Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

**А. С. Целищев**

# ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

## §1. Введение

Рассмотрим пространства $L^1$ и $L^p$ и следующее выражение – функционал расстояния от функции из $L^1$ до шара радиуса $s$ в $L^p$:

$$E(s, f; L^1, L^p) = \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)) = \inf\{\|f - g\|_{L^1} : \|g\|_{L^p} \leqslant s\}.$$

В книге [3], среди прочего, решается вопрос о существовании устойчивого (под действием сингулярного интегрального оператора) почти-минимайзера для такого функционала. А именно, там доказывается следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть $T$ – оператор Кальдерона–Зигмунда, $f \in L^1$ – такая функция, что $Tf \in L^1$. Тогда для любого $s > 0$ существует функция $u^{(s)} \in L^1$, такая, что*

$$\begin{aligned} \|u^{(s)}\|_{L^p} &\lesssim s, \\ \|f - u^{(s)}\|_{L^1} &\lesssim \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)), \\ \|Tf - Tu^{(s)}\|_{L^1} &\lesssim \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)) + \operatorname{dist}_{L^1}(Tf, B_{L^p}(s)). \end{aligned}$$

Здесь и далее под записью $A \lesssim B$ мы подразумеваем, что $A \leqslant CB$ для некоторой константы $C$, которая не должна зависеть от существенных параметров. Например, тут эта константа не зависит от $s$ и $f$.

Первые два условия здесь означают, что $u^{(s)}$ – почти-минимайзер для функционала расстояния, а третье – что $Tu^{(s)}$ во многом похож на почти-минимайзер функционала расстояния для функции $Tf$. Основной метод доказательства – это подход Бургейна из статьи [1].

*Ключевые слова*: двойственность, устойчивость, почти-минимайзеры, сингулярные интегралы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035.

Устойчивый почти-минимайзер строится при таком подходе практически явно – а именно, произвольный почти-минимайзер превращается в устойчивый с помощью добавления “хорошей” части разбиения Кальдерона–Зигмунда.

Помимо применения теорем об устойчивости в теории интерполяции, из приведённой теоремы нетрудно извлечь, например, такое следствие (которое также доказывается в книге [3]).

**Следствие 1.1.** *Пусть $T$ – оператор Кальдерона–Зигмунда, $f \in L^1$ – такая функция, что $Tf \in L^1$. Тогда существует последовательность функций $f_k \in L^1 \cap L^p$, сходящаяся к $f$ в $L^1$ и такая, что при этом $Tf_k \in L^1$ и $\|Tf - Tf_k\|_{L^1} \to 0$.*

Тем же самым методом, но используя некоторые другие разложения вместо стандартного разложения Кальдерона–Зигмунда, можно получить похожие теоремы в некоторых других случаях, которые в книге [3] не рассматриваются – в частности, теорему об устойчивости относительно проекторов на вейвлеты, обладающие только довольно слабым условием убывания на бесконечности; это сделано автором в работе [6].

Сингулярные интегральные операторы обычно разрывны не только на $L^1$, но и на $L^\infty$. В связи с этим встает вопрос о существовании почти-минимайзеров в паре $(L^\infty, L^p)$, $1 < p < \infty$, устойчивых при действии таких операторов. В книге [3] эта задача не была решена; более того, трудно ожидать, что такого рода почти-минимайзеры удастся построить сколько-нибудь явно. Цель настоящей заметки – доказать с помощью двойственности, что они всё же существуют.

Автор благодарен своему научному руководителю, С. В. Кислякову, за постановку задачи и внимание к работе.

