x_n+\frac{l}{2}]} |P_n(z)| \\ &\underset{r}{\asymp} \max_{z=x+iy_n: x\in[x_n-\frac{l}{2}, x_n-\frac{l}{4}]} |P_n(z)|,\end{aligned}$$

где $a \underset{r}{\asymp} b$ означает наличие неравенств $\widetilde{c}'_r a \leqslant b \leqslant \widetilde{c}''_r a$, соотношениям (20) и (21) можно удовлетворить. После этого полагаем

$$h_n(z) = U_n(x) \ \text{ при } \ z = x + iy_n,\ x \in \Big[x_n - \frac{l}{2}, x_n - \frac{l}{4}\Big] \cup \Big[x_n + \frac{l}{4}, x_n + \frac{l}{2}\Big],$$

и продолжаем функцию $U_n(x)$ в кольцо K_n с учетом (17) и с оценкой (18), где $c_r = c_{abs} \cdot c_{1r}$. Полученную функцию обозначим через $h_n(z)$.

Пусть

$$f_n(z) = P_n(z) h_n(z), \qquad |z - z_n| \leqslant \frac{l}{2}.$$

Тогда

$$f_n^{(k)}(z_n) = P_n^{(k)}(z_n) = a_{kn}, \quad 0 \leqslant k \leqslant r, \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{22}$$

$$|f'_{n\overline{z}}(z)| = |P_n(z) h'_{n\overline{z}}(z)| \leqslant c_r \cdot \frac{1}{l} M_0. \tag{23}$$

Введем обозначения

$$K_n^+ = K_n \cap D_+, \qquad K_n^- = K_n \cap D_-.$$

Тогда соотношения (17) и (19) влекут, что

$$\int\limits_{K_n^+} f'_{n\overline{z}}(z) dA(z) = \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial K_n^+} f_n(z) dz = \frac{1}{2i} \int\limits_{[z_n - \frac{l}{2}, z_n + \frac{l}{2}]} f_n(z) dz = 0 \tag{24}$$

и, аналогично,

$$\int\limits_{K_n^-} f'_{n\overline{z}}(z) dA(z) = 0, \tag{25}$$

где $dA(z)$ – двумерная мера Лебега.

Наконец, определим функцию f следующим образом:

$$f(z) = \begin{cases} f_n(z), & \text{если } \ |z - z_n| \leqslant \frac{l}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{если } \ z \notin \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \{z : |z - z_n| \leqslant \frac{l}{2}\}. \end{cases} \tag{26}$$

Функция f лежит в классе $C^1(\mathbb{C})$. Отметим, что при $|w - z_n| \leqslant \frac{l}{2}$ верна формула

$$f_n(w) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|z - z_n| < \frac{l}{2}} \frac{f'_{n\overline{z}}(z)}{z - w} dA(z), \tag{27}$$

если же $|w - z_n| > \frac{l}{2}$, то, с учетом соотношений (17) и определения функции f_n, получим равенство

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|z-z_n|<\frac{l}{2}} \frac{f'_{n\overline{z}}(z)}{z-w}dA(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|z-z_n|<\frac{l}{2}} \Big(\frac{f_n(z)}{z-w}\Big)'_{\overline{z}}dA(z) = 0. \qquad (28)$$

Из соотношений (26)–(28) находим, что при любом $w \in \mathbb{C}$ справедливо представление

$$f(w) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|z-z_n|<\frac{l}{2}} \frac{f'_{\overline{z}}(z)}{z-w}dA(z). \qquad (29)$$

Учитывая соотношения (17), отметим что в (29) $\int\limits_{|z-z_n|<\frac{l}{2}} \cdots = \int\limits_{K_n} \cdots$.

Положим $m_0 = 34$; постоянная $c_{m_0} = c_{34}$ определена равенством

$$c_{m_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^{m_0}dt = 1. \qquad (30)$$

Далее, для $v > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$, $w \in \Gamma$ зададим функции $R(z, w, v, s)$ (см. [2]):

$$R(z,w,v,s) = \begin{cases} \frac{1}{z^+_{v,s}(z)-w}\cdot\Big(1+\sum\limits_{\nu=1}^{3}\Big(\frac{z^+_{v,s}(z)-z}{z^+_{v,s}(z)-w}\Big)^{\nu}\Big), & z \in D_+; \\ \frac{1}{z^-_{v,s}(z)-w}\cdot\Big(1+\sum\limits_{\nu=1}^{3}\Big(\frac{z^-_{v,s}(z)-z}{z^-_{v,s}(z)-w}\Big)^{\nu}\Big), & z \in D_-. \end{cases} \qquad (31)$$

Теперь положим $\sigma_1 = \frac{\sigma}{m_0}$,

$$F_\sigma(w) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{K_n} f'_{\overline{z}}(z)\Big(c_{m_0}\cdot\frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Big)^{m_0}R(z,w,\frac{1}{\sigma_1},t)dt\Big)dA(z). \qquad (32)$$

§3. Основная лемма

Введем следующую характеристику, связанную с функциями z^+ и z^-:

$$\rho^*_v(z) = \max(|z^+_{v,0}(z)-z|, |z^-_{v,0}(z)-z|), \quad z \in \Gamma. \qquad (33)$$

Из свойств конформных отображений вблизи границы, найденных в [5], вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Существуют постоянные* $c_2(\frac{L}{l}), c_2'(\frac{L}{l})$ *такие, что при* $v > 0$ *справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \rho_v^*(z_n) &\leqslant c_2\Big(\frac{L}{l}\Big)v, && n \in \mathbb{Z}, \\ \rho_v^*(z) &\leqslant c_2'\Big(\frac{L}{l}\Big)(v + v^{\frac{1}{2}}), && z \in \Gamma. \end{aligned} \tag{34}$$

Сформулируем основное вспомогательное утверждение данной работы.

