Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

Е. А. Севостьянов

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

§1. Введение

Настоящая заметка посвящена изучению отображений с ограниченным и конечным искажением, активно исследуемых в последнее время (см., например, [1–12]). В относительно недавних работах [7] и [8] получены важные результаты о граничном поведении специальных классов гомеоморфизмов области n-мерного евклидового пространства. В частности, в [7, лемма 5 и теорема 15] утверждается возможность их непрерывного продолжения на границу при условии, что $(n-1)$-я степень их внешней дилатации удовлетворяет определённым ограничениям интегрального свойства. Ввиду [8, теорема 2.1] и [9, лемма 9.4] указанные утверждения могут быть несколько усилены: вместо внешней дилатации может быть взята внутренняя дилатация отображений. Основная цель настоящей работы – распространить упомянутые утверждения на отображения с ветвлением, используя при этом более общее понимание коэффициента квазиконформности (роль внутренней дилатации отображений здесь играет так называемая "дилатация порядка p", где показатель p является фиксированным числом с условием $p>1$). По этому поводу следует также упомянуть работы [13] и [14], где вопросы непрерывного продолжения в изолированную точку границы рассмотрены для отображений с ветвлением в случае непересекающихся граничных предельных множеств. Содержание результатов настоящей заметки, касающихся случая изолированных граничных точек, состоит в том, что такие ограничения в последнем случае могут быть отброшены. Перейдём к определениям.

Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, m – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Здесь и далее *предельным множеством отображения* $f: D\rightarrow \mathbb{R}^n$ *относительно множества* $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ называется множество

$$C(f,E):=\left\{y\in \mathbb{R}^n: \exists\, x_0\in E: y=\lim\limits_{m\rightarrow\infty} f(x_m), x_m\rightarrow x_0\right\}.$$

Ключевые слова: квазиконформные и квазирегулярные отображения, отображения с конечным искажением, граничное поведение.

Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит только из изолированных точек. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *сохраняющим границу* (см. [12, раздел 3, гл. II]), если выполнено соотношение $C(f, \partial D) \subset \partial f(D)$. Отметим, что условие сохранения границы для открытых дискретных отображений эквивалентно тому, что отображение f *замкнуто* (т.е., множество $f(A)$ замкнуто в $f(D)$ для любого замкнутого множества $A \subset D$), а также тому, что множество $f^{-1}(K)$ компактно в D для любого компакта $K \subset f(D)$ (см. [12, теорема 3.3]). Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, пишем $f \in FD$, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ и для некоторой функции $K(x) : D \to [1, \infty)$ выполнено условие $\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot |J(x,f)|$ при почти всех $x \in D$, где $J(x,f)$ – якобиан отображения f в точке x, а $\|f'(x)\| = \max\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$ (см. [6, п. 6.3, гл. VI]). Полагаем $l(f'(x)) = \min\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$. Отметим, что для отображений с конечным искажением и произвольного $p \geqslant 1$ корректно определена и почти всюду конечна так называемая *внутренняя дилатация* $K_{I,p}(x,f)$ *отображения f порядка p в точке x*, определяемая равенствами

$$K_{I,p}(x,f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^p}, & J(x,f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – неубывающая функция, f – локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что $f : D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, если

$$\int\limits_G \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty$$

для любой компактной подобласти $G \subset D$, где

$$|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}.$$

Согласно [15, с. 232, п. I, §49, гл. 6] область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно. Ниже мы считаем известными понятие p-модуля семейств кривых и семейств поверхностей, а также понятия, связанные с определением интеграла по поверхности и кривой (подробные сведения об этих определениях могут быть найдены в монографиях [9] и [11]). Происхождение следующего термина играет важную роль при исследовании граничного поведения пространственных отображений, см., например, [9, раздел 3.8]. Будем говорить, что граница ∂D области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$ *относительно* p*-модуля*, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M_p(\Gamma(E, F, D)) \geqslant \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. (Здесь M_p обозначает модуль семейств кривых, а $\Gamma(E, F, D)$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих множества E и F в области D, см., например, [9, разделы 2.2 и 2.5]). Граница области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *сильно достижимой относительно* p*-модуля*, если указанное выше свойство выполнено в каждой точке $x_0 \in \partial D$. Всюду далее, если не оговорено противное, $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – заданная измеримая по Лебегу функция, тождественно равная нулю вне рассматриваемой области D и такая, что $0 < Q(x) < \infty$ в D. Будем говорить, что локально интегрируемая функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty,$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x).$$

Здесь Ω_n – объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$, тогда, разумеется, $\Omega_n \varepsilon^n = m(B(x_0, \varepsilon))$. Далее по тексту

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x - x_0| = r} Q(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

обозначает среднее интегральное значение функции Q над сферой $S(x_0, r)$. Здесь ω_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{H}^{n-1}$ – $(n-1)$-мера Хаусдорфа. Основные результаты настоящей работы заключают в себе следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть область D локально связна в каждой точке своей границы, $n \geqslant 3$, отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ с конечным искажением является ограниченным, открытым, дискретным и замкнутым, а граница области $D' = f(D)$ является сильно достижимой относительно α-модуля, $n - 1 < \alpha$. Тогда f имеет непрерывное продолжение в точку $x_0 \in \partial D$, если*

$$\int\limits_1^{\infty} \left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{2}$$

и, кроме того, найдётся локально интегрируемая по Лебегу функция $Q : D \to [0, \infty]$ такая, что $K_{I,\alpha}(x, f) \leqslant Q(x)$ при почти всех $x \in D$, при этом выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) *либо при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} < \infty, \qquad \int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} = \infty, \tag{3}$$

2) *либо $Q \in FMO(x_0)$.*

В случае изолированных граничных точек справедливо следующее утверждение, в условиях которого не налагается никаких априорных предположений на границу отображённой области, за исключением ограниченности самой этой области.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 3$, $x_0 \in D$, и пусть отображение*

$$f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$$

класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ с конечным искажением является ограниченным, открытым, дискретным и замкнутым. Пусть $n - 1 < \alpha \leqslant n$. Тогда f имеет непрерывное продолжение в точку x_0, если имеет место условие (2) и, кроме того, найдётся локально интегрируемая по Лебегу функция $Q : D \to [0, \infty]$, такая что $K_{I,\alpha}(x, f) \leqslant Q(x)$ при почти всех $x \in D$, а при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнены условия (3). Аналогичное заключение имеет место, если $Q \in FMO(x_0)$.