## §2. Применение двойственности

Отметим, что задача о наличии устойчивого почти-минимайзера связана с другой, более классической – задачей о $K$-замкнутости некоторой пары подпространств. Определение понятия $K$-замкнутости, введённое в работе [5], состоит в следующем. Пусть $(X_0, X_1)$ – совместимая пара банаховых пространств (то есть они вложены в некоторое общее топологическое векторное пространство), а $Y_0$ и $Y_1$ – замкнутые подпространства в $X_0$ и $X_1$ соответственно. Тогда эта пара подпространств называется $K$-замкнутой в $(X_0, X_1)$, если найдётся такая константа $C$, что для всякого представления произвольного элемента $y \in Y_0 + Y_1$ в виде $y = x_0 + x_1$, где $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, найдётся другое представление $y = y_0 + y_1$, где уже $y_0$ и $y_1$ лежат в $Y_0$ и $Y_1$ соответственно, и при этом $\|y_0\|_{Y_0} \leqslant C\|x_0\|_{X_0}$, $\|y_1\|_{Y_1} \leqslant C\|x_1\|_{X_1}$. Понятие $K$-замкнутости играет важную роль в теории интерполяции – если знать интерполяционное пространство вещественного метода для пары $(X_0, X_1)$ (обозначим его символом $(X_0, X_1)_{\theta,q}$), а пара подпространств $(Y_0, Y_1)$ $K$-замкнута в ней, то соответствующее интерполяционное пространство для пары $(Y_0, Y_1)$ легко сосчитать – выполняется равенство

$$(Y_0, Y_1)_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q} \cap (Y_0 + Y_1).$$

Пусть $T$ – сингулярный интегральный оператор (или проектор, связанный с вейвлетами из работы [6], в этом случае под $L^p$ подразумевается $L^p(\mathbb{R})$, а вместо разложения Кальдерона–Зигмунда используется разложение, описанное в [6]). Для всякого конечного $p$ символом $X_p$ обозначим пространство $L^p \oplus L^p$, а $Y_p = \{(f, Tf) : f \in L^p, Tf \in L^p\}$ – его подпространство. Ясно, что $Y_p$ – замкнутое подпространство пространства $X_p$ (для $p > 1$ это очевидно, так как $T$ – ограниченный на $L^p$ оператор, а для $p = 1$ – тоже несложно ввиду того, что $T$ – оператор слабого типа $(1, 1)$). Известно, что вопрос о $K$-замкнутости пары подпространств $(Y_1, Y_p)$ в $(X_1, X_p)$ (например, в одномерном случае, если в качестве $T$ взять проектор Рисса, получается вопрос о $K$-замкнутости пары пространств Харди $(H^1, H^p)$ в паре $(L^1, L^p)$) решается положительно, см., например, [2] или [4].

Для элемента $(u, Tu) \in Y_1 + Y_p$ напишем:

$$(u, Tu) = (u_0, v_0) + (u_1, v_1) \in X_1 + X_p.$$

При изучении $K$-замкнутости, нас интересуют нормы слагаемых в правой части в $L^1 \oplus L^1$ и $L^p \oplus L^p$ соответственно, поэтому будем считать, что $\|u_0\|_{L^1} \leqslant a$, $\|v_0\|_{L^1} \leqslant a$, $\|u_1\|_{L^p} \leqslant b$, $\|v_1\|_{L^p} \leqslant b$. В таком случае, из $K$-замкнутости пары $(Y_1, Y_p)$ в $(X_1, X_p)$ получается разложение

$$(u, Tu) = (v, Tv) + (w, Tw),$$

причём $\|v\|_{L^1} \lesssim a$, $\|Tv\|_{L^1} \lesssim a$, $\|w\|_{L^p} \lesssim b$, $\|Tw\|_{L^p} \lesssim b$.

