Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

А. С. Целищев

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЧТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В АНАЛИЗЕ ФУРЬЕ

§1. Введение

Пусть (X, Y) – пара банаховых пространств, и $f \in X$. Рассмотрим функционал расстояния от f до шара радиуса s в Y:

$$E(s, f; X, Y) = \operatorname{dist}_X(f, B_Y(s)) = \inf\{\|f - g\|_X : \|g\|_Y \leqslant s\}.$$

В книге [5] изучаются почти-минимайзеры для такого (и не только) функционала. Под этим подразумеваются такие функции g, что

$$\|g\|_Y \leqslant Cs \quad \text{и} \quad \|f - g\|_X \leqslant C \operatorname{dist}_X(f, B_Y(\frac{s}{C})).$$

Нас интересует, как будут вести себя почти-минимайзеры под действием различных операторов T. Ясно, что, если оператор T ограничен на X и Y, то Tg также будет лежать в шаре радиуса примерно s в Y (то есть $\|Tg\|_Y \leqslant Cs$) и $\|Tf - Tg\|_X \leqslant C \operatorname{dist}_X(f, B_Y(\frac{s}{C}))$ (здесь C означает уже какую-то другую константу). В частности, если $\operatorname{dist}_X(f, B_Y(t)) \leqslant C \operatorname{dist}_X(Tf, B_Y(t))$, то Tg будет почти-минимайзером для Tf.

В связи с этим, нас будут интересовать операторы, не ограниченные на X – можно ли что-то сказать про их действие на почти-минимайзеры? Соответствующие теоремы об устойчивости помогают сводить вычисление тех или иных функционалов в теории интерполяции (и, как следствие – самих интерполяционных пространств) для сложных пар к случаю более простых объемлющих пар. Наиболее эффективно эту задачу решают устойчивые почти-минимайзеры для K-функционалов, см., например, теорему о "сдвиге гладкости" в шкале соболевских пространств в §10.2.2 в книге [5]. Здесь, однако, мы занимаемся более "наглядным" функционалом расстояния (или E-функционалом в интерполяционных терминах). Впрочем, задачи о почти-минимайзерах

Ключевые слова: вейвлеты, почти-минимайзеры, устойчивость, сингулярные интегралы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00053).

для E- и K- функционалов сводятся, в некотором смысле, одна к другой – см. §5.4 в [5].

В книге [5] в качестве T рассматриваются, прежде всего, операторы Кальдерона–Зигмунда, а в качестве X – пространство L^1. В качестве Y же берутся пространства L^p при $1 < p < \infty$, L^∞ или (однородные) пространства Кампанато $\dot{C}_p^{s,k}$. Там строятся почти-минимайзеры, которые будут "устойчивы" относительно действия T в некотором смысле. В построениях так или иначе участвует разбиение Кальдерона–Зигмунда или его гладкие аналоги.

Среди прочего, там доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть T – оператор Кальдерона–Зигмунда, $f \in L^1$ – такая функция, что $Tf \in L^1$. Тогда для любого $s > 0$ существует функция $u^{(s)} \in L^1$, такая, что*

$$\begin{aligned} \|u^{(s)}\|_{L^p} &\lesssim s, \\ \|f - u^{(s)}\|_{L^1} &\lesssim \mathrm{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)), \\ \|Tf - Tu^{(s)}\|_{L^1} &\lesssim \mathrm{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)) + \mathrm{dist}_{L^1}(Tf, B_{L^p}(s)). \end{aligned}$$

Здесь и далее под записью $A \lesssim B$ мы подразумеваем, что $A \leqslant CB$ для некоторой константы C. Из контекста всегда будет ясно, от каких параметров эта константа может зависеть, а от каких – нет (или это будет явно указано). Тут эти константы не зависят от s и f.

Первые два условия в приведённой теореме означают, что $u^{(s)}$ – почти-минимайзер для f относительно функционала расстояния, а третье – что $Tu^{(s)}$ во многом похож на почти-минимайзер для Tf (в частности, он будет являться почти-минимайзером, если второе слагаемое мажорирует первое).

Одно из приведённых в книге доказательств использует подход Бургейна из статьи [2] – произвольный почти-минимайзер превращается в устойчивый с помощью добавления слагаемого, являющегося "хорошей" частью разложения Кальдерона–Зигмунда некоторой функции.

Нас будет интересовать устойчивость почти-минимайзеров в некоторых случаях, не рассмотренных в книге [5] – когда оператор T – это проектор на подпространство, порождённое вейвлетами, обладающими только довольно слабыми условиями убывания на бесконечности (в таком случае он, вообще говоря, не обязан являться сингулярным интеральным оператором в классическом смысле), или когда T – обычный сингулярный интеграл, но X и Y – весовые пространства L^1 и

L^p. Доказательства будут также использовать подход Бургейна, но, вместо стандартного разложения Кальдерона–Зигмунда функции на “хорошую” и “плохую” части, будут использоваться некоторые другие разложения.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, С. В. Кислякову за постановку задач и советы по их решению.