Замечание 1. Условие (2) принадлежит Кальдерону [16].

§2. Вспомогательные сведения, основные леммы и доказательство теоремы 1

Доказательство основного результата статьи опирается на некоторый аппарат, необходимые минимальные сведения о котором приводятся ниже (см., например, [9]). Говорят, что некоторое свойство P выполнено для *p-почти всех поверхностей* области D, если оно имеет место для всех поверхностей, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их подсемейства, p-модуль которого равен нулю. При $p = n$ приставка "p-" в словах "p-почти всех...", как правило, опускается. В частности, говорят, что некоторое свойство выполнено для *p-почти всех кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме, быть может, некоторого их подсемейства, p-модуль которого равен нулю. Будем говорить, что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *p-обобщённо допустима* для семейства Γ k-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, сокращённо $\rho \in \mathrm{ext}_p \,\mathrm{adm}\,\Gamma$, если соотношение

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{4}$$

выполнено для p-почти всех поверхностей S семейства Γ (здесь и далее $d\mathcal{A}$ обозначает элемент площади поверхности S, см. [9, гл. 9]).

Следующий класс отображений представляет собой обобщение квазиконформных отображений в смысле кольцевого определения по Герингу ([2]) и отдельно исследуется (см., например, [9, глава 9]). Пусть $p \geqslant 1$, D и D' – заданные области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что $f : D \to D'$ – *нижнее Q-отображение в точке x_0 относительно p-модуля,* как только

$$M_p(f(\Sigma_\varepsilon)) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext}_p \,\mathrm{adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap A(x_0, \varepsilon, r_0)} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)} \, dm(x) \tag{5}$$

для каждого кольца $A(x_0, \varepsilon, r_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < r_0\}$, $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, где Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon, r_0)$. Следующее утверждение облегчает проверку бесконечной серии неравенств в (5) и может быть установлено аналогично доказательству [9, теорема 9.2] (см. также [4, теорема 6.1]).

Лемма 1. *Пусть $D,\ D' \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и $Q : D \to (0,\infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Отображение $f : D \to D'$ является нижним Q-отображением относительно p-модуля в x_0, $p > n-1$, тогда и только тогда, когда $M_p(f(\Sigma_\varepsilon)) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{r_0} \frac{dr}{||Q||_s(r)}$ при всех $\varepsilon \in (0,r_0)$, $r_0 \in (0,d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$, $s = \frac{n-1}{p-n+1}$, где, как и выше, Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0,r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon, r_0)$, $\|Q\|_s(r) = \left(\int\limits_{D(x_0,r)} Q^s(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{s}}$ – L_s-норма функции Q над сферой $D(x_0,r) = \{x \in D : |x-x_0| = r\} = D \cap S(x_0,r)$.*

Напомним, что *конденсатором* называют пару $E = (A,\,C)$, где A – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C – компактное подмножество в A. *Ёмкостью* конденсатора E порядка $p \geqslant 1$ называется следующая величина:

$$\operatorname{cap}_p E = \operatorname{cap}_p\,(A,\,C) = \inf_{u\in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u(x)|^p\,dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0(A,\,C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x) \geqslant 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. Здесь, как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. О понятии конденсатора и его ёмкости см., например, в [5]. Следующие важные сведения, касающиеся ёмкости пары множеств относительно области, могут быть найдены в монографии [9] либо работе В. Цимера [17]. Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и C_0, C_1 – непересекающиеся компактные множества, лежащие в замыкании области G. Полагаем $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$ и $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$, тогда *$p$-ёмкостью пары C_0, C_1 относительно замыкания области G* называется величина

$$C_p[G, C_0, C_1] = \inf \int\limits_R |\nabla u(x)|^p\ dm(x),$$

где точная нижняя грань берётся по всем функциям u, непрерывным в R^*, $u \in ACL(R)$, таким что $u = 1$ на C_1 и $u = 0$ на C_0. Указанные функции будем называть *допустимыми* для величины $C_p[G, C_0, C_1]$. Мы будем говорить, что *множество $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ разделяет C_0 и C_1 в R^**, если $\sigma \cap R$ замкнуто в R и найдутся непересекающиеся множества A и B, являющиеся открытыми в $R^* \setminus \sigma$, такие что $R^* \setminus \sigma = A \cup B$, $C_0 \subset A$

и $C_1 \subset B$. Пусть Σ обозначает класс всех множеств, разделяющих C_0 и C_1 в R^*. Для числа $p' = p/(p-1)$ определим величину

$$\widetilde{M}_{p'}(\Sigma) = \inf_{\rho \in \widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^{p'} dm(x),$$

где запись $\rho \in \widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma$ означает, что ρ – неотрицательная борелевская функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\int\limits_{\sigma \cap R} \rho d\mathcal{H}^{n-1} \geqslant 1, \quad \sigma \in \Sigma. \tag{6}$$

Заметим, что согласно результату Цимера

$$\widetilde{M}_{p'}(\Sigma) = C_p[G, C_0, C_1]^{-1/(p-1)}, \tag{7}$$

см. [9, теорема A.27] при $p = n$ и [17, с. 50] при $1 < p < \infty$. Заметим также, что согласно результату Шлыка

$$M_p(\Gamma(E, F, D)) = C_p[D, E, F], \tag{8}$$

см. [9, теорема A.17]. Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$, определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y в множестве E, т.е.

$$\begin{aligned} N(y, f, E) &= \mathrm{card}\,\{x \in E : f(x) = y\}\,, \\ N(f, E) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E). \end{aligned} \tag{9}$$

Следующая лемма впервые была доказана для случая гомеоморфизмов в [8, теорема 2.1]. Для более общих отображений с ветвлением её доказательство приведено в [14, лемма 2.3].