Вернёмся теперь к задаче о нахождении устойчивого почти-минимайзера для пары $(L^1, L^p)$. Её тоже можно переписать в похожих терминах. В самом деле, если зафиксировать положительное число

$b$, то можно взять $u_0$ и $v_0$ такими, что их нормы в $L^1$ не превосходят $2\operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(b))$ и $2\operatorname{dist}_{L^1}(Tf, B_{L^p}(b))$, соответственно (а $u_1$ и $v_1$ можно взять из шара радиуса $b$ в $L^p$). Таким образом, напишем:

$$(u, Tu) = (u_0, v_0) + (u_1, v_1),$$

причём $\|u_0\|_{L^1} \leqslant a$, $\|u_1\|_{L^p} \leqslant b$, $\|v_1\|_{L^p} \leqslant b$, $\|v_0\|_{L^1} \leqslant c$. Наша цель – получить разложение вида $(u, Tu) = (\alpha, T\alpha) + (\beta, T\beta)$, где нормы участвующих слагаемых контролируется теми же числами $a$, $b$ и $c$. Отметим, что, в сущности, именно это и делается при применении метода Бургейна в доказательстве теоремы 1 в книге [3] (а также при доказательстве теоремы 2 работы [6]), но для полноты мы повторим это рассуждение. Итак, если $u_0 = g + h$ – разложение Кальдерона–Зигмунда по уровню $\lambda$ ($g$ – “хорошая” часть, $h$ – “плохая”), где $\lambda$ – такое, что $\lambda^{p-1}a = b^p$, то $(u, Tu) = (h, Th) + (u_1 + g, T(u_1 + g))$. При этом $\|h\|_{L^1} \lesssim a$, а $\|u_1 + g\|_{L^p} \leqslant b + \|g\|_{L^p} \lesssim b$, так как $|g| \lesssim \lambda$ и $\|g\|_{L^1} \lesssim a$, и потому $\|g\|_{L^p} = (\int |g|^p)^{1/p} \lesssim (\lambda^{p-1}a)^{1/p} = b$. Ввиду того, что оператор $T$ ограничен на $L^p$, верно и неравенство $\|T(u_1 + g)\|_{L^p} \lesssim b$. Пусть кубы, участвующие в разложении Кальдерона–Зигмунда – это $\{Q_i\}$, и $\Omega = \cup 10Q_i$. Тогда, ввиду свойств оператора $T$ (дальней $L^1$-регулярности, если пользоваться терминологией книги [3]), $\|Th\|_{L^1(\Omega^c)} \lesssim a$, где $\Omega^c$ обозначает дополнение множества $\Omega$. Интеграл же по $\Omega$ оценивается следующим образом, с помощью неравенства Гёльдера:

$$\|Th\|_{L^1(\Omega)} = \|v_0 + v_1 - T(u_1 + g)\|_{L^1(\Omega)} \lesssim c + |\Omega|^{1/p'} b.$$

Мера множества $\Omega$ не превосходит (с точностью до домножения на константу) числа $\frac{\|u_0\|_{L^1}}{\lambda} \leqslant \frac{a}{\lambda}$. Учитывая наш выбор числа $\lambda$, получаем, что $\|Th\|_{L^1(\Omega)} \lesssim a + c$. Таким образом, имея указанное вначале разложение пары $(u, Tu)$, лежащей в $X_1 + X_p$, мы получили разложение

$$(u, Tu) = (h, Th) + (u_1 + g, T(u_1 + g)) \in Y_1 + Y_p,$$

и $\|h\|_{L^1} \lesssim a$, $\|u_1 + g\|_{L^p} \lesssim b$, $\|T(u_1 + g)\|_{L^p} \lesssim b$, $\|Th\|_{L^1} \lesssim a + c$.

Отсюда видно, что в этом контексте задача об устойчивости несколько тоньше, чем описанная выше задача о $K$-замкнутости – в последней часть информации принудительно стирается.

Для подпространства $Y$ банахова пространства $X$ символом $Y^\perp$ обозначим аннулятор $Y$, то есть те элементы $x^* \in X^*$, для которых $\langle y, x^* \rangle = 0$ при всех $y \in Y$. Ясно, что $Y^\perp$ – $(*)$-слабо замкнутое подпространство в $X^*$. В работе [5] замечено, что $K$-замкнутость пары подпространств $(W_0, W_1)$ в $(Z_0, Z_1)$ равносильна $K$-замкнутости пары их аннуляторов, то есть $(W_0^\perp, W_1^\perp)$ в $(Z_0^*, Z_1^*)$. Изложение этого факта можно найти и в работе [2]. Для задачи о почти-минимайзерах можно провести похожие рассуждения, к которым мы и приступаем.