§2. Теорема об устойчивости относительно проекторов, связанных с вейвлетами

2.1. Вспомогательные сведения о вейвлетах. В этой части под L^p мы будем понимать $L^p(\mathbb{R})$. Пусть Ψ – вейвлет. Под этим мы подразумеваем, что $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ и функции $\{2^{j/2}\Psi(2^j x - k)\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$. Для краткости обозначим $2^{j/2}\Psi(2^j x - k)$ через $\Psi_{jk}(x)$.

В статье [7] приведено условие на Ψ, при котором $\{\Psi_{jk}\}$ будет являться безусловным базисом не только для L^2, но и для L^p при $1 < p < \infty$. А именно, пусть существует вещественная функция ϕ, заданная на $\mathbb{R}$, для которой выполняются следующие условия:

1) $\phi(x) = \phi(-x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$;
2) ϕ убывает на $[0, \infty)$;
3) ϕ ограничена на $\mathbb{R}$;
4) $\int\limits_0^\infty \phi(x)\log(1+x) < \infty$;
5) $|\Psi(x)| \leqslant \phi(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Мы будем считать, что это условие выполнено. Тогда $\{\Psi_{jk}\}$ – безусловный базис в L^p. Кроме статьи [7], доказательство этого факта изложено в книге [6]. В нём используется разбиение функции в сумму двух слагаемых, которое нам понадобится. Чтобы его сделать, введём некоторые обозначения.

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ – набор чисел, каждое из которых равно ± 1. Ему соответствует оператор U_ε, определяемый следующим образом:

$$U_\varepsilon f := \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{jk}\langle f, \Psi_{jk}\rangle \Psi_{jk}.$$

Тогда, как доказано в [7], операторы U_ε равномерно (по ε) ограничены в L^p при всех $1 < p < \infty$, и, более того, имеют слабый тип $(1,1)$ с константой, не зависящей от ε. Отметим сразу же, что, разумеется, всё, что мы будем делать, справедливо и для операторов T

вида $(\mathrm{Id} + U_\varepsilon)/2$ – ортогональных проекторов в L^2 на подпространство $\mathrm{span}\{\Psi_{jk} : (j,k) \in A\}$, где A – произвольное подмножество в $\mathbb{Z}^2$ (под span мы подразумеваем замкнутую линейную оболочку).

Для целых чисел r и l обозначим через I_{rl} диадический интервал $[2^{-r}l, 2^{-r}(l+1)]$.

Для функции $f \in L^1$ и числа $\lambda > 0$, используя разбиение Кальдерона–Зигмунда, получим набор отрезков $\{I_{rl}\}_{(r,l)\in S}$, внутренности которых не пересекаются, для каждого из которых выполняется соотношение

$$\lambda < \frac{1}{|I_{rl}|} \int\limits_{I_{rl}} |f| \leqslant 2\lambda,$$

а при $x \notin \cup_{(r,l)\in S} I_{rl}$ неравенство $|f(x)| \leqslant \lambda$ верно почти всюду. Положим $f_{rl} := f\chi_{I_{rl}}$, $F := \mathbb{R} \setminus \cup_{(r,l)\in S} I_{rl}$. Наконец, через P_j обозначим следующий ортогональный проектор в L^2:

$$P_j h := \sum_{i<j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle h, \Psi_{ik}\rangle \Psi_{ik},$$

а через Q_j – проектор $\mathrm{Id} - P_j$:

$$Q_j h := \sum_{i\geqslant j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle h, \Psi_{ik}\rangle \Psi_{ik}.$$

Тогда “хорошая” часть разложения из статьи [7] – это функция

$$f_\lambda := f \cdot \chi_F + \sum_{(r,l)\in S} P_r(f_{rl}).$$

Оставшаяся часть – это

$$f - f_\lambda = \sum_{(r,l)\in S} Q_r(f_{rl}).$$

В книге [6] доказаны следующие два утверждения про это разложение, которыми мы будем пользоваться.

Факт 1. *Пусть f – функция, носитель которой лежит в отрезке I_{rl}. Тогда существует чётная интегрируемая ограниченная функция β, убывающая на $[0,\infty)$ (не зависящая от f), такая, что $\beta(2^j x) \leqslant 2^{4-j}\beta(x)$ при $|x| \geqslant 1$ и $j \in \mathbb{Z}_+$, и для которой*

$$|P_r f(x)| \leqslant 2^r \|f\|_{L^1} \beta(2^r x - l).$$

Факт 2. *Пусть f – функция, носитель которой лежит в отрезке I_{rl}. Тогда существует чётная интегрируемая функция η, убывающая на $[10,\infty)$, такая, что при $|2^r x - l| > 10$ выполнено неравенство*

$$|U_\varepsilon Q_r f(x)| \leqslant \|f\|_{L^1} 2^r \eta(2^r x - l).$$

Здесь η не зависит ни от функции f, ни от ε.