Основная лемма. *Пусть функция* F_σ *определена в соотношении* (32)*, где фигурирующие в ее определении функции* R *и* f *определены, соответственно, в* (31) *и* (26)*. Тогда* F_σ *– целая функция экспоненциального типа не выше* σ*, для которой с некоторой постоянной* $\widetilde{c}_{1r,\sigma}(l, L)$ *справедливо соотношение*

$$\|F_\sigma\|_{B_\sigma} \leqslant \widetilde{c}_{1r,\sigma}(l, L)M_0 \cdot \rho^*_{\frac{1}{\sigma}},\ M_0 = \|\{A_k\}_{k=0}^r\|,\ \rho^*_{\frac{1}{\sigma}} = \sup_{z\in\Gamma} \rho^*_{\frac{1}{\sigma}}(z), \tag{35}$$

и с постоянной $c_{3r}(\frac{L}{l})$ *имеются оценки*

$$\begin{aligned} &|F_\sigma^{(k)}(z_n) - a_{kn}| \leqslant c_{3r}\Big(\frac{L}{l}\Big) \cdot \frac{\rho^*_{\frac{1}{\sigma}}(z_n)}{l} \cdot \frac{1}{l^k} M_0, \\ &|F_\sigma(z) - f(z)| \leqslant c_r \cdot c_{3r}\Big(\frac{L}{l}\Big) \cdot \frac{\rho^*_{\frac{1}{\sigma}}(z)}{l} M_0, \quad z \in \Gamma,\ \ 0 \leqslant k \leqslant r, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{36}$$

постоянная c_r *взята из соотношения* (23)*. Далее,*

$$c_{1r,\sigma}(l, L) = \widetilde{c}_{1r,\sigma}(l, L)\rho^*_{\frac{1}{\sigma}}.$$

Обоснование неравенств (35) и (36) дадим в конце работы.

Полагая $c_{4r}\Big(\frac{L}{l}\Big) = c_r \cdot c_{3r}\Big(\frac{L}{l}\Big) \cdot c_2\Big(\frac{L}{l}\Big)$, из (36) и (34) найдем, что при $\sigma > 0$ функция F_σ удовлетворяет соотношениям

$$|F_\sigma^{(k)}(z_n) - a_{kn}| \leqslant c_{4r}\Big(\frac{L}{l}\Big) \cdot \frac{1}{\sigma l} \cdot \frac{1}{l^k} M_0. \tag{37}$$

Предполагая неравенства (37) выполненными, закончим доказательство теоремы.

§4. Окончание доказательства теоремы

Выберем $q, 0 < q < 1$. Постоянная $c_r(t)$ в формулировке теоремы будет зависеть еще и от q; чтобы получить постоянную $c_r(t)$, зависящую лишь от t и r, можно взять $q = \frac{1}{2}$. Выберем σ_0 из равенства

$$c_{4r}\Big(\frac{L}{l}\Big) \cdot \frac{1}{\sigma_0 l} = q, \qquad \text{т.е.} \qquad \sigma_0 = \frac{c_{4r}(\frac{L}{l})}{q}\frac{1}{l}.$$

При таком выборе числа σ_0 оценка (37) принимает вид

$$|F^{(k)}_{\sigma_0}(z_n) - a_{kn}| \leqslant q \cdot \frac{1}{l^k} M_0. \tag{38}$$

Положим

$$a^0_{kn} = a_{kn},\ b^0_{kn} = F^{(k)}_{\sigma_0}(z_n),$$
$$F_{\sigma_0 0}(z) = F_{\sigma_0}(z),\ B_{k0} = \{b^0_{kn}\}_{n\in\mathbb{Z}},\ A_{k0} = \{a^0_{kn}\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Неравенства (38) и определение (3) нормы $\|\{A_k\}^r_{k=0}\|$ дают соотношение

$$\|\{B_{k0} - A_{k0}\}^r_{k=0}\| \leqslant qM_0. \tag{39}$$

Пусть $A_{k1} = A_{k0} - B_{k0}$, $0 \leqslant k \leqslant r$, $A_{k1} = \{a^1_{kn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Оценки (39) дают условие $\|\{A_{k1}\}^r_{k=0}\| \leqslant qM_0 = q\|\{A_{k0}\}^r_{k=0}\|$. Полагаем, что $M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \|\{A_{k1}\}^r_{k=0}\| > 0$, поскольку в противном случае $F^{(k)}_{\sigma_0}(z_n) = a_{kn}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant r$, и интерполяция уже установлена. Для последовательностей A_{k1} повторим построение, проведенное для $\{A_k\}^r_{k=0}$, с тем же σ_0, что в соотношении (38), найдем функцию $F_{\sigma_0 1}(z)$ такую, что

$$\begin{aligned} \|F_{\sigma_0 1}\|_{B_{\sigma_0}} \leqslant \widetilde{c}_{1r,\sigma_0}(l,L) M_1 \rho^*_{\frac{1}{\sigma_0}} \leqslant c_{1r,\sigma_0}(l,L) q M_0,\\ c_{1r,\sigma_0}(l,L) = \widetilde{c}_{1,\sigma_0}(l,L)\rho^*_{\frac{1}{\sigma_0}}, \end{aligned} \tag{40}$$

$$|F^{(k)}_{\sigma_0 1}(z_n) - a^1_{kn}| \leqslant q \cdot \frac{1}{l^k} M_1, \quad 0 \leqslant k \leqslant r, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{41}$$

Положим

$$b^1_{kn} = F^{(k)}_{\sigma_0 1}(z_n), \quad B_{k1} = \{b^1_{kn}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad A_{k2} = A_{k1} - B_{k1}. \tag{42}$$

Пусть $M_2 = \|\{A_{k2}\}^r_{k=0}\|$. Соотношения (36), (41) и (42) влекут, что $M_2 \leqslant qM_1$. Если $M_2 = 0$, то $A_k = B_{k0} + B_{k1}$, $0 \leqslant k \leqslant r$, и это дает интерполяцию данных A_k значениями функции $\Big(F_{\sigma_0 0}(z_n) + F_{\sigma_0 1}(z_n)\Big)^{(k)}$.