Лемма 2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (2). Если $p > n-1$, то каждое открытое дискретное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ такое, что $N(f, D) < \infty$, является нижним Q-отображением относительно p-модуля в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = N(f, D) \cdot K_{I,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x, f)$, $\alpha := \frac{p}{p-n+1}$, где внутренняя дилатация $K_{I,\alpha}(x, f)$ отображения f в точке x порядка α определена соотношением (1), а кратность $N(f, D)$ определена вторым соотношением в (9).*

Замечание 2. Заключение леммы 2 при $n = 2$ остаётся справедливым для классов Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ при аналогичных условиях, за исключением условия Кальдерона (2), которое в данном случае не требуется. Доказательство этого факта полностью аналогично [13, лемма 3] и потому опускается.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение (см., например, [9, лемма 7.4, гл. 7] при $p = n$ и [18, лемма 2.2] при $p \neq n$).

Предложение 1. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $Q(x)$ – измеримая по Лебегу функция, $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $Q \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Полагаем $A := A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$ и $\eta_0(r) = \frac{1}{Ir^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}$, где $I := I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}$ и $q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$ – среднее интегральное значение функции Q над сферой $S(x_0, r)$. Тогда*

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}} = \int\limits_A Q(x) \cdot \eta_0^p(|x - x_0|)\ dm(x) \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\ dm(x)$$

для любой измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1$.

Основным инструментом для доказательства главных результатов работы служит следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть область D локально связна в каждой точке своей границы, $n \geqslant 2$, отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ является ограниченным, открытым, дискретным и замкнутым нижним Q-отображением относительно p-модуля, $Q \in L^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, $s := \frac{n-1}{p-n+1}$, $n-1 < p < n+\frac{1}{n-2}$, а граница области $D' = f(D)$ является сильно достижимой относительно α-модуля, $\alpha := \frac{p}{p-n+1}$. Тогда отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ имеет непрерывное продолжение в точку $b \in \partial D$, если найдутся измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, \infty) \to [0, \infty]$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливо соотношение*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0, \qquad (10)$$

и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} Q^{\,s}(x)\cdot\psi^{\,\alpha}(|x-b|)\;dm(x)\;=\;o\,(I^{\,\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0))\,. \tag{11}$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся по крайней мере две последовательности x_i, $x_i'\in D$, $i=1,2,\ldots$, такие, что $x_i\to b$, $x_i'\to b$ при $i\to\infty$, $f(x_i)\to y$, $f(x_i')\to y'$ при $i\to\infty$ и $y'\neq y$. По определению сильно достижимой границы в точке $y\in\partial D'$ относительно α-модуля, для окрестности U этой точки, не содержащей точки y', найдутся компакт $C_0'\subset D'$, окрестность V точки y, $V\subset U$, и число $\delta>0$ такие, что

$$M_{\alpha}(\Gamma(C_0',F,D'))\geqslant\delta>0 \tag{12}$$

для произвольного континуума F, пересекающего ∂U и ∂V. Поскольку область D локально связна в точке b, можно соединить точки x_i и x_i' кривой γ_i, лежащей в достаточно малой окрестности $V_i\cap D$ точки b. Можно также считать, что $\gamma_i\subset\overline{B(b,2^{-i})}\cap D$. Поскольку $f(x_i)\in V$ и $f(x_i')\in D\setminus\overline{U}$ при всех достаточно больших $i\in\mathbb{N}$, найдётся номер $i_0\in\mathbb{N}$ такой, что, согласно формуле (12),

$$M_{\alpha}(\Gamma(C_0',f(\gamma_i),D'))\geqslant\delta>0 \tag{13}$$

при всех $i\geqslant i_0\in\mathbb{N}$. Заметим, что ввиду замкнутости отображения f, при всех достаточно малых $r>0$ имеем

$$C_0'\subset f(D)\setminus\overline{f(B(b,r)\cap D)}. \tag{14}$$

Действительно, если предположить, что включение (14) не выполняется при сколь угодно малых $r>0$, то нашлись бы последовательность $r_i>0$, $r_i\to0$ при $i\to\infty$, и элементы $y_i\in\overline{f(B(b,r_i)\cap D)}\cap C_0'$. Поскольку C_0' – компакт в $f(D)$, можно считать, что $y_i\to y_0\in C_0'$ при $i\to\infty$. Так как $y_i\in\overline{f(B(b,r_i)\cap D)}\cap C_0'$, то при каждом фиксированном $i\in\mathbb{N}$ найдётся последовательность $y_{ik}\in f(B(b,r_i)\cap D)$ такая, что $y_{ik}\to y_i$ при $k\to\infty$. Заметим, что $y_{ik}=f(x_{ik})$, $x_{ik}\in B(b,r_i)\cap D$.

В силу сходимости y_{1k} к y_1, для числа $1/2$ отыщется номер k_1 такой, что $|y_1-y_{1k_1}|<1/2$. Аналогично, в силу сходимости y_{2k} к y_2, для числа $1/4$ отыщется номер k_2 такой, что $|y_2-y_{2k_2}|<1/4$. Вообще, в силу сходимости y_{mk} к y_m для числа $1/2^m$ отыщется номер k_m такой, что $|y_m-y_{mk_m}|<1/2^m$. Но тогда, поскольку по построению $y_i\to y_0$

при $i \to \infty$, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$|y_0 - y_{mk_m}| \leqslant |y_0 - y_m| + |y_m - y_{mk_m}| \leqslant \varepsilon + 1/2^m$$

при всех $m \geqslant M = M(\varepsilon)$, а это означает, что $y_{mk_m} \to y_0$ при $m \to \infty$. Но, с другой стороны, $y_{mk_m} = f(x_{mk_m})$, $x_{mk_m} \in B(b, r_m) \cap D$, поэтому $y_0 \in C(f, b)$, что противоречит замкнутости отображения f поскольку, с одной стороны, мы имеем $C(f, \partial D) \subset \partial f(D)$ (см. [12, теорема 3.3]), а с другой стороны, $y_0 \in C(f, \partial D)$ и $y_0 \in C_0^{\prime}$, т.е. y_0 – внутренняя точка области $f(D)$. Полученное противоречие указывает на справедливость включения (14). Выберем δ_0 настолько малым, чтобы соотношение (14) имело место при всех $r \in (0, \delta_0)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $2^{-i} < \delta_0$ при всех $i \geqslant i_0$, где i_0 выбрано перед соотношением (13).