Нам потребуется следующая лемма, утверждающая, что мы можем контролировать норму функции f_λ в L^p.

Лемма 1. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Тогда для всякой функции $f \in L^1$ выполнено неравенство*

$$\Big\| \sum_{(r,l)\in S} P_r(f_{rl}) \Big\|_{L^p} \lesssim \lambda^{1-1/p} \|f\|_{L^1}^{1/p}.$$

Отметим, что и в [6], и в [7] это утверждение доказано только для $p = 2$. Тем не менее, наше доказательство будет во многом повторять рассуждение из книги [6].

Доказательство. Прежде всего, отметим, что достаточно доказать утверждение леммы для натуральных p – тогда, интерполируя (попросту говоря, применяя неравенство Гёльдера), можно получить требуемую оценку для всех $p \geqslant 1$. Стало быть, нам надо доказать неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{(r,l)\in S} P_r(f_{rl}) \Big|^p \lesssim \lambda^{p-1} \|f\|_{L^1},$$

где p – натуральное число.

Согласно факту 1, левая часть этого неравенства не больше, чем

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{(r,l)\in S} 2^r \|f_{rl}\|_{L^1} \beta(2^r x - l) \Big|^p dx$$

$$\lesssim \sum_{(r_1,l_1)\in S} 2^{r_1} \|f_{r_1 l_1}\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} \beta(2^{r_1} x - l_1) \Big| \sum_{\substack{(r,l)\in S,\\ r\geqslant r_1}} 2^r \|f_{rl}\|_{L^1} \beta(2^r x - l) \Big|^{p-1} dx.$$

Однако $2^r \|f_{rl}\|_{L^1} \leqslant 2\lambda$, поэтому получившееся выражение, с точностью до домножения на константу, не превосходит величины

$$\lambda^{p-1} \sum_{(r_1,l_1)\in S} \|f_{r_1 l_1}\|_{L^1} 2^{r_1} \int_{\mathbb{R}} \beta(2^{r_1} x - l_1) \Big| \sum_{(r,l)\in S, r\geqslant r_1} \beta(2^r x - l) \Big|^{p-1} dx.$$

После замены переменной это выражение перепишется в следующем виде:

$$\lambda^{p-1}\sum_{(r_1,l_1)\in S}\|f_{r_1l_1}\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}}\beta(t)\Big|\sum_{(r,l)\in S,r\geqslant r_1}\beta(2^{r-r_1}t-(l-2^{r-r_1}l_1))\Big|^{p-1}dt.$$

Для каждой фиксированной пары $(r_1,l_1)\in S$ обозначим через S' множество пар $\{(r-r_1,l-2^{r-r_1}l_1):(r,l)\in S\}$. Нетрудно видеть, что $\{I_{rl}\}_{(r,l)\in S'}$ – также диадические отрезки с попарно непересекающимися внутренностями. Значит, нам нужно оценить величину

$$\lambda^{p-1}\sum_{(r_1,l_1)\in S}\|f_{r_1l_1}\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}}\beta(t)\Big|\sum_{(r,l)\in S',r\geqslant 0}\beta(2^rt-l)\Big|^{p-1}dt.$$

Докажем, что интеграл в этом выражении ограничен константой, не зависящей от S'. Ясно, что тогда утверждение леммы будет доказано. Итак, осталось проверить, что для любого $k\in\mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство (с константой C, зависящей, разумеется, от k, но не от S')

$$\int_{\mathbb{R}}\beta(t)\Big(\sum_{(r,l)\in S',r\geqslant 0}\beta(2^rt-l)\Big)^kdt\leqslant C.$$

Докажем это с помощью индукции по k. База для $k=0$ очевидна, так как β – интегрируемая функция. Пусть для $k-1$ неравенство доказано, проверим его для k. Заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}}\beta(t)\Big(\sum_{(r,l)\in S',r\geqslant 0}\beta(2^rt-l)\Big)^kdt$$
$$\lesssim\sum_{(r,l)\in S',r\geqslant 0}\int_{\mathbb{R}}\beta(t)\beta(2^rt-l)\Big(\sum_{(r_1,l_1)\in S',r_1\geqslant r}\beta(2^{r_1}t-l_1)\Big)^{k-1}dt.$$

Обозначим через S_{nr} множество $\{l:(r,l)\in S',I_{rl}\subset[n,n+1]\}$. Пусть $\varkappa_{nr}$ – количество элементов в S_{nr}. Так как $r\geqslant 0$, каждый отрезок I_{rl} содержится в каком-то отрезке вида $[n,n+1]$ с целым n, поэтому интересующее нас выражение перепишется следующим образом:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l\in S_{nr}}\int_{\mathbb{R}}\beta(t)\beta(2^rt-l)\Big(\sum_{(r_1,l_1)\in S',r_1\geqslant r}\beta(2^{r_1}t-l_1)\Big)^{k-1}dt.$$