Если же $M_2 > 0$, то к последовательностям A_{k2} применяем предыдущую конструкцию и т.д.

Если уже построены последовательности $\{A_{k\nu}\}_{k=0}^{r}$, $0 \leqslant \nu \leqslant m$,

$$M_\nu \overset{\text{def}}{=} \|\{A_{k\nu}\}_{k=0}^{r}\| \leqslant qM_{\nu-1}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant m, \tag{43}$$

то, в случае $M_m = 0$ имеем интерполяцию

$$A_{km} = \Big\{ \sum_{\nu=0}^{m-1} F_{\sigma_0\nu}^{(k)}(z_n) \Big\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant r,$$

при этом неравенства (35) и (43) дают соотношение

$$\Big\| \sum_{\nu=0}^{m-1} F_{\sigma_0\nu} \Big\|_{B_{\sigma_0}} \leqslant c_{1r,\sigma_0}(l,L) \sum_{\nu=0}^{m-1} M_\nu < \frac{c_{1r,\sigma_0}(l,L)M_0}{1-q}.$$

Если же $M_m > 0$, то находим функцию $F_{\sigma_0 m} \in B_{\sigma_0}$ с σ_0, взятым из (38), такую, что

$$|F_{\sigma_0 m}^{(k)}(z_n) - a_{kn}^m| \leqslant q \cdot \frac{1}{l^k} M_m,$$

полагаем $B_{k,m+1} = \{F_{\sigma_0 m}^{(k)}(z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и продолжаем конструкцию, получая по ходу рассуждений, что $M_{m+1} \leqslant qM_m$.

Пусть

$$F_{\sigma_0}^{\text{int}}(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} F_{\sigma_0 m}(z). \tag{44}$$

Так как формулы (35) и (43) влекут, что

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{\sigma_0}^{\text{int}}(x)| &\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \|F_{\sigma_0 m}\|_{B_{\sigma_0}} \\ &\leqslant c_{r,\sigma_0}(l,L) \sum_{m=0}^{\infty} q^m M_0 = c_{r,\sigma_0}(l,L)\frac{M_0}{1-q}, \end{aligned}$$

то

$$F_{\sigma_0}^{\text{int}} \in B_{\sigma_0}, \ \|F_{\sigma_0}^{\text{int}}\|_{B_{\sigma_0}} \leqslant c_{r,\sigma_0}(l,L)\frac{M_0}{1-q}$$

и определение последовательностей A_{km}, B_{km} и равенство (44) влекут, что

$$\{(F_{\sigma_0}^{\text{int}}(z_n))^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}} = A_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant r,$$

что доказывает теорему.

§5. Доказательство основной леммы

Так как $\frac{1}{\zeta-w}+\sum\limits_{\nu=1}^{3}\frac{(\zeta-z)^\nu}{(\zeta-w)^{\nu+1}}-\frac{1}{z-w}=-\left(\frac{\zeta-z}{\zeta-w}\right)^4\cdot\frac{1}{z-w}$, то, учитывая определение (32) функции $F_\sigma(z)$, представление (29) функции $f(w)$ и равенство (30), при $w\in\mathbb{C}$ получаем формулу

$$F_\sigma(w)-f(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{K_n}f'_{\overline{z}}(z)\cdot\Biggl(c_{m_0}\cdot\frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Bigr)^{m_0}\left(\frac{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)-z}{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)-w}\right)^4\frac{dt}{z-w}\Biggr)dA(z). \tag{45}$$

В равенстве (45) при $z\in D_+$ выбирается функция $z^{+}_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)$, а при $z\in D_-$ выбирается функция $z^{-}_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)$. Напомним, что $m_0=34$.

Предположим вначале, что $w\in\Gamma$. Из (45) находим, что

$$|F_\sigma(w)-f(w)|\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{K_n}|f'_{\overline{z}}(z)|\cdot\Biggl(c_{m_0}\cdot\frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Bigr)^{m_0}\left|\frac{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)-z}{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)-w}\right|^4\frac{dt}{|z-w|}\Biggr)dA(z). \tag{46}$$

Применяя лемму 1, из соотношений (11), (12) и (46) находим, что

$$|F_\sigma(w)-f(w)|\leqslant c'_{abs}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{K_n}|f'_{\overline{z}}(z)|\cdot\Biggl(c_{m_0}\cdot\frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Bigr)^{34}(\sigma_1|t|+1)^{32}\cdot\left|\frac{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z)-z}{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z)-w}\right|^4\cdot\frac{1}{|z-w|}dt\Biggr)dA(z) \\ \leqslant c''_{abs}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{K_n}|f'_{\overline{z}}(z)|\cdot\left|\frac{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z)-z}{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z)-w}\right|^4\cdot\frac{1}{|z-w|}\,dA(z). \tag{47}$$

Фигурирующие далее постоянные $c_6, c_7, \ldots$ зависят от $\frac{L}{l}$. Напомним, что $K_n^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} K_n \bigcap D_{\pm}$.