Рассмотрим семейство множеств

$$\Gamma_i := \bigcup_{r \in (2^{-i}, \delta_0)} \{\partial f(B(b, r) \cap D) \cap f(D)\}.$$

Заметим, что множество $\sigma_r := \partial f(B(b, r) \cap D) \cap f(D)$ замкнуто в $f(D)$. Кроме того, заметим, что σ_r отделяет $f(\gamma_i)$ от $C_0^{\prime}$ в $f(D)$, поскольку

$$f(\gamma_i) \subset f(B(b, r) \cap D) := A, \quad C_0^{\prime} \subset f(D) \setminus \overline{f(B(b, r) \cap D)} := B,$$

A и B открыты в $f(D)$ и $f(D) = A \cup \sigma_r \cup B$. Пусть Σ_i – семейство всех множеств, отделяющих $f(\gamma_i)$ от $C_0^{\prime}$ в $f(D)$. Поскольку f – открытое замкнутое отображение, мы получим:

$$(\partial f(B(b, r) \cap D)) \cap f(D) \subset f(S(b, r) \cap D), \quad r > 0. \qquad (15)$$

Действительно, пусть $y_0 \in (\partial f(B(b, r) \cap D)) \cap f(D)$, тогда найдётся последовательность $y_k \in f(B(b, r) \cap D)$ такая, что $y_k \to y_0$ при $k \to \infty$, где $y_k = f(x_k)$, $x_k \in B(b, r) \cap D$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$. Заметим, что случай $x_0 \in \partial D$ невозможен, поскольку в этом случае $y_0 \in C(f, \partial D)$, что противоречит замкнутости отображения f. Тогда $x_0 \in D$. Мыслимы две ситуации: 1) $x_0 \in B(b, r) \cap D$ и 2) $x_0 \in S(b, r) \cap D$. Однако случай 1) невозможен, поскольку тогда $f(x_0) = y_0$ и y_0 – внутренняя точка множества $f(B(b, r) \cap D)$, что противоречит выбору y_0. Таким образом, включение (15) установлено.

Здесь и далее объединения вида $\bigcup\limits_{r\in(r_1,r_2)} \partial f(B(b,r)\cap D)\cap f(D)$ понимаются как семейство множеств. Пусть

$$\rho^{n-1}\in \widetilde{\mathrm{adm}} \bigcup_{r\in(2^{-i},\delta_0)} \partial f(B(b,r)\cap D)\cap f(D)$$

в смысле соотношения (6), тогда также

$$\rho\in \mathrm{adm} \bigcup_{r\in(2^{-i},\delta_0)} \partial f(B(b,r)\cap D)\cap f(D)$$

в смысле соотношения (4) при $k=n-1$. Ввиду (15) мы получим, что

$$\rho\in \mathrm{adm} \bigcup_{r\in(2^{-i},\delta_0)} f(S(b,r)\cap D)$$

и, следовательно, так как $\widetilde{M}_q(\Sigma_i)\geqslant M_{q(n-1)}(\Sigma_i)$ при произвольном $q\geqslant 1$, то

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_{p/(n-1)}(\Sigma_i) &\geqslant \widetilde{M}_{p/(n-1)}\Bigg(\bigcup_{r\in(2^{-i},\delta_0)} \partial f(B(b,r)\cap D)\cap f(D)\Bigg)\\ &\geqslant \widetilde{M}_{p/(n-1)}\Bigg(\bigcup_{r\in(2^{-i},\delta_0)} f(S(b,r)\cap D)\Bigg)\\ &\geqslant M_p\Bigg(\bigcup_{r\in(2^{-i},\delta_0)} f(S(b,r)\cap D)\Bigg).\end{aligned}\tag{16}$$

Однако, ввиду формул (7) и (8),

$$\widetilde{M}_{p/(n-1)}(\Sigma_i)=\frac{1}{(M_\alpha(\Gamma(C_0', f(\gamma_i), f(D))))^{1/(\alpha-1)}}.\tag{17}$$

По лемме 1

$$\begin{aligned}&M_p\Bigg(\bigcup_{r\in(2^{-i},\delta_0)} f(S(b,r)\cap D)\Bigg)\\ &\geqslant \int\limits_{2^{-i}}^{\delta_0}\frac{dr}{\|Q\|_s(r)}=\int\limits_{2^{-i}}^{\delta_0}\frac{dt}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_b^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)},\quad i\in\mathbb{N},\quad s=\frac{n-1}{p-n+1},\end{aligned}\tag{18}$$

где $\|Q\|_s(r) = \left(\int\limits_{D(b,r)} Q^s(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{s}}$ – L_s-норма функции Q над сферой $S(b,r)\cap D$ и $\widetilde{q}_b(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x-b|=r} Q^s(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$. Воспользуемся теперь предложением 1. Согласно этому предложению, для функции $\eta(t) := \psi(t)/I(2^{-i},\delta_0)$, удовлетворяющей условию $\int\limits_{2^{-i}}^{\delta_0} \eta(r)dr = 1$, мы можем записать

$$\frac{\omega_{n-1}}{J_i^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{I^{\alpha}(2^{-i},\delta_0)} \int\limits_{A(b,2^{-i},\delta_0)} Q^s(x)\cdot\psi^{\alpha}(|x-b|)\, dm(x),$$

где $J_i := \int\limits_{2^{-i}}^{\delta_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_b^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}$, причём правая часть последнего соотношения стремится к 0 при $i\to\infty$ ввиду (10)–(11). Отсюда

$$\int\limits_{2^{-i}}^{\delta_0} \frac{dt}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\, t^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_b^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} \to \infty \quad \text{при} \quad i\to\infty.$$

Тогда из соотношений (16) и (18) вытекает, что

$$\widetilde{M}_{p/(n-1)}(\Sigma_i) \to \infty \quad \text{при} \quad i\to\infty,$$

однако в таком случае из (17) следует, что

$$M_{\alpha}(\Gamma(C_0', f(\gamma_i), f(D))) \to 0 \quad \text{при} \quad i\to\infty,$$

что противоречит неравенству (13). Полученное противоречие опровергает предположение о том, что f не имеет непрерывного продолжения в точку $b\in\partial D$. $\Box$

Следующее важное утверждение вытекает из леммы 3.