Для каждого целого n разобьём интеграл на три:

$$J_{n1} := \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l \in S_{nr}} \int\limits_{n-10}^{n+10} \beta(t)\beta(2^r t - l)\Big(\sum_{(r_1,l_1)\in S', r_1 \geqslant r} \beta(2^{r_1} t - l_1)\Big)^{k-1} dt,$$

$$J_{n2} := \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l \in S_{nr}} \int\limits_{-\infty}^{n-10} \beta(t)\beta(2^r t - l)\Big(\sum_{(r_1,l_1)\in S', r_1 \geqslant r} \beta(2^{r_1} t - l_1)\Big)^{k-1} dt,$$

$$J_{n3} := \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l \in S_{nr}} \int\limits_{n+10}^{+\infty} \beta(t)\beta(2^r t - l)\Big(\sum_{(r_1,l_1)\in S', r_1 \geqslant r} \beta(2^{r_1} t - l_1)\Big)^{k-1} dt.$$

Оценим каждое из этих выражений по отдельности. Начнём с J_{n1}:

$$J_{n1} \leqslant (\max_{[n-10,n+10]} \beta) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l \in S_{nr}} \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(2^r t - l)\Big(\sum_{\substack{(r_1,l_1)\in S',\\ r_1 \geqslant r}} \beta(2^{r_1} t - l_1)\Big)^{k-1} dt$$

$$= (\max_{[n-10,n+10]} \beta) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l \in S_{nr}} 2^{-r} \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t)\Big(\sum_{\substack{(r_2,l_2)\in S'',\\ r_2 \geqslant 0}} \beta(2^{r_2} t - l_2)\Big)^{k-1} dt.$$

Для перехода к последней строчке мы сделали замену переменной, которую уже проделывали выше. S'' – множество пар целых чисел, зависящее от (r,l), но обладающее тем свойством, что $\{I_{r_2 l_2}\}_{(r_2,l_2)\in S''}$ – попарно не пересекающиеся отрезки. Стало быть, по индукционному предположению, интеграл, участвующий в выражении, не больше константы, не зависящей от (r,l), и поэтому интересующая нас величина не больше, чем

$$C \max_{[n-10,n+10]} \beta \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r} \varkappa_{nr}.$$

Но $\sum\limits_{r=0}^{\infty} 2^{-r}\varkappa_{nr}$ – это сумма длин не пересекающихся отрезков, содержащихся в $[n, n+1]$, поэтому она не превосходит 1. Таким образом, мы получаем, что

$$J_{n1} \lesssim \max_{[n-10,n+10]} \beta.$$

Тогда, так как β – интегрируемая монотонная на каждой из полуосей функция, можно заключить, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{n1} \lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \max_{[n-10,n+10]} \beta \leqslant C.$$

Теперь оценим J_{n2}. Если $l \in S_{nr}$, то $I_{rl} \subset [n, n+1]$, а значит $2^{-r}l \geqslant n$. Тогда $2^r t - l = 2^r(t - 2^{-r}l) \leqslant 2^r(t-n) < 0$ при $t < n-10$. При этом $|t-n| \geqslant 10$, и, по свойствам функции β из факта 1, получаем, что верно неравенство:

$$J_{n2} \leqslant \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l\in S_{nr}} \int_{-\infty}^{n-10} \beta(t)\beta(2^r(t-n)) \Big(\sum_{(r_1,l_1)\in S', r_1\geqslant 0} \beta(2^{r_1}t - l_1) \Big)^{k-1} dt$$
$$\lesssim \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r}\varkappa_{nr} \int_{-\infty}^{n-10} \beta(t)\beta(t-n) \Big(\sum_{\substack{(r_1,l_1)\in S',\\ r_1\geqslant 0}} \beta(2^{r_1}t - l_1) \Big)^{k-1} dt.$$

Как отмечалось выше, $\sum\limits_{r=0}^{\infty} 2^{-r}\varkappa_{nr} \leqslant 1$. Тогда, учитывая, что, очевидно, ввиду интегрируемости и монотонности функции β, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \beta(t-n)$ – равномерно ограниченная функция, получается следующая оценка:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{n2} \lesssim \int_{\mathbb{R}} \beta(t) \Big(\sum_{(r_1,l_1)\in S', r_1\geqslant 0} \beta(2^{r_1}t - l_1) \Big)^{k-1} dt.$$

По индукционному предположению, правая часть ограничена некоторой константой. Величина $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} J_{n3}$ оценивается точно так же – если $t \geqslant n+10$, а $I_{rl} \subset [n, n+1]$, то $2^{-r}l \leqslant n+1$, и $2^r t - l = 2^r(t - 2^{-r}l) \geqslant 2^r(t-n-1) > 0$, и выкладки, аналогичные приведённым выше, показывают, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} J_{n3} \leqslant C$, и лемма доказана. $\square$