В силу известных свойств конформных отображений, см. [5], при $z \in D_+$, $|z - w| \leqslant |z^+_{\frac{1}{\sigma_1},0}(w) - w|$ справедливы соотношения

$$\left|z^+_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - z\right| \leqslant c_6 \rho^+_{\frac{1}{\sigma_1}}(w), \ \left|z^+_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - w\right| \geqslant c_7 \rho^+_{\frac{1}{\sigma_1}}(w), \qquad (48)$$

и аналогичные неравенства выполняются при $z \in D_-$, $|z-w| \leqslant \rho^-_{\frac{1}{\sigma_1}}(w)$, где для краткости $\rho^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1}}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \left|z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},0}(w) - w\right|$. Положим

$$\begin{aligned} \Delta_0^{\pm} &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} K_n^{\pm} \bigcap \{z : |z - w| \leqslant \rho^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1}}(w)\}, \\ \Delta_\nu^{\pm} &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} K_n^{\pm} \bigcap \{z : 2^{\nu-1}\rho^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1}}(w) < |z - w| \leqslant 2^{\nu}\rho^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1}}(w)\}, \nu \geqslant 1. \end{aligned} \qquad (49)$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{K_n^{\pm}} \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int\limits_{\Delta_\nu^{\pm}} \cdots .$$

В силу определения (6) и соотношений (23)–(26) при любом $z \in \mathbb{C}$ справедлива оценка $|f'_{\overline{z}}(z)| \leqslant c^1_{abs} \cdot \frac{M_0}{l}$, тогда из (48) и (49) получаем, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Delta_0^{\pm}} |f'_{\overline{z}}(z)| \cdot \left|\frac{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - z}{z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - w}\right|^4 \frac{dA(z)}{|z - w|} \\ &\qquad \leqslant c_8 M_0 \cdot \frac{1}{l} \int\limits_{|z-w|\leqslant\rho^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1}}(w)} \frac{dA(z)}{|z - w|} \leqslant 2\pi c_8 M_0 \frac{\rho^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1}}(w)}{l}. \end{aligned} \qquad (50)$$

Вновь обращаясь к свойствам конформных отображений [5], учтем следующее соотношение: если $w \in \Gamma$, $z \in D_{\pm}$, $|z - w| = R \geqslant \rho^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1}}(w)$, то $|z^{\pm}_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - w| \geqslant c_9 R$. Данное свойство, как и предыдущие, используемые в этой работе, в [5] получено в случае, когда D_+ или D_- компактно, перенесение соответствующих утверждений на рассматриваемую нами ситуацию осуществляется отображениями $\omega^{\pm}_B(z) = \frac{1}{z\pm 2Li-B}$, $B \in \mathbb{R}$, областей $\overline{D}_{\pm}$ на компактные области.

Теперь, применяя соотношения (13) и (14) леммы 2, получаем, что при $z \in \Delta_\nu^\pm$, $\nu \geqslant 1$, выполнено

$$\begin{aligned} |z^\pm_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - z| &\leqslant c_2 \Big| z^\pm_{\frac{1}{\sigma_1},0}(w) - w \Big|^{\frac{1}{2}} \Big(|z-w| + \Big| z^\pm_{\frac{1}{\sigma_1},0}(w) - w \Big| \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant c_{10} \Big(\rho^\pm_{\frac{1}{\sigma_1}}(w) \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot |z-w|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{51}$$

Отмечая, что при $z \in \Delta_\nu^\pm, \nu \geqslant 1$, имеется также соотношение

$$\Big| z^\pm_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - w \Big| \geqslant c_9 \cdot 2^{\nu-1} \rho^\pm_{\frac{1}{\sigma_1}}(w),$$

из (6), (23)–(26) заключаем, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Delta_n^\pm} |f'_{\overline{z}}(z)| \cdot \left| \frac{z^\pm_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - z}{z^\pm_{\frac{1}{\sigma_1},0}(z) - w} \right|^4 \frac{dA(z)}{|z-w|} \\ &\qquad \leqslant c_{11} \cdot \frac{M_0}{l} \int\limits_{\Delta_n^\pm} \frac{(\rho^\pm_{\frac{1}{\sigma_1}}(w))^2}{|z-w|^3} dA(z) \leqslant c_{12} \frac{M_0}{l} \cdot \frac{(\rho^\pm_{\frac{1}{\sigma_1}}(w))^2}{2^\nu \rho^\pm_{\frac{1}{\sigma_1}}(w)} \\ &\qquad = c_{12} M_0 \frac{\rho^\pm_{\frac{1}{\sigma_1}}(w)}{l} \cdot 2^{-\nu}. \end{aligned} \tag{52}$$

Из (48), (49), (50) получаем утверждение (36) основной леммы при $k = 0$.

Случай $k > 0, w \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K_n$ получается аналогично предыдущему, если при $k \in \mathbb{N}$ учесть соотношение

$$\begin{aligned} \big(F_\sigma(w) - f(w)\big)^{(k)} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n} f'_{\overline{z}}(z) \cdot \Bigg(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0 - 1}} \\ &\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\sin t\sigma_1}{t} \Big)^{m_0} \Bigg(\Big(\frac{z^\pm_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^\pm_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w} \Big)^4 \frac{1}{z-w} \Bigg)^{(k)}_{w^k} dt \Bigg) dA(z). \end{aligned}$$

Для оценки $\|F_\sigma\|_{B_\sigma}$ преобразуем представление (45). Пусть $w \in \Gamma$. Тогда (45) влечет соотношение

$$F_\sigma(w) - f(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^+} \cdots + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^-} \cdots \stackrel{\text{def}}{=} S_+(w) + S_-(w). \tag{53}$$