Теорема 3. *Пусть область D локально связна в каждой точке своей границы, $n\geqslant 2$, отображение $f: D\to\mathbb{R}^n$ является ограниченным, открытым, дискретным и замкнутым нижним Q-отображением относительно p-модуля, $Q\in L^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, $s := \frac{n-1}{p-n+1}$, $n-1<p<n+\frac{1}{n-2}$, а граница области $D' = f(D)$ является сильно достижимой относительно α-модуля, $\alpha := \frac{p}{p-n+1}$. Тогда отображение $f: D\to\mathbb{R}^n$ имеет непрерывное продолжение в точку $b\in\partial D$, если выполнено одно из следующих условий:*

1) *либо при некотором* $\varepsilon_0 > 0$ *и всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *выполнены соотношения*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} \widetilde{q}_b^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} < \infty, \qquad \int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} \widetilde{q}_b^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} = \infty, \tag{19}$$

где $\widetilde{q}_b(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-b|=r} Q^s(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$ *обозначает среднее интегральное значение функции* $Q^s(x)$ *над сферой* $S(b, r)$;

2) *либо* $Q^s \in FMO(b)$.

Доказательство. В случае ограничений (19) положим

$$\psi(r) = \frac{1}{r^{\frac{n-1}{\alpha-1}} \widetilde{q}_b^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)}, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt,$$

$$\eta(r) = \psi(r)/I(\varepsilon, \varepsilon_0), \quad r \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда ввиду предложения 1 у нас выполняются условия (10)–(11) леммы 3 и желанное заключение вытекает прямо из этой леммы. Чтобы доказать теорему в случае $Q^s \in FMO(b)$, необходимо при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ рассмотреть функцию $\psi(t) := \frac{1}{\left(t\, \log \frac{1}{t}\right)^{n/\alpha}}$, где $t \in (0, \varepsilon_0)$. Заметим, что для функций класса FMO в точке b справедливо соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q^s(x)\, dm(x)}{\left(|x-b| \log \frac{1}{|x-b|}\right)^n} = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{20}$$

при $\varepsilon \to 0$. Используя обозначения леммы 3, имеем:

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt \geqslant \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}} \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) < \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Кроме того, из соотношения (20) вытекает, что

$$\frac{1}{I^{\alpha}(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} Q^s(x) \cdot \psi^{\alpha}(|x-b|)\, dm(x) \leqslant C \left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\alpha} \to 0 \tag{21}$$

при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, условия (10)–(11) леммы 3 снова выполняются. Теорема полностью доказана. $\Box$

Доказательство теоремы 1 вытекает из леммы 2 и теоремы 3, а также того факта, что максимальная кратность $N(f, D)$ замкнутого открытого дискретного отображения f конечна (см., например, [12, лемма 3.2]). □

Из леммы 3 и замечания 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть область D локально связна в каждой точке своей границы, отображение $f : D \to \mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ с конечным искажением является ограниченным, открытым, дискретным и замкнутым, а граница области $D' = f(D)$ является сильно достижимой относительно α-модуля, $1 < \alpha$. Тогда f имеет непрерывное продолжение в точку $x_0 \in \partial D$, если найдётся измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [0, \infty]$ такая, что $K_{I,\alpha}(x, f) \leqslant Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и либо при некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполнено условие расходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{1}{\alpha-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)} = \infty,$$

где $q_{x_0}(r) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} Q(x_0 + re^{i\theta})\, d\theta$, либо $Q \in FMO(x_0)$.

§3. Связь нижних и верхних оценок искажения модуля при отображении

В предыдущих пунктах статьи мы уже имели дело со связью между отображениями, искажающими модуль семейств кривых и поверхностей. Такая связь использовалась, например, при доказательстве леммы 3. Было бы желательно, однако, получить результат по этому поводу в более формальном виде, что было бы полезным с точки зрения приложений. В связи со сказанным, вспомним, в частности, доказательство результатов последнего раздела, где упомянутая связь явно и весьма существенно используется. Следующее утверждение содержит в себе результат, касающийся указанной связи для случая отображений с ветвлением и граничных точек области (для гомеоморфизмов и внутренних точек подобные утверждения могут быть найдены, например, в [4, теорема 7.1], [8, предложение 3] и [19, теорема 3.8, гл. 3]).

Теорема 5. *Пусть $x_0 \in \partial D$, отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ является ограниченным, открытым, дискретным и замкнутым нижним*

Q-отображением относительно p-модуля в области $D \subset \mathbb{R}^n$,

$$Q \in L^{\frac{n-1}{p-n+1}}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n), \quad n-1<p, \quad \text{и} \ \ \alpha := \frac{p}{p-n+1}.$$

Тогда для каждого $\varepsilon_0 < d_0 := \sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$ и каждого компакта $C_2 \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$ найдётся ε_1, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$, такое, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и каждого компакта $C_1 \subset \overline{B(x_0,\varepsilon)} \cap D$ выполнено неравенство

$$M_{\alpha}(f(\Gamma(C_1, C_2, D))) \leqslant \int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_1)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\eta^{\alpha}(|x-x_0|)\, dm(x), \qquad (22)$$

где $A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_1)=\{x\in\mathbb{R}^n : \varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_1\}$ и $\eta : (\varepsilon,\varepsilon_1)\rightarrow[0,\infty]$ – произвольная измеримая по Лебегу функция такая, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \eta(r)\, dr = 1. \qquad (23)$$