Ясно, что, поскольку на множестве F справедливо соотношение $|f| \leqslant \lambda$, из доказанной леммы следует неравенство

$$\|f_\lambda\|_{L^p} \lesssim \lambda^{1-1/p} \|f\|_{L^1}^{1/p}.$$

2.2. Теорема об устойчивости для пары (L^1, L^p). Перейдём, наконец, к теореме об устойчивости. Под T будем подразумевать описанный выше проектор на $\operatorname{span}\{\Psi_{jk} : (j,k) \in A\}$, хотя нам бы подошёл любой оператор, ограниченный в L^p и для которого выполняется факт 2 (такой оператор будет, в частности, слабого типа $(1,1)$). Тогда в этой ситуации справедлив аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, T – описанный выше оператор, $f \in L^1$ – такая функция, что $Tf \in L^1$. Тогда для всякого $s > 0$ существует функция $u^{(s)} \in L^1$, для которой выполняются следующие условия*:

$$\|u^{(s)}\|_{L^p} \lesssim s, \tag{1}$$

$$\|f - u^{(s)}\|_{L^1} \lesssim \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)), \tag{2}$$

$$\|Tf - Tu^{(s)}\|_{L^1} \lesssim \operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)) + \operatorname{dist}_{L^1}(Tf, B_{L^p}(s)). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть h – какой-нибудь почти-минимайзер, такой, что $\|h\|_{L^p} \leqslant s$ и $\|f - h\|_{L^1} \leqslant 2\operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s))$. Тогда положим $u^{(s)} := h + (f-h)_t$, где t удовлетворяет условию $t^{p-1}\|f-h\|_{L^1} = s^p$. Напомним, что здесь под $(f-h)_t$ мы понимаем "хорошую" часть описанного в предыдущем пункте разложения, применённого к функции $f-h$ и числу t. Проверим, что $u^{(s)}$ также будет почти-минимайзером, то есть что выполняются свойства (1) и (2). Неравенство (2) сразу следует из того, что, согласно доказанной выше лемме, $\|(f-h)_t\|_{L^1} \lesssim \|f-h\|_{L^1}$. Чтобы доказать свойство (1), достаточно проверить, что $\|(f-h)_t\|_{L^p} \lesssim s$. Но, по той же лемме 1 и нашему выбору числа t, имеем: $\|(f-h)_t\|_{L^p} \lesssim t^{1-1/p}\|f-h\|_{L^1}^{1/p} = s$.

Остаётся проверить свойство (3). Для этого выберем функцию $v \in L^1$, являющуюся почти-минимайзером для Tf: $\|v\|_{L^p} \leqslant s$, $\|Tf - v\|_{L^1} \leqslant 2\operatorname{dist}_{L^1}(Tf, B_{L^p}(s))$. Пусть $\{I_{rl}\}_{(r,l)\in S}$ – набор диадических интервалов, появляющихся в построении функции $(f-h)_t$. Для них выполняется следующая оценка:

$$\sum_{(r,l)\in S} |I_{rl}| \leqslant t^{-1}\|f-h\|_{L^1} = \Big(\frac{\|f-h\|_{L^1}}{s}\Big)^{p'} \lesssim \Big(\frac{\operatorname{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s))}{s}\Big)^{p'}.$$

Здесь $p' = \frac{p}{p-1}$. Далее, напишем:

$$\|Tf - Tu^{(s)}\|_{L^1} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\cup 30I_{rl}} |Tf - Tu^{(s)}| + \int\limits_{\cup 30I_{rl}} |Tf - v| + \int\limits_{\cup 30I_{rl}} |Tu^{(s)} - v|. \tag{4}$$

Оценим первое слагаемое. Заметим, что его можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\cup 30I_{rl}} |Tf - Tu^{(s)}| = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\cup 30I_{rl}} |T((f-h)-(f-h)_t)|$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\cup 30I_{rl}} \Big|T\Big(\sum_{(r,l)\in S} Q_r((f-h)_{rl})\Big)\Big| \leqslant \sum_{(r,l)\in S}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 30I_{rl}} |T(Q_r((f-h)_{rl}))|\,dx.$$

Согласно факту 2, получившееся выражение, с точностью до домножения на константу, не превосходит

$$\sum_{(r,l)\in S}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 30I_{rl}} \|(f-h)_{rl}\|_{L^1} 2^r \eta(2^r x - l)\,dx$$
$$\leqslant \sum_{(r,l)\in S} \|(f-h)_{rl}\|_{L^1} \int\limits_{\mathbb{R}} \eta(x)dx \lesssim \|f-h\|_{L^1}.$$

Учитывая выбор функции h, это не больше, чем $2\,\mathrm{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s))$.

