Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 467, 2018 г.

А. В. Потепун

МЕРА ХАУСДОРФА НА N-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В $\mathbb{R}^m$ И N-МЕРНЫЕ ВАРИАЦИИ

По известной теореме Жордана кривая в $\mathbb{R}^m$, параметризованная непрерывным инъективным отображением $f : [a; b] \to \mathbb{R}^m$ с координатными функциями $f_1, \dots, f_m$, спрямляема тогда и только тогда, когда вариации всех функций $f_1, \dots, f_m$ конечны, а для длины кривой выполнены неравенства:

$$V_{f_i}\big([a;b]\big) \leqslant l\big(f([a;b])\big) \leqslant \sum_{k=1}^{m} V_{f_k}\big([a;b]\big), \quad i = 1, \dots, m.$$

При этом $l\big(f([a;b])\big) = H_1\big(f([a;b])\big)$, где H_1 – одномерная мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^m$ (см. [4], теорема 2.10.13). В статье [3] была определена вариация $V_f(P)$ непрерывного отображения $f : G \to \mathbb{R}^n$, где G – открыто в $\mathbb{R}^n$, P – "ячейка" (параллелепипед вида $P = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i; b_i)$, $\overline{P} \subset G$). В данной работе понятие вариации непрерывного отображения на множестве обобщено на случай множества $A \subset G$, являющегося объединением не более чем счётного семейства компактов. Пусть $f \colon G \to \mathbb{R}^m$, где $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \leqslant m$, $f_1, \dots, f_m$ – координатные функции отображения f. Если $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant m$, $\alpha = \{i_1, \dots, i_n\}$, то обозначим через f_α отображение с координатными функциями $f_{i_1}, \dots, f_{i_n}$:

$$f_\alpha : \begin{cases} x_{i_1} = f_{i_1}(t_1, \dots, t_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{i_n} = f_{i_n}(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \qquad (t_1, \dots, t_n) \in G$$

(т. е. f_α – отображение множества G в $\mathbb{R}^n$).

Основной результат данной работы: если f – непрерывное инъективное отображение открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, $n \leqslant m$, множество $A \subset G$ является объединением не более чем счётного семейства компактов, то

$$V_{f_\alpha}(A) \leqslant H_n\big(f(A)\big),$$

Ключевые слова: вариация непрерывного отображения, теорема Жордана, мера Хаусдорфа.

где V_{f_α} – вариация отображения f_α, H_n – n-мерная мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^m$. Здесь n-мерная мера Хаусдорфа определяется как в [4, гл. 2, § 2.10, п. 2.10.2]):

$$H_n(B) = \lim_{\delta\to 0+} \varphi_\delta(B) = \sup_{\delta>0} \varphi_\delta(B),$$

при этом

$$\varphi_\delta(B) = \inf\left\{ \sum_{j\in N} v_n 2^{-n} (\operatorname{diam} S_j)^n \;\middle|\; \operatorname{diam} S_j \leqslant \delta, \quad B \subset \bigcup_{j\in N} S_j \right\}$$

(v_n – объём n-мерного шара радиуса 1).

Пусть f – непрерывное отображение открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\mathfrak{K}_\sigma = \left\{ A \subset G \;\middle|\; A = \bigcup_{i\in N_A} K_i, K_i \text{ – компактны} \right\}.$$

Здесь множество индексов N_A – не более чем счётно. Поскольку множества $f(K_i)$ компактны, множества $f(A) = \bigcup\limits_{i\in N_A} f(K_i)$ измеримы по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. В частности, если $\langle a; b\rangle$ – промежуток произвольного типа с концами a, b (каждый из концов может принадлежать или не принадлежать промежутку), тогда произвольный n-мерный параллелепипед имеет вид $P = \prod\limits_{i=1}^{n} \langle a_i; b_i\rangle$. Легко видеть, что любой параллелепипед либо компактен, либо является объединением последовательности компактных параллелепипедов, поэтому $P \in \mathfrak{K}_\sigma$.

Для множества $A \in \mathfrak{K}_\sigma$ определим вариацию

$$V_f(A) = \sup\left\{ \sum_{i\in I} \lambda_n\big(f(A_i)\big) \;\middle|\; \bigcup_{i\in I} A_i = A,\ A_i \ \text{ дизъюнктны},\ A_i \in \mathfrak{K}_\sigma \right\}.$$

Здесь множество индексов I не более чем счётно, λ_n – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$N_f(A, y) = \begin{cases} \operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap A), \text{ если } f^{-1}(y) \cap A \text{ конечно;} \\ +\infty, \text{ если } f^{-1}(y) \cap A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть G открыто в $\mathbb{R}^n$, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, f – непрерывное отображение. Если $A \subset G$, $A \in \mathfrak{K}_\sigma$, то*

$$V_f(A) = \int_{\mathbb{R}^n} N_f(A)\, d\lambda_n.$$

Это обобщение известной теоремы о представлении вариации непрерывной функции одной переменной с помощью индикатрисы Банаха, см., например, [2, гл. VIII, §5].

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{K}_\sigma$, то, поскольку множество $f(A)$ измеримо, его характеристическая функция $\chi_{f(A)}$ тоже измерима. Если $\tau = \{A_i\}_{i \in N_A}$ – разбиение множества A на дизъюнктные множества из $\mathfrak{K}_\sigma$ и множество N_A не более чем счетно, то обозначим $N_\tau = \sum\limits_{i \in N_A} \chi_{f(A_i)}$. Эта функция измерима и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_\tau \, d\lambda_n = \sum_{i \in N_A} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{f(A_i)} d\lambda_n = \sum_{i \in N_A} \lambda_n(f(A_i)). \tag{1}$$

Докажем, что если τ' – более мелкое разбиение, чем τ, то $N_{\tau'} \geqslant N_\tau$. В самом деле, любое множество $A_i \in \tau$