Доказательство. Зафиксируем ε_0 такое, как в условии теоремы. Пусть компакт C_2 удовлетворяет условию $C_2 \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$. Тогда $K := f(C_2)$ – компакт в $f(D)$. Пусть K^* – полный прообраз компакта K при отображении f в D. Поскольку по условию отображение f замкнутое, множество K^* является компактом в D (см. [12, теорема 3.3]), поэтому найдётся ε_1 такое, что $K^* \cap \overline{B(x_0,\varepsilon_1)} = \varnothing$. Аналогично тому, как было установлено включение (14), мы убеждаемся в том, что

$$K \subset D' \setminus \overline{f(B(x_0,r)\cap D)}, \quad r\in(0,\varepsilon_1). \qquad (24)$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и компакт $C_1 \subset \overline{B(x_0,\varepsilon)} \cap D$. Рассмотрим семейство множеств $\Gamma_{\varepsilon} := \bigcup\limits_{r\in(\varepsilon,\varepsilon_1)} \{\partial f(B(x_0,r)\cap D)\cap f(D)\}$. Заметим, что множество $\sigma_r := \partial f(B(x_0,r)\cap D)\cap f(D)$ замкнуто в $f(D)$. Кроме того, заметим, что σ_r при $r\in(\varepsilon,\varepsilon_1)$ отделяет $f(C_1)$ от $K=f(C_2)$ в $f(D)$, поскольку

$$f(C_1)\subset f(B(x_0,r)\cap D) := A, \quad f(C_2) \subset f(D)\setminus \overline{f(B(x_0,r)\cap D)} := B,$$

A и B открыты в $f(D)$ и $f(D) = A\cup\sigma_r\cup B$. Пусть Σ_{ε} – семейство всех множеств, отделяющих $f(C_1)$ от $f(C_2)$ в $f(D)$. Поскольку f – открытое замкнутое отображение, по аналогии с включением (15) мы получаем, что

$$(\partial f(B(x_0,r)\cap D))\cap f(D) \subset f(S(x_0,r)\cap D), \quad r>0. \qquad (25)$$

Пусть $\rho^{n-1} \in \widetilde{\mathrm{adm}} \bigcup\limits_{r\in(\varepsilon,\varepsilon_1)} \partial f(B(x_0,r)\cap D)\cap f(D)$ в смысле соотношения (6), тогда также $\rho \in \mathrm{adm} \bigcup\limits_{r\in(\varepsilon,\varepsilon_1)} \partial f(B(x_0,r)\cap D)\cap f(D)$ в смысле соотношения (4) при $k=n-1$. Ввиду (25) мы получим, что $\rho \in \mathrm{adm} \bigcup\limits_{r\in(\varepsilon,\varepsilon_1)} f(S(x_0,r)\cap D)$ и, следовательно, так как $\widetilde{M}_q(\Sigma_\varepsilon) \geqslant M_{q(n-1)}(\Sigma_\varepsilon)$ при произвольном $q\geqslant 1$, то аналогично оценкам (16) мы имеем

$$\widetilde{M}_{p/(n-1)}(\Sigma_\varepsilon) \geqslant M_p\left(\bigcup_{r\in(\varepsilon,\varepsilon_1)} f(S(x_0,r)\cap D)\right). \tag{26}$$

Однако, ввиду формул (7) и (8),

$$\widetilde{M}_{p/(n-1)}(\Sigma_\varepsilon) = \frac{1}{(M_\alpha(\Gamma(f(C_1),f(C_2),f(D))))^{1/(\alpha-1)}}.$$

По лемме 1

$$\begin{aligned} M_p\left(\bigcup_{r\in(\varepsilon,\varepsilon_1)} f(S(x_0,r)\cap D)\right) &\geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{dr}{\|\,Q\|_s(r)} \\ &= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{dt}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}} t^{\frac{n-1}{\alpha-1}} \widetilde{q}_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)}, \quad i\in\mathbb{N}, \quad s=\frac{n-1}{p-n+1}, \end{aligned} \tag{27}$$

где $\|Q\|_s(r)=\left(\int\limits_{D(x_0,r)} Q^s(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{s}}$ – L_s-норма функции Q над сферой $S(x_0,r)\cap D$ и $\widetilde{q}_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q^s(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$. Тогда из (26)–(27) вытекает, что

$$M_\alpha(\Gamma(f(C_1),f(C_2),f(D))) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{\alpha-1}}, \tag{28}$$

где $I=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_{x_0}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)}$. Заметим, что

$$f(\Gamma(C_1,C_2,D)) \subset \Gamma(f(C_1),f(C_2),f(D)),$$

так что из (28) вытекает, что

$$M_\alpha(f(\Gamma(C_1,C_2,D))) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{\alpha-1}}.$$

Завершает доказательство применение предложения 1. $\square$

§4. Устранение изолированных особенностей

В работах [13,14] было показано, что открытые дискретные замкнутые ограниченные отображения области $D\setminus\{x_0\}$ классов $W_{\rm loc}^{1,\varphi}$, удовлетворяющие условиям вида (2)–(3) при $p=n$, продолжаются по непрерывности в точку $x_0\in D$, как только предельные множества $C(f,x_0)$ и $C(f,\partial D)$ не пересекаются. Ниже этот результат будет доказан для случая, когда $p\in[n,n+1/(n-2))$ и условие $C(f,x_0)\cap C(f,\partial D)=\varnothing$, вообще говоря, может нарушаться. Аналог следующего утверждения доказан, например, в [5, лемма 2.2].