Второе слагаемое в (4), очевидно, не больше, чем $\|Tf - v\|_{L^1} \leqslant 2\,\mathrm{dist}_{L^1}(Tf, B_{L^p}(s))$. Для оценки третьего воспользуемся неравенством Гёльдера – оно не превосходит выражения

$$\|Tu^{(s)} - v\|_{L^p}\Big(\sum_{(r,l)\in S} |30I_{rl}|\Big)^{1/p'} \lesssim (\|Tu^{(s)}\|_{L^p} + \|v\|_{L^p})\Big(\frac{\|f-h\|_{L^1}}{t}\Big)^{1/p'}.$$

Учитывая ограниченность оператора T в L^p, получаем, что третье слагаемое в правой части неравенства (4) оценивается через

$$s\Big(\frac{\|f-h\|_{L^1}}{t}\Big)^{1/p'} = \|f-h\|_{L^1} \leqslant 2\,\mathrm{dist}_{L^1}(f, B_{L^p}(s)).$$

Таким образом, мы проверили выполнение свойства (3), и теорема доказана. □

Приведём несколько следствий из доказанной теоремы.

Следствие 2.1. *Пусть $1 < p < \infty$ и T – оператор из предыдущей теоремы, f – функция из L^1, такая, что $Tf \in L^1$. Тогда существуют функции $f_k \in L^1 \cap L^p$, стремящиеся к f в L^1, для которых выполняется $Tf_k \in L^1$ и $\|Tf_k - Tf\|_{L^1} \to 0$.*

Доказательство. Это утверждение очевидно следует из теоремы, если устремить s к бесконечности (тогда, ввиду того, что $L^1 \cap L^p$ плотно в L^1, правые части неравенств (2) и (3) стремятся к нулю). □

Отметим, что, если T – описанный выше проектор, а E – измеримое подмножество в $\mathbb{R}$, то $\chi_E T$ будет, разумеется, ограниченным в L^p оператором, для которого верен факт 2. Поэтому можно получить обобщение предыдущего следствия.

Следствие 2.2. *Пусть $1 < p < \infty$, T – оператор из предыдущей теоремы, f – функция из L^1, а множество $E \subset \mathbb{R}$ таково, что $\chi_E Tf \in L^1$. Тогда существуют функции $f_k \in L^1 \cap L^p$, стремящиеся к f в L^1, для которых выполняется $\chi_E Tf_k \in L^1$ и $\chi_E Tf_k \to \chi_E Tf$ в L^1.*

Доказательство. Достаточно применить теорему к оператору $\chi_E T$ и действовать, как при доказательстве предыдущего следствия. □

Из первого следствия легко вывести, что если у функции из L^1 некоторые коэффициенты разложения по системе вейвлетов равны нулю, то её можно приблизить функциями из $L^1 \cap L^p$, у которых те же коэффициенты равны нулю.

Следствие 2.3. *Пусть $1 < p < \infty$ и $f \in L^1$. Тогда существуют функции $g_k \in L^1 \cap L^p$, сходящиеся к f в L^1 и такие, что $\langle g_k, \Psi_{rl} \rangle = 0$, если $\langle f, \Psi_{rl} \rangle = 0$.*

Доказательство. Обозначим через A множество $\{(r,l) : \langle f, \Psi_{rl} \rangle \neq 0\}$, и пусть T – ортогональный проектор на $\operatorname{span}\{\Psi_{rl} : (r,l) \in A\}$. Тогда $Tf = f$, и в качестве g_k достаточно взять Tf_k, где f_k – функции из первого следствия. □

§3. Весовая устойчивость для сингулярных интегралов

В этой части речь пойдёт о весовых пространствах $L^p(\mathbb{R}^d; w)$ и действии сингулярных интегральных операторов на них. Всю стандартную информацию об этих вещах можно найти, например, в книге [3]. Под сингулярным интегральным оператором (или оператором Кальдерона–Зигмунда) мы будем подразумевать оператор T, ограниченный в $L^2(\mathbb{R}^d)$, у которого есть ядро $K(x,y)$ – такая функция, что

$$(Tf)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy$$

при всех x вне носителя функции $f \in L^2$, и при этом для ядра K и точек x, y_1, y_2, таких, что y_1 и y_2 лежат в некотором кубе Q, а $x \notin 5Q$, выполняется неравенство

$$|K(x,y_1) - K(x,y_2)| \leqslant C\frac{|y_1 - y_2|^\alpha}{|x - y_1|^{d+\alpha}},$$

где α – некоторое положительное число (не зависящее от x, y_1 и y_2). Кроме того, нам потребуются веса из классов Макенхаупта A_p – всю необходимую информацию о них (в частности, ограниченность операторов Кальдерона–Зигмунда на пространствах $L^p(w)$ при $w \in A_p$) можно найти в книгах [3] и [4]. В книге [3], среди прочего, доказывается следующий факт, являющийся весовым аналогом свойства операторов Кальдерона–Зигмунда, называемого в [5] дальней L^1-регулярностью.

Факт 3. *Пусть T – оператор Кальдерона–Зигмунда, f – функция с носителем в кубе Q, такая, что $\int f = 0$, $w \in A_1$. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus 2\sqrt{d}Q} |Tf(x)|w(x)\,dx \lesssim \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|w(x)\,dx.$$

Отметим, что, строго говоря, в [3] рассматриваются только сингулярные интегралы, являющиеся свёрткой, то есть для которых $K(x,y)$ зависит только от $x - y$, однако это не играет никакой роли в доказательствах нужных нам утверждений (в частности, факта 3).