Нетрудно понять, каков аннулятор подпространства $Y_p$. Пусть $(\alpha, \beta) \in Y_p^\perp$, тогда $\langle (f, Tf), (\alpha, \beta) \rangle = 0$ при всех $f$, что можно переписать в виде $\langle f, \alpha + T^*\beta \rangle = 0$, и таким образом $Y_p^\perp$ имеет вид $\{(-T^*\beta, \beta) : \beta \in L^{p'}\}$. Написанное верно только в случае $1 < p < \infty$, когда $T^*$ – ограниченный оператор на $L^{p'}$. В случае же, когда, например, $p' = \infty$, нужна осторожность — в частности, тогда $T^*\beta$ – это элемент пространства BMO, в котором функции определены только с точностью до константы. Об этом (опять же, для вопроса $K$-замкнутости) написано, например, в работе [4]. В связи со сказанным, в формулировке теоремы будем предполагать, что исходная функция $f$ лежит в $L^\infty \cap L^q$ при некотором $q < \infty$ – тогда функция $T^*f$ определена однозначно (как функция из $L^q$). Отметим, что если $f \in L^\infty \cap L^q$ и $T^*f \in L^\infty$, то $(-T^*f, f) \in Y_1^\perp$. В самом деле, согласно следствию 1.1 в [6], для всякой функции $g \in L^1$, такой, что $Tg \in L^1$, существует последовательность функций $g_n \in L^1 \cap L^{q'}$, таких, что $Tg_n \in L^1$, $g_n \to g$ и $Tg_n \to Tg$ (обе сходимости — в $L^1$). Поэтому достаточно, чтобы $\langle (-T^*f, f), (g, Tg) \rangle$ было равно нулю для всех $g \in L^1 \cap L^{q'}$, а это, очевидно, верно, так как $f \in L^q$, а оператор $T$ ограничен на $L^q$ и $L^{q'}$.

После всех сделанных замечаний, становится несложно доказать теорему о существовании устойчивого почти-минимайзера для пары $(L^\infty, L^p)$.

**Теорема 2.** *Пусть $1 < q < \infty$, $f$ – функция из $L^\infty \cap L^q$, такая, что $T^*f \in L^\infty$, $1 < p < \infty$. Тогда для всякого $s > 0$ существует функция $v^{(s)} \in L^p$, для которой выполняются условия:*

$$\|v^{(s)}\|_{L^p} \lesssim s,$$
$$\|f - v^{(s)}\|_{L^\infty} \lesssim \operatorname{dist}_{L^\infty}(f, B_{L^p}(s)),$$
$$\|T^*f - T^*v^{(s)}\|_{L^\infty} \lesssim \operatorname{dist}_{L^\infty}(f, B_{L^p}(s)) + \operatorname{dist}_{L^\infty}(T^*f, B_{L^p}(s)).$$

**Доказательство.** Пусть $(-T^*f, f)$ представлено в виде

$$(-T^*f, f) = (\alpha_0, \alpha_1) + (\beta_0, \beta_1),$$

причём $\|\alpha_0\|_{L^\infty} \leqslant t$, $\|\alpha_1\|_{L^\infty} \leqslant r$, $\|\beta_0\|_{L^p} \leqslant s$, $\|\beta_1\|_{L^p} \leqslant s$. Покажем, что в таком случае $(-T^*f, f) \in U_\infty + U_p$, где

$$U_\infty = \{(v_0, v_1) \in Y_1^\perp : \|v_0\|_{L^\infty} \leqslant c(t+r), \|v_1\|_{L^\infty} \leqslant cr\},$$

$$U_p = \{(w_0, w_1) \in L^p \oplus L^p : \|w_0\|_{L^p} \leqslant cs, \|w_1\|_{L^p} \leqslant cs, w_0 = -T^*w_1\} \subset Y_{p'}^\perp.$$

Здесь константу $c$ мы подберём позже. Ясно, что доказываемое утверждение следует из этого – как и в начале этой заметки, достаточно взять $r = 2\operatorname{dist}_{L^\infty}(f, B_{L^p}(s))$ и $t = 2\operatorname{dist}_{L^\infty}(T^*f, B_{L^p}(s))$ (а в качестве $\beta_0$ и $\beta_1$ – соответствующие почти-минимайзеры).