Лемма 4. *Пусть $x_0\in D$, $f:D\setminus\{x_0\}\rightarrow {\Bbb R}^n$, $n\geqslant 2$, является открытым дискретным и замкнутым ограниченным нижним Q-отображением относительно p-модуля в точке $x_0\in D$, где $Q\in L_{\rm loc}^{\frac{n-1}{p-n+1}}({\Bbb R}^n)$, $n-1<p$. Предположим, что найдутся $\varepsilon_0>0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t):(0,\varepsilon_0)\rightarrow [0,\infty]$ такие, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ выполнены условия (10)–(11), где $\alpha=\frac{p}{p-n+1}$, $s=\frac{n-1}{p-n+1}$. Если Γ – семейство всех кривых $\gamma:(0,1)\rightarrow D\setminus\{x_0\}$ таких, что $\gamma(t_k)\rightarrow x_0$ для некоторой последовательности $t_k\rightarrow 0$, $\gamma(t)\not\equiv x_0$, то $M_{\alpha}\left(f(\Gamma)\right)=0$.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0=0$. Заметим, что

$$\Gamma>\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Gamma_i, \tag{29}$$

где Γ_i – семейство кривых $\alpha(t):(0,1)\rightarrow{\Bbb R}^n$ таких, что $\alpha(1)\in S(0,r_i)$, где r_i – некоторая последовательность такая, что $r_i\rightarrow 0$ при $i\rightarrow\infty$ и $\alpha(t_k)\rightarrow 0$ при $k\rightarrow\infty$ для той же самой последовательности $t_k\rightarrow 0$ при $k\rightarrow\infty$. Зафиксируем $i\geqslant 1$. Можно считать, что $r_i<d_0:=\sup\limits_{x\in D\setminus\{0\}}|x|$. Положим $C_2:=S(0,r_i)$ и заметим, что $C_2\subset D\setminus B(0,r_i)$. Тогда согласно теореме 5 найдётся $k_i\in(0,r_i)$ такое, что для любого $\varepsilon\in(0,k_i)$ и любого компакта $C_1\subset\overline{B(0,\varepsilon)}\setminus\{0\}$ выполнено соотношение

$$M_{\alpha}(f(\Gamma(C_1,C_2,D\setminus\{0\})))\leqslant\int\limits_{A(0,\varepsilon,k_i)}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\eta^{\alpha}(|x|)dm(x), \tag{30}$$

где $\eta : (\varepsilon, k_i) \to [0, \infty]$ – произвольная измеримая по Лебегу функция такая, что
$$\int\limits_{\varepsilon}^{k_i} \eta(r)dr = 1. \tag{31}$$

По условию $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. В таком случае, найдётся $l_i \in (0, k_i]$ такое, что $I(\varepsilon, k_i) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, l_i)$. Заметим, что при указанных $\varepsilon > 0$ функция
$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, k_i), & t \in (\varepsilon, k_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, k_i) \end{cases}$$
удовлетворяет условию нормировки вида (31) в кольце $A(0, \varepsilon, k_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < k_i\}$. Положим $C_1 = S(0, \varepsilon)$, тогда ввиду (30) мы получим, что
$$\begin{aligned} &M_\alpha\Big(f\big(\Gamma(S(0,\varepsilon),\, S(0,r_i),\, D\setminus\{0\})\big)\Big) \\ &\leqslant \int\limits_{A(0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\cdot\eta^\alpha(|x|)\,dm(x) \leqslant \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \end{aligned} \tag{32}$$
где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \frac{1}{(I(\varepsilon,k_i))^{\alpha}} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^{\alpha}(|x|)\,dm(x)$. Принимая во внимание (11), получим, что $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что при каждом $\varepsilon \in (0, k_i)$ справедливо неравенство
$$\Gamma_i > \Gamma\left(S(0,\varepsilon),\, S(0,r_i), D\setminus\{0\}\right). \tag{33}$$
Таким образом, при каждом фиксированном $i = 1, 2, \ldots$ из (32) и (33) получаем, что
$$M_\alpha(f(\Gamma_i)) \leqslant \mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0 \tag{34}$$
при $\varepsilon \to 0$ и каждом фиксированном $i \in \mathbb{N}$. Однако, левая часть неравенства (34) не зависит от ε и, следовательно, $M_\alpha(f(\Gamma_i)) = 0$. Наконец, из (29) и свойства полуаддитивности α-модуля вытекает, что $M_\alpha(f(\Gamma)) = 0$. $\Box$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $x_0 \in D$, отображение $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ является ограниченным, открытым, дискретным и замкнутым нижним Q-отображением относительно p-модуля, $p \in [n, n+1/(n-2))$, где $Q \in L_{\rm loc}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда отображение $f : D\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ имеет непрерывное* *продолжение в точку* x_0*, если при некотором* $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$ *и всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *выполнены условия* (10)–(11)*, где* $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$, $s = \frac{n-1}{p-n+1}$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $D \setminus \{0\}$, $x_j \to 0$, $\quad x_j' \to 0$, такие, что $|f(x_j) - f(x_j')| \geqslant a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(0, \varepsilon_0)$, где ε_0 – из условия леммы. Полагаем $r_j = \max\left\{|x_j|,\, |x_j'|\right\}$. Соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(0, r_j)} \setminus \{0\}$. Обозначим эту кривую символом C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (D \setminus \{0\}, C_j)$ (понятие конденсатора и p-ёмкости конденсатора напоминалось после леммы 1; см., например, [5]).

В силу открытости и непрерывности отображения f, пара $f(E_j)$ также является конденсатором. Для произвольного конденсатора $E = (A,\, C)$ в $\mathbb{R}^n$ через Γ_E будет обозначаться семейство всех кривых вида $\gamma : [a,\, b) \to A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. (Здесь, как обычно, $|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \gamma(t),\, t \in [a, b)\}$.) Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$. Пусть Γ_j^* – семейство всех максимальных поднятий семейства кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ при отображении f с началом в C_j, лежащих в $D \setminus \{0\}$. Заметим, что $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Поскольку $\Gamma_{f(E_j)} > f(\Gamma_j^*)$, мы получим:

$$M_\alpha\left(\Gamma_{f(E_j)}\right) \leqslant M_\alpha\left(f(\Gamma_j^*)\right) \leqslant M_\alpha\left(f(\Gamma_{E_j})\right). \qquad (35)$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} может быть разбито на два подсемейства:

$$\Gamma_{E_j} = \Gamma_{E_{j_1}} \cup \Gamma_{E_{j_2}}, \qquad (36)$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ – семейство всех кривых $\alpha(t) : [a,\, c) \to D \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдутся $t_k \in [a,\, c)$, для которых $\alpha(t_k) \to 0$ при $t_k \to c - 0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ – семейство всех кривых $\alpha(t) : [a,\, c) \to D \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдутся $t_k \in [a,\, c)$, для которых $\mathrm{dist}\,(\alpha(t_k), \partial D) \to 0$ при $t_k \to c - 0$.