Итак, наша цель – доказать аналог теоремы 1 для пространств с весами. Для этого мы используем аналог разбиения Кальдерона–Зигмунда, приведённый в статье [1]. Для произвольного веса w и измеримого множества E мы будем использовать стандартное обозначение $w(E)$ для величины $\int\limits_E w$. Пусть $a \in A_\infty$, $w \in A_1$, $G \in L^1(w)$. Положим $b = \frac{a}{w}$, $g = Gb^{-1}$. Тогда $g \in L^1(a)$. Вес a, лежащий в A_∞, обладает свойством удвоения (то есть $a(2Q) \lesssim a(Q)$ для любого куба Q), и потому к g можно применить разбиение Кальдерона–Зигмунда с весом a и параметром λ и получить набор непересекающихся диадических кубов $\{Q_i\}$, такой, что

$$\lambda \leqslant \frac{1}{a(Q_i)} \int\limits_{Q_i} |Gb^{-1}|a \leqslant C\lambda$$

и $|Gb^{-1}| \leqslant \lambda$ почти всюду вне $\cup Q_i$. Тогда “хорошая часть” разбиения – это функция G_λ, определяемая следующим образом:

$$G_\lambda(x) = \begin{cases} G(x), x \notin \cup Q_i, \\ \frac{b(x)}{b(Q_i)} \int\limits_{Q_i} G, x \in Q_i. \end{cases}$$

Приведём свойства этого разбиения – их доказательства можно найти в статье [1]. Через $\tilde{Q}$ будем обозначать куб $2\sqrt{d}Q$.

Факт 4. *Построенные кубы $\{Q_i\}$ и функция G_λ обладают следующими свойствами*:
1) $|G_\lambda| \lesssim \lambda b$;
2) $\|G_\lambda\|_{L^1(w)} \lesssim \|G\|_{L^1(w)}$ *и, следовательно,* $\|G - G_\lambda\|_{L^1(w)} \lesssim \|G\|_{L^1(w)}$;
3) $\int\limits_{Q_i} (G - G_\lambda) = 0$;
4) $a(Q_i) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_{Q_i} |G|w$, *а потому* $a(\cup \tilde{Q}_i) \lesssim \frac{1}{\lambda}\|G\|_{L^1(w)}$.

Перейдём теперь к теореме об устойчивости.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < \infty$, а веса w и v таковы, что $w \in A_1$, $v \in A_p$ и $a := (\frac{w^p}{v})^{\frac{1}{p-1}} \in A_\infty$. Пусть T – оператор Кальдерона–Зигмунда, а функция $f \in L^1(w)$ такова, что $Tf \in L^1(w)$. Тогда для всякого $s > 0$ существует функция $u^{(s)} \in L^1(w)$, такая, что*

$$\begin{aligned} \|u^{(s)}\|_{L^p(v)} &\lesssim s, \\ \|f - u^{(s)}\|_{L^1(w)} &\lesssim \mathrm{dist}_{L^1(w)}(f, B_{L^p(v)}(s)), \\ \|Tf - Tu^{(s)}\|_{L^1(w)} &\lesssim \mathrm{dist}_{L^1(w)}(f, B_{L^p(v)}(s)) + \mathrm{dist}_{L^1(w)}(Tf, B_{L^p(v)}(s)). \end{aligned}$$

Доказательство. После того, как описано нужное нам разбиение, для доказательства остаётся только повторить рассуждение из книги [5]. Пусть h – функция, для которой выполняется $\|h\|_{L^p(v)} \leqslant s$, $\|f - h\|_{L^1(w)} \leqslant 2\,\mathrm{dist}_{L^1(w)}(f, B_{L^p(v)}(s))$. Положим $u^{(s)} := h + (f - h)_t$, где t – число, удовлетворяющее соотношению $t^{p-1}\|f - h\|_{L^1(w)} = s^p$. Здесь $(f - h)_t$ – функция, построение которой описано выше (и построена она по весам $w \in A_1$ и $a \in A_\infty$). Проверим, что $u^{(s)}$ является почти-минимайзером. Действительно,

$$\|f-u^{(s)}\|_{L^1(w)} \leqslant \|f-h\|_{L^1(w)} + \|(f-h)_t\|_{L^1(w)},$$

что по пункту 2 факта 4 не превосходит

$$C\|f-h\|_{L^1(w)} \lesssim \operatorname{dist}_{L^1(w)}(f, B_{L^p(v)}(s)).$$

Норма функции $u^{(s)}$ в $L^p(v)$ тоже оценивается легко:

$$\|u^{(s)}\|_{L^p(v)} \leqslant \|h\|_{L^p(v)} + \|(f-h)_t\|_{L^p(v)} \leqslant s + \Big(\int |(f-h)_t|^p v\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Учитывая, что, согласно факту 4, $|(f-h)_t| \lesssim tb$, где $b = aw^{-1} = (wv^{-1})^{\frac{1}{p-1}}$, второе слагаемое, с точностью до домножения на константу, не превосходит

$$\Big(\int t^{p-1}b^{p-1}|(f-h)_t|v\Big)^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{p-1}{p}}\|(f-h)_t\|_{L^1(w)}^{\frac{1}{p}} \lesssim t^{\frac{p-1}{p}}\|(f-h)\|_{L^1(w)}^{\frac{1}{p}} = s.$$