Итак, предположим противное. Нетрудно видеть, что $U_\infty + U_p$ – $(*)$-слабо компактное подмножество в $L^\infty \oplus L^\infty + L^p \oplus L^p$. Поэтому, если точка $(-T^*f, f)$ не лежит в множестве $U_\infty + U_p$, то их можно разделить $(*)$-слабо непрерывным функционалом на $L^\infty \oplus L^\infty + L^p \oplus L^p$, то есть найдется элемент $F \in L^1 \oplus L^1 \cap L^{p'} \oplus L^{p'}$, такой, что $\langle(-T^*f, f), F\rangle > 1$, а $\sup\{|\langle x, F\rangle| : x \in U_\infty + U_p\} < 1$. Второе из этих соотношений даёт оценку на норму функционала $F$, суженного на $Y_1^\perp$ и на $Y_{p'}^\perp$. Функционал на $Y_1^\perp$ можно рассматривать как элемент факторпространства $L^1 \oplus L^1/Y_1$, и “поднять” его до элемента $L^1 \oplus L^1$, увеличивая норму не более, чем вдвое. Сделав то же самое и для $L^{p'} \oplus L^{p'}$, можно получить пары функций $(\phi_0, \phi_1) \in L^1 \oplus L^1$ и $(\psi_0, \psi_1) \in L^{p'} \oplus L^{p'}$, такие, что $\|\phi_0\|_{L^1} \leqslant \frac{2}{c(t+r)}$, $\|\phi_1\|_{L^1} \leqslant \frac{2}{cr}$, $\|\psi_0\|_{L^{p'}} \leqslant \frac{2}{cs}$, $\|\psi_1\|_{L^{p'}} \leqslant \frac{2}{cs}$, и действия этих пар как функционалов на $Y_1^\perp$ и $Y_{p'}^\perp$ соответственно совпадают с действием $F$. Это означает, в частности, что $(\phi_0, \phi_1) - (\psi_0, \psi_1)$ аннулирует $Y_1^\perp \cap Y_{p'}^\perp$, а потому лежит в $Y_1 + Y_{p'}$. Согласно написанному в начале этого параграфа, тогда эта разность записывается в следующем виде:

$$(\phi_0, \phi_1) - (\psi_0, \psi_1) = (v_0, v_1) - (w_0, w_1),$$

где $(v_0, v_1) \in Y_1$, $(w_0, w_1) \in Y_{p'}$, $\|v_0\|_{L^1} \leqslant \frac{C}{c}\frac{2}{t+r}$, $\|v_1\|_{L^1} \leqslant \frac{C}{c}(\frac{2}{t+r} + \frac{2}{r})$, $\|w_0\|_{L^{p'}} \leqslant \frac{C}{c}\frac{2}{s}$, $\|w_1\|_{L^{p'}} \leqslant \frac{C}{c}\frac{2}{s}$. Тут $C$ – константа, скрывающаяся под знаком “$\lesssim$” из рассуждений в начале параграфа (или, что то же самое, в теореме 1). Пусть $G = (\phi_0, \phi_1) - (v_0, v_1) = (\psi_0, \psi_1) - (w_0, w_1)$. Тогда, поскольку $(v_0, v_1) \in Y_1$, $G$ совпадает с $F$ на $Y_1^\perp$ (как функционал), а поскольку $(w_0, w_1) \in Y_{p'}$, $G$ совпадает с $F$ на $Y_{p'}^\perp$. Так как $(-T^*f, f) \in Y_1^\perp + Y_{p'}^\perp$, можно написать:

$$\begin{aligned}&\langle(-T^*f, f), F\rangle\\ &\quad = \langle(\alpha_0, \alpha_1), -(v_0, v_1) + (\phi_0, \phi_1)\rangle + \langle(\beta_0, \beta_1), -(w_0, w_1) + (\psi_0, \psi_1)\rangle.\end{aligned}$$