Применяя соотношения (24) и (25), получаем, что при $w \notin K_n$ справедливы равенства

$$\int\limits_{K_n^{\pm}} f'_{n\overline{z}}(z) \cdot \frac{1}{z_n - w} dA(z) = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned}\int\limits_{K_n^{\pm}} f'_{n\overline{z}}(z) \cdot \frac{1}{z - w} dA(z) &= \int\limits_{K_n^{\pm}} f'_{n\overline{z}}(z) \Big(\frac{1}{z - w} - \frac{1}{z_n - w} \Big) dA(z), \\ &= \int\limits_{K_n^{\pm}} f'_{n\overline{z}}(z) \frac{z_n - z}{(z - w)(z_n - w)} dA(z),\end{aligned}$$

откуда при $|w - z_n| \geqslant l$ в силу соотношения (23) заключаем, что

$$\begin{aligned}\Big| \int\limits_{K_n^{\pm}} f'_{n\overline{z}}(z) \frac{1}{z - w} dA(z) \Big| &\leqslant c_{0r} l \cdot \frac{M_0}{l} \cdot l^2 \cdot \frac{1}{|z_n - w|^2} \\ &= c_{0r} \frac{M_0 l^2}{|z_n - w|^2}.\end{aligned} \tag{54}$$

Если K_{n_0} таково, что $\min\limits_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{dist}(w, K_n) = \operatorname{dist}(w, K_{n_0})$, то при $n \neq n_0$ в силу условия (1) выполняется оценка

$$|z_n - w| \geqslant c_{abs}(|z_n - z_{n_0}| + |w - z_{n_0}|) \geqslant c_{abs} l |n - n_0|, \tag{55}$$

в таком случае из (54) и (55) находим, что

$$\sum_{\substack{n \neq n_0 \\ n \in \mathbb{Z}}} \Big| \int\limits_{K_n^{\pm}} f'_{n\overline{z}}(z) \frac{1}{z - w} dA(z) \Big| \leqslant c_{0r} \cdot c_{abs} M_0 l^2 \sum_{\substack{n \neq n_0 \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{l^2 (n - n_0)^2} = c_{2r} M_0. \tag{56}$$

Оценка (56) вместе с неравенством (23) показывает, что при любом $w \in \mathbb{C}$ определены функции

$$f_{\pm}(w) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int\limits_{K_n^{\pm}} f'_{n\overline{z}}(z) \frac{1}{z - w} dA(z), \tag{57}$$

для которых выполняются соотношения

$$|f_{\pm}(w)| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big| \int\limits_{K_n^{\pm}} f'_{n\overline{z}}(z) \frac{1}{z - w} dA(z) \Big| \leqslant c_{3r} M_0 \tag{58}$$

и

$$f_+(w)+f_-(w)=-\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Bigl(\int\limits_{K_n^+}\cdots+\int\limits_{K_n^-}\cdots\Bigr)=f(w). \qquad (59)$$

При $w\in\Gamma\bigcup D_-$ определим функцию $F_\sigma^+(w)$, а при $w\in\Gamma\bigcup D_+$ определим функцию $F_\sigma^-(w)$ из соотношений, соответственно,

$$\begin{aligned}S_+(w)&\stackrel{\mathrm{def}}{=}F_\sigma^+(w)-f_+(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{K_n^+}f'_{n\overline{z}}(z)\cdot\Bigl(c_{m_0}\cdot\frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}}\\&\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Bigr)^{m_0}\cdot\left(\frac{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)-z}{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)-w}\right)^4\frac{1}{z-w}dt\Bigr)dA(z),\end{aligned} \qquad (60)$$

$$\begin{aligned}S_-(w)&\stackrel{\mathrm{def}}{=}F_\sigma^-(w)-f_-(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{K_n^-}f'_{n\overline{z}}(z)\cdot\Bigl(c_{m_0}\cdot\frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}}\\&\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Bigr)^{m_0}\cdot\left(\frac{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)-z}{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z)-w}\right)^4\frac{1}{z-w}dt\Bigr)dA(z).\end{aligned} \qquad (61)$$

Проводя оценки, аналогичные оценкам (50)–(52), для функции $S_+(w)$ при $w\in\Gamma\bigcup D_-$, для функции $S_-(w)$ при $w\in\Gamma\bigcup D_+$ с помощью представлений (60) и (61) установим неравенства

$$|S_+(w)|\leqslant c_{4r}\Bigl(\frac{L}{l}\Bigr)\rho^+_{\frac{1}{\sigma_1}}\cdot M_0/l,\quad w\in\Gamma\bigcup D_-, \qquad (62)$$

где $\rho^+_{\frac{1}{\sigma_1}}=\sup\limits_{z\in\Gamma}\rho^+_{\frac{1}{\sigma_1}}(z)$ и

$$|S_-(w)|\leqslant c_{4r}\Bigl(\frac{L}{l}\Bigr)\rho^-_{\frac{1}{\sigma_1}}\cdot M_0/l,\quad w\in\Gamma\bigcup D_+, \qquad (63)$$

аналогично $\rho^-_{\frac{1}{\sigma_1}}=\sup\limits_{z\in\Gamma}\rho^-_{\frac{1}{\sigma_1}}(z)$. Теперь из (58) и (62) при $w\in\Gamma\bigcup D_-$ находим, что

$$\begin{aligned}|F_\sigma^+(w)|&\leqslant|F_\sigma^+(w)-f_+(w)|+|f_+(w)|\\&\leqslant c_{4r}\Bigl(\frac{L}{l}\Bigr)\rho^+_{\frac{1}{\sigma_1}}\cdot M_0/l+c_{3r}M_0;\end{aligned} \qquad (64)$$

из (58) и (63) при $w \in \Gamma \bigcup D_+$ находим, что

$$|F_\sigma^-(w)| \leqslant |F_\sigma^-(w) - f_-(w)| + |f_-(w)| \\ \leqslant c_{4r}\Big(\frac{L}{l}\Big)\rho^-_{\frac{1}{\sigma_1}} \cdot M_0/l + c_{3r}M_0. \quad (65)$$

Далее, соотношения (60), (61) и (57) показывают, что функции $S_+(w)$ и $f_+(w)$ аналитичны в D_-, а функции $S_-(w)$ и $f_-(w)$ аналитичны в D_+, поэтому функция $F_\sigma^+(w)$ аналитична в D_- и, в силу (64), ограничена в D_-, а функция $F_\sigma^-(w)$ аналитична в D_+ и, в силу (65), ограничена в D_+.