Таким образом, $\|u^{(s)}\|_{L^p(v)} \lesssim s$. Остаётся проверить выполнение последнего свойства, то есть устойчивость $u^{(s)}$ под действием оператора T. Для этого рассмотрим почти-минимайзер g для Tf, такой, что $\|g\|_{L^p(v)} \leqslant s$ и $\|Tf-g\|_{L^1(w)} \leqslant 2\operatorname{dist}_{L^1(w)}(Tf, B_{L^p(v)}(s))$, и напишем:

$$\|T(f-u^{(s)})\|_{L^1(w)} \\ \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus\cup\tilde{Q}_i} |Tf-Tu^{(s)}|w + \int\limits_{\cup\tilde{Q}_i} |Tf-g|w + \int\limits_{\cup\tilde{Q}_i} |Tu^{(s)}-g|w.$$

Оценим первое слагаемое. Заметим, что $f-u^{(s)} = (f-h)-(f-h)_t$ – это функция с носителем в $\cup Q_i$, причём, по пункту 3 факта 4, её интеграл по каждому из кубов Q_i равен нулю. Поэтому, используя факт 3, первое слагаемое можно оценить через

$$\|(f-h)-(f-h)_t\|_{L^1(w)} \lesssim \|f-h\|_{L^1(w)} \lesssim \operatorname{dist}_{L^1(w)}(f, B_{L^p(v)}(s)).$$

Второе слагаемое не больше, чем

$$\|Tf-g\|_{L^1(w)} \leqslant 2\operatorname{dist}_{L^1(w)}(Tf, B_{L^p(v)}(s)).$$

Для оценки третьего воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\int\limits_{\cup\tilde{Q}_i} |Tu^{(s)} - g|w = \int\limits_{\cup\tilde{Q}_i} |Tu^{(s)} - g|v^{1/p}a^{1/p'}$$
$$\leqslant \Big(\int\limits_{\cup\tilde{Q}_i} |Tu^{(s)} - g|^p v\Big)^{1/p} a(\cup\tilde{Q}_i)^{1/p'}.$$

Пользуясь, наконец, последним утверждением факта 4 (а также тем, что оператор T ограничен в $L^p(v)$ и $\|g\|_{L^p(v)} \lesssim s$, $\|u^{(s)}\|_{L^p(v)} \lesssim s$), можно заключить, что получившееся выражение оценивается через следующее:

$$(\|Tu^{(s)}\|_{L^p(v)} + \|g\|_{L^p(v)})\frac{1}{t^{1/p'}}\|f-h\|_{L^1(w)}^{1/p'} \lesssim s\Big(\frac{\|f-h\|_{L^1(w)}}{t}\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$= \|f-h\|_{L^1(w)}.$$

Согласно нашему выбору функции h, это не превосходит

$$2\,\mathrm{dist}_{L^1(w)}(f, B_{L^p(v)}(s)).$$

Остаётся собрать вместе полученные оценки, и теорема доказана. □

Список литературы

1. Д. С. Анисимов, С. В. Кисляков, *Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление.* — Алгебра и анализ, **16**, No. 5 (2004), 1–33.
2. J. Bourgain, *Some consequences of Pisier's approach to interpolation.* — Isr. Math. J., **77** (1992), 165–185.
3. J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio De Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Stud., vol. 116. Notas. Math., vol. 104, North-Holland, Amsterdam, 1985.
4. L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, 3rd edition, Springer, 2014.
5. S. Kislyakov, N. Kruglyak, *Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney–Besicovitch Coverings, and Singular Integrals*, Birkhauser, 2013.
6. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, 2005.
7. P. Wojtaszczyk, *Wavelets as unconditional bases in $L_p(\mathbb{R})$.* — J. Fourier Anal. Appl., **5**, No. 1 (1999), 73–85.

Tselishchev A. S. Stability of nearly optimal decompositions in Fourier analysis.

The question of existence is treated for near-minimizers for the distance functional (or E-functional in the interpolation terminology) that are stable under the action of certain operators. In particular, stable near-minimizers for the couple (L^1, L^p) are shown to exist when the operator is the projection on wavelets and these wavelets possess only some weak conditions of decay at infinity.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург;
Лаборатория им. П. Л. Чебышева
Санкт-Петербургский государственный университет
14 линия В.О., дом 29Б, Санкт-Петербург
199178, Россия;
E-mail: celis-anton@yandex.ru

Поступило 14 июня 2018 г.