Правая часть оценивается по неравенству Гёльдера – она не превосходит

$$\frac{2(C+1)}{c}\Big(\frac{t}{t+r}+r\Big(\frac{1}{t+r}+\frac{1}{r}\Big)+2\Big)=\frac{8(C+1)}{c}.$$

Взяв $c=10(C+1)$, приходим к противоречию с тем, что

$$\langle(-T^*f,f),F\rangle>1,$$

и теорема доказана. $\square$

В книге [3] (и работе [6]) было замечено, что теорема 1 верна также и для оператора $\chi_E T$, где $E$ – произвольное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^d$, если речь идёт о сингулярных интегралах, и подмножество в $\mathbb{R}$, если о вейвлетах. В связи с этим, только что доказанную теорему можно сформулировать для оператора $T^*\chi_E$ – то есть для функции $f$, заданной на множестве $E$ (и продолженной нулём во всё пространство $\mathbb{R}^d$).

**Теорема 3.** *Пусть $1<q<\infty$, $f$ – функция, носитель которой содержится в множестве $E$, лежащая в $L^\infty\cap L^q$, такая, что $T^*f\in L^\infty$, $1<p<\infty$. Тогда для всякого $s>0$ существует функция $v^{(s)}\in L^p$ с носителем, содержащимся в множестве $E$, для которой выполняются условия*:

$$\begin{aligned}\|v^{(s)}\|_{L^p}&\lesssim s,\\ \|f-v^{(s)}\|_{L^\infty}&\lesssim \operatorname{dist}_{L^\infty}(f,B_{L^p}(s)),\\ \|T^*f-T^*v^{(s)}\|_{L^\infty}&\lesssim \operatorname{dist}_{L^\infty}(f,B_{L^p}(s))+\operatorname{dist}_{L^\infty}(T^*f,B_{L^p}(s)).\end{aligned}$$

Как написано выше, это – утверждение теоремы 2 для оператора $T^*\chi_E$, которое верно, поскольку теорема 1 верна для оператора $\chi_E T$. Отметим также, что если $E$ – множество конечной меры, то условие $f\in L^q$ является лишним, так как ограниченная функция на $E$ автоматически попадёт в $L^q$ при всех $q$.

## Список литературы


1. J. Bourgain, *Some consequences of Pisier's approach to interpolation.* — Isr. Math. J. **77** (1992), 165–185.
2. S. V. Kisliakov, *Interpolation of $H^p$-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. Proc. **13** (1999), 102–140.
3. S. Kislyakov and N. Kruglyak, *Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney–Besicovitch Coverings, and Singular Integrals.* Birkhäuser, 2013.

4. С. В. Кисляков, Куанхуа Шу, *Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы.* — Алгебра и анализ **8**, No. 4 (1996), 75–109.
5. G. Pisier, *Interpolation between $H^p$ spaces and non-commutative generalizations.* I. — Pacific J. Math. **155**, no. 2 (1992), 341–368.
6. А. С. Целищев, *Устойчивость почти оптимальных разложений в анализе Фурье.* — Зап. научн.семин. ПОМИ, **467** (2018), 191–206.

Tselishchev A. S. Duality in a stability problem for some functionals arising in interpolation theory.

By using duality, it is shown that there exist near-minimizers for the distance functionals for the couple $(L^\infty, L^p)$, $1 < p < \infty$, that are stable under the action of singular integral operators.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева
Ст.-Петербургский государственный университет
14 линия В.О., дом 29Б, Ст.-Петербург
199178, Россия;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
*E-mail*: celis-anton@yandex.ru

Поступило 16 августа 2018 г.