Примем теперь во внимание, что при $z \in \Gamma \bigcup D_+$ функция $z^+_{v,t}(z) = \psi_+(\varphi_+(z)+t+iv)$ аналитична по t в верхней полуплоскости, а функция $z^-_{v,t}(z) = \psi_-(\varphi_-(z)+t-iv)$ при $z \in \Gamma \bigcup D_-$ аналитична в нижней полуплоскости. Из этого следует, что при фиксированном $z \in D_-$ и $w \in D_+$ функция

$$\left(\frac{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w}\right)^4 \frac{1}{z-w} \tag{66}$$

аналитична по t в нижней полуплоскости, и при фиксированных $z \in D_+$ и $w \in D_-$ функция

$$\left(\frac{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w}\right)^4 \frac{1}{z-w} \tag{67}$$

аналитична по t в верхней полуплоскости. Тогда (60) и (67) влекут, что при фиксированном $w \in D_-$ формулу для $S_+(w)$ можно переписать следующим образом:

$$S_+(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^+} f'_{n\overline{z}}(z) \cdot \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ \times \int\limits_{-\infty+iT}^{\infty+iT} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^{m_0} \left(\frac{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w}\right)^4 \frac{1}{z-w} dt\Big) dA(z), \tag{68}$$

где в (68) $T > 0$ – любое число, а при фиксированном $w \in D_+$, используя (61) и (66), формулу для $S_-(w)$ можно переписать так:

$$\begin{aligned} S_-(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^-} f'_{n\overline{z}}(z) \cdot \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ \times \int\limits_{-\infty-iT}^{\infty-iT} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^{m_0} \left(\frac{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w}\right)^4 \frac{1}{z-w} dt \Big) dA(z), \end{aligned} \tag{69}$$

и в (69) $T > 0$ – любое число. Затем, соотношения (57), (30) и (68) влекут, что при фиксированном $w \in D_-$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} F^+_\sigma(w) = S_+(w) + f_+(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^+} f'_{n\overline{z}}(z) \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ \times \int\limits_{-\infty+iT}^{\infty+iT} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^{m_0} \cdot \left(\left(\frac{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w}\right)^4 - 1 \right) \frac{1}{z-w} dt \Big) dA(z) \\ = - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^+} f'_{n\overline{z}}(z) \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ \times \int\limits_{-\infty+iT}^{\infty+iT} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^{m_0} \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\left(z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z\right)^\nu}{\left(z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w\right)^{\nu+1}} dt \Big) dA(z). \end{aligned} \tag{70}$$

При $V > 0$, $T > 0$ положим

$$\Gamma^+_{V+T} \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = z^+_{V,t+iT}(z), \quad z \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}\}. \tag{71}$$

Тогда из (70) и (71) следует, что функция F_σ^+ аналитична в области $D^-_{\frac{1}{\sigma_1}+T}$, ограниченной кривой $\Gamma^+_{\frac{1}{\sigma_1}+T}$ и содержащей область D_-. Аналогично, при фиксированном $w \in D_+$ из (69) имеем

$$F_\sigma^-(w) = S_-(w) + f_-(w) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^-} f'_{n\bar{z}}(z)\Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ \times \int\limits_{-\infty-iT}^{\infty-iT} \left(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\right)^{m_0} \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\Big(z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z\Big)^\nu}{\Big(z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w\Big)^{\nu+1}} dt\Big) dA(z). \tag{72}$$

При $V > 0, T > 0$, пусть

$$\Gamma^-_{V+T} \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = z^-_{V,t+iT}(z), \quad z \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}\}. \tag{73}$$

Из (72) и (73) следует, что функция F_σ^- аналитична в области $D^+_{\frac{1}{\sigma_1}+T}$, ограниченной кривой $\Gamma^-_{\frac{1}{\sigma_1}+T}$ и содержащей область D_+.

Рассмотрим кривые $\Gamma^\pm_{V+T}$, $V, T > 0$. По определениям (9) и (71) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma^+_{V+T} &= \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = z^+_{V,t+iT}(z),\ z \in \Gamma,\ t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \psi_+(\varphi_+(z) + t + i(T+V)),\ z \in \Gamma,\ t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \psi_+(\varphi_+(z) + i(T+V)),\ z \in \Gamma\}. \end{aligned} \tag{74}$$

В соотношении (74) мы учли, что

$$\mathbb{R} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \varphi_+(z),\ z \in \Gamma\} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \varphi_+(z) + t,\ z \in \Gamma,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Таким образом, из (74) получаем, что

$$\Gamma^+_{V+T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = z^+_{V+T,0}(z),\ z \in \Gamma\} \tag{75}$$

и, аналогично,

$$\Gamma^-_{V+T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = z^-_{V+T,0}(z),\ z \in \Gamma\}. \tag{76}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *При $y \neq 0$ справедливы соотношения*

$$|\operatorname{Im} \psi_+(x+iy) - y| \leqslant L, \quad y > 0, \tag{77}$$

$$|\operatorname{Im} \psi_-(x+iy) - y| \leqslant L, \quad y < 0, \tag{78}$$

где L определено в (2).