В силу соотношений (35) и (36),

$$M_\alpha\left(\Gamma_{f(E_j)}\right) \leqslant M_\alpha(f(\Gamma_{E_{j_1}})) + M_\alpha(f(\Gamma_{E_{j_2}})). \qquad (37)$$

По лемме 4 $M_\alpha(f(\Gamma_{E_{j_1}})) = 0$. Заметим, что

$$\Gamma_{E_{j_2}} > \Gamma(S(0, r_j),\ S(0, \varepsilon_0),\ D \setminus \{0\}).$$

Для континуума $C_2 := S(0,\varepsilon_0)$ имеем: $C_2 \subset D\setminus(B(0,\varepsilon_0)\cup\{0\})$. Выберем ε_1 таким, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ и любого континуума $C_1 \subset \overline{B(0,\varepsilon)}\setminus\{0\}$ имели бы место условия (22)–(23) (что возможно в силу теоремы 5). Ввиду (10) мы получим, что $I(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ и некотором $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$. Так как $r_j \to 0$ при $j \to \infty$, найдётся номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $r_j < \varepsilon_2$ при $j \geqslant n_0$. При $j \geqslant n_0$ рассмотрим семейство функций

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_j,\varepsilon_1), & t \in (r_j,\, \varepsilon_1),\\ 0, & t \in \mathbb{R}\setminus(r_j,\, \varepsilon_1). \end{cases}$$

Имеем:

$$\int\limits_{r_j}^{\varepsilon_1} \eta_j(t)\, dt = \frac{1}{I\left(r_j,\varepsilon_1\right)} \int\limits_{r_j}^{\varepsilon_1} \psi(t) dt = 1.$$

Полагая $C_1 := S(0,r_j)$, из (22)–(23) и учитывая (37), получаем, что

$$M_\alpha(\Gamma_{f(E_j)}) \leqslant \frac{1}{I^\alpha(r_j,\varepsilon_1)} \int\limits_{r_j<|x|<\varepsilon_1} Q(x)\, \psi^{\,\alpha}(|x|)\, dm(x).$$

Правая часть последнего соотношения стремится к 0 при $j \to \infty$ ввиду условий (10)–(11). Окончательно, по [11, предложение 10.2, гл. II],

$$\operatorname{cap}_\alpha f(E_j) \to 0, \quad j \to \infty. \tag{38}$$

С другой стороны, так как $p \in [n, n+1/(n-2))$, то $n-1 < \alpha \leqslant n$. Поэтому, поскольку отображение f ограничено, множество $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D\setminus\{0\})$ имеет положительную α-ёмкость (см. [11, следствие 1.16, гл. VII]). В таком случае, ввиду [5, лемма 2.1],

$$\operatorname{cap}_\alpha\left(f(D\setminus\{0\}), f(C_j)\right) \geqslant \delta > 0 \tag{39}$$

при всех $j \in \mathbb{N}$ и некотором $\delta > 0$. Соотношения (38) и (39) противоречат друг другу, что опровергает исходное предположение. $\square$

Доказательство. Доказательство теоремы 2 непосредственно вытекает из комбинации лемм 2 и 5, а также дополнительных рассуждений, связывающих условия (10)–(11) с условиями 1)–2) из теоремы 1, присутствующими также в теореме 2 (указанные рассуждения аналогичны рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы 3). $\square$

Список литературы

1. C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space.* — Intern. Journ. Math. Math. Sci. **22** (2003), 1397–1420.
2. F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space.* — Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–393.
3. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends.* — Укр. мат. вестник. **12**, No. 1 (2015), 27—66.
4. A. Golberg, R. Salimov, *Topological mappings of integrally bounded p-moduli.* — Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. **3(LXI)**, No. 1 (2012), 49—66.
5. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Singularities of discrete open mappings with controlled p-module.* — J. Anal. Math. **127** (2015), 303–328.
6. T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford, Clarendon Press, 2001.
7. Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории классов Орлича–Соболева.* — Алгебра анализ **25**, No. 6 (2013), 50–102.
8. D. Kovtonuyk, V. Ryazanov, *New modulus estimates in Orlicz-Sobolev classes.* — Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. **5(LXIII)**, No. 1 (2014), 131–135.
9. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York: Springer Science, Business Media, LLC, 2009.
10. Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
11. S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
12. M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes **11** 1976, 1–44.
13. Е. А. Севостьянов, *Об устранении изолированных особенностей классов Орлича–Соболева с ветвлением.* — Укр. мат. журнал. **68**, No. 9 (2016), 1259–1272.
14. Е. А. Севостьянов, Р. Р. Салимов, Е. А. Петров, *Об устранении особенностей классов Орлича–Соболева.* — Укр. мат. вестник. **13**, No. 3 (2016), 324–349.
15. К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Мир, М., 1969.
16. A. P. Calderon, *On the differentiability of absolutely continuous functions.* — Riv. Math. Univ. Parma **2** (1951), 203–213.
17. W. P. Ziemer, *Extremal length and p-capacity.* — Michigan Math. J. **16** (1969), 43–51.
18. Р. Р. Салимов, *Об оценке меры образа шара.* — Сиб. матем. журн. **53**, No. 4 (2012), 920—930.
19. Д. А. Ковтонюк, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева* (под редакцией В. И. Рязанова), Наукова думка, Киев, 2013.

Sevost′yanov E. A. On the boundary behavior of some classes of mappings.

The boundary behavior of closed open discrete mappings of Sobolev and Orlicz–Sobolev classes in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, is studied. It is proved that a mapping f mentioned above has a continuous extension to a boundary point $x_0 \in \partial D$ of a domain $D \subset \mathbb{R}^n$ whenever its inner dilatation of order $\alpha > n-1$ has a majorant of finite mean oscillation class at the point in question. Another sufficient condition for continuous extension of mappings is the divergence of some integral. Some results on continuous extension of these mappings to an isolated boundary point are also proved.

Кафедра
математического анализа,
Житомирский государственный
университет им. И. Франко
ул. Большая Бердичевская, 40,
10008 г. Житомир, Украина
E-mail: `esevostyanov2009@gmail.com`

Поступило 1 июня 2018 г.