Доказательство. Докажем соотношение (77). Построение кривой Γ и условие (2) показывают, что

$$\sup_{z\in\Gamma}|\operatorname{Im} z| = \sup_{z\in I_n^0, n\in\mathbb{Z}}|\operatorname{Im} z| = \sup_{n\in\mathbb{Z}}|y_n| \leqslant L,$$

что влечет свойство

$$|\operatorname{Im}\psi_+(x)| \leqslant L, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{79}$$

В силу условия (7) и результатов Б. Я. Левина [6], для функции $U(z) = \operatorname{Im}\psi_+(z)$ справедливо представление

$$U(x+iy) = y + V(x+iy), \tag{80}$$

где V – ограниченная в $\mathbb{C}_+$ гармоническая функция. Из (79) находим, что в таком случае (77) следует из (80) и принципа максимума. Соотношение (78) доказывается аналогично. Представление, аналогичное (80), получается для $\operatorname{Im}\psi_-(x+iy)$ из нормировки (8), далее рассуждения повторяют рассуждения для функции ψ_+. Лемма доказана. $\square$

Из (77) при $z\in\Gamma$, $V+T>0$ находим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} z^+_{V+T,0}(z) &= \operatorname{Im}\psi_+(\varphi_+(z)+i(T+V))\\ &\leqslant \operatorname{Im}\varphi_+(z)+T+V+L\\ &= T+V+L,\end{aligned} \tag{81}$$

$$\operatorname{Im} z^+_{V+T,0}(z) \geqslant \operatorname{Im}\varphi_+(z)+V+T-L = T+V-L. \tag{82}$$

Аналогично, при $z\in\Gamma$, $V+T>0$ получаем

$$-T-V-L \leqslant \operatorname{Im} z^-_{V+T,0}(z) \leqslant -T-V+L. \tag{83}$$

Обозначим

$$\mathbb{C}^+_A = \{z = x+iy : y>A\}, \quad A\in\mathbb{R},$$
$$\mathbb{C}^-_A = \{z = x+iy : y<A\}, \quad A\in\mathbb{R}.$$

Из соотношений (75), (76), (81)–(83) при $T\geqslant 3L$ заключаем, что

$$D^+_{\frac{1}{\sigma_1}+T} \supset \mathbb{C}^+_{-\frac{1}{\sigma_1}-T+L}, \qquad D^-_{\frac{1}{\sigma_1}+T} \supset \mathbb{C}^-_{\frac{1}{\sigma_1}+T-L}. \tag{84}$$

Из соотношений (70)–(73), как уже ранее было отмечено, и из (84) в силу произвольности T заключаем, что F^+_σ, F^-_σ, значит, и $F_\sigma = F^+_\sigma + F^-_\sigma$ являются целыми функциями.

Для проверки как соотношения (35) основной леммы, так и того, что F_σ – целая функция экспоненциального типа, достаточно оценить $\|F^\pm_\sigma\|_{B_\sigma}$ и оценить рост F^+_σ в D_+, а рост F^-_σ в D_-, поскольку функции

F_σ^+, F_σ^-, как было установлено в соотношениях (64) и (65), ограничены в D_-, D_+ соответственно. Рассмотрим w, лежащие в области $D^-_{\frac{1}{\sigma_1}+T}$; случай $w \in D^+_{\frac{1}{\sigma_1}+T}$ рассматривается аналогично. Положим в формуле (70) $T = 3L + l$. В силу (84) $D^-_{\frac{1}{\sigma_1}+3L+l} \supset \mathbb{C}^-_{\frac{1}{\sigma_1}+L+l}$, что влечет

$$D^-_{\frac{1}{\sigma_1}+3L+l} \supset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{z : |z - z_n| \leqslant \frac{l}{2}\}. \tag{85}$$

Возьмем $w \in \mathbb{R} + i(\frac{1}{\sigma_1} + L + l)$. Тогда $f(w) = 0$ в силу определения (26) функции $f(z)$. Следовательно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} F_\sigma(w) = F_\sigma(w) - f(w) = (F_\sigma^+(w) - f_+(w)) \\ + (F_\sigma^-(w) - f_-(w)) = S_+(w) + S_-(w). \end{aligned} \tag{86}$$

Применим для представления функции $F_\sigma^+(w)$ формулу (70) с $T_1 = 3L + l + \frac{1}{\sigma_1}$. Тогда, аналогично формуле (68), получим

$$\begin{aligned} S_+(w) = &\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^+} f'_{n\overline{z}}(z) \cdot \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\ &\times \int\limits_{-\infty+iT_1}^{\infty+iT_1} \Big(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Big)^{m_0} \cdot \left(\frac{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w} \right)^4 \frac{1}{z - w} dt \Big) dA(z). \end{aligned} \tag{87}$$

Для представления функции $F_\sigma^-(w)$ применим формулу (72) с $T = 0$, тогда для $S_-(w)$ получается уже встречавшаяся формула (61), и в итоге из (84), (61) и (86) находим, что при $\operatorname{Im} w = \frac{1}{\sigma_1} + L + l$ справедливо соотношение

$$
\begin{aligned}
F_\sigma(w) = &\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^+} f'_{n\overline{z}}(z) \cdot \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\
&\times \int\limits_{-\infty+iT_1}^{\infty+iT_1} \Big(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Big)^{m_0} \cdot \left(\frac{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^+_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w} \right)^4 \frac{1}{z-w} dt \Big) dA(z) \\
&+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{K_n^-} f'_{n\overline{z}}(z) \cdot \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\
&\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Big)^{m_0} \cdot \left(\frac{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w} \right)^4 \frac{1}{z-w} dt \Big) dA(z).
\end{aligned}
\tag{88}
$$

Для оценок интегралов в (88) учтем, что при $t = x + iT_1$, $x \in \mathbb{R}$, справедливо неравенство

$$
\Big|\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Big| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{e^{(ix-T_1)\sigma_1} - e^{(-ix+T_1)\sigma_1}}{x+iT_1} \right| \leqslant \frac{e^{T_1\sigma_1}}{\sqrt{x^2+T_1^2}},
$$

а при $t \in \mathbb{R}$ – неравенство

$$
\Big|\frac{\sin t\sigma_1}{t}\Big| < \frac{2\sigma_1}{1+|t|\sigma_1},
$$

поэтому (88) влечет неравенство

$$
\begin{aligned}
|F_\sigma(w)| \leqslant c_{abs} &\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{K_n^+} |f'_{n\overline{z}}(z)| \cdot \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \cdot e^{T_1\sigma} \\
&\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+T_1^2)^{m_0/2}} \left| \frac{z^+_{\frac{1}{\sigma_1}+T,t}(z) - z}{z^+_{\frac{1}{\sigma_1}+T_1,t}(z) - w} \right|^4 \frac{1}{|z-w|} dt \Big) dA(z) \\
&+ c_{abs} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{K_n^-} |f'_{n\overline{z}}(z)| \cdot \Big(c_{m_0} \cdot \frac{1}{\sigma_1^{m_0-1}} \\
&\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1^{m_0}}{(1+|t|\sigma_1)^{m_0}} \left| \frac{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - z}{z^-_{\frac{1}{\sigma_1},t}(z) - w} \right|^4 \frac{1}{|z-w|} dt \Big) dA(z).
\end{aligned}
\tag{89}
$$

Дальнейшие оценки интегралов в (89) проводятся с помощью рассуждений, повторяющих действия в (50)–(52), что в итоге дает соотношение

$$|F_\sigma(w)| \leqslant c_{5r}(l,L)\cdot e^{T_1\sigma}M_0\cdot \rho^-_{\frac{1}{\sigma_1}}(z_0^-) \leqslant c_{5r}(l,L)\cdot e^{T_1\sigma}M_0\cdot \rho^*_{\frac{1}{\sigma_1}}, \qquad (90)$$

где $z_0^- \in \Gamma$ – ближайшая к w точка на Γ. Подобным же образом, взяв $w \in \mathbb{R} - i\left(\frac{1}{\sigma_1} + L + l\right)$, при том же $T_1 = 3L + l + \frac{1}{\sigma_1}$ получим неравенство

$$|F_\sigma(w)| \leqslant c_{5r}(l,L)\cdot e^{T_1\sigma}M_0\cdot \rho^+_{\frac{1}{\sigma_1}}(z_0^+) \leqslant c_{5r}(l,L)\cdot e^{T_1\sigma}M_0\cdot \rho^*_{\frac{1}{\sigma_1}}, \qquad (91)$$

где z_0^+ – ближайшая к w точка на Γ для этого случая. Так как, проводя рассуждения, аналогичные (89) – (91), можно доказать ограниченность функции $F_\sigma(z)$ в любой полосе $\{z = x + iy : |y| \leqslant A\}$, то из оценок (90) и (91) следует, что при $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$\begin{aligned} |F_\sigma(x)| &\leqslant c_{5r}(l,L)\cdot e^{T_1\sigma}M_0\cdot \rho^*_{\frac{1}{\sigma_1}} \\ &= c_{5r}(l,L)c_\sigma(l,L)M_0 = c_{1r,\sigma}(l,L)M_0. \end{aligned} \qquad (92)$$

Соотношение (35) основной леммы доказано.

Для проверки того, что F_σ – целая функция экспоненциального типа, возьмем $T_2 = 3L + l + \frac{1}{\sigma_1} + s$, где $s > 0$ – любое. Применяя формулу (88) с T_2 вместо T_1 и действуя далее аналогично, получим для $w \in \mathbb{R} + iT_2$ оценку

$$|F_\sigma(w)| \leqslant c_{5r}(l,L)e^{T_2\sigma}M_0\cdot \rho^*_{\frac{1}{\sigma_1}} \leqslant c_{6r}(l,L)e^{\sigma s}. \qquad (93)$$

Аналогичная оценка получается при $w \in \mathbb{R} - iT_2$, что заканчивает доказательство основной леммы и теоремы.

Список литературы

1. A. Beurling, *The Collected Works of Arne Beurling*, vol. 2, Birkhauser, Boston, (1989) 351–365
2. J. Ortega-Cerdà, K. Seip, *Multipliers for entire functions and an interpolation problem of Beurling.* — J. Functional Analysis, **162**, (1999) 400–415.
3. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси* 1. *Формулировка результатов.* — Вестник СПбГУ, сер.1, **3**, No. 4, (2016) 644–650.
4. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси* 2. *Доказательство основной теоремы.* — Вестник СПбГУ, сер. 1, **4**, No. 1, (2017) 53–63.

5. В. И. Белый, *Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей.* — Матем. Сборник, **104**, No. 3, (1977) 163–193.
6. Б. Я. Левин, *Мажоранты в классах субгармонических функций* II. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, No. 52, (1989) 3–33.

Shirokov N. A. Interpolation in a Bernstein space by means of approximation.

We denote by B_σ the Bernstein space of entire functions of exponential type $\leqslant \sigma$ bounded on the real axis. Let $\Lambda = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $z_n = x_n + iy_n$, be a sequence such that $x_{n+1} - x_n \geqslant l > 0$ and $|y_n| \leqslant L$, $n \in \mathbb{Z}$. We prove that for any sequence $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ of bounded a_n, $|a_n| \leqslant M$, $n \in \mathbb{Z}$, there exists a function $f \in B_\sigma$ with $\sigma \leqslant \sigma_0(l, L)$ such that $f|_\Lambda = A$. We use a method of approximation by mean of functions from a Bernstein space.

С.-Петербургский
государственный университет,
Петергоф, Университетский просп. 35,
198504 Санкт-Петербург;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 4 декабря 2017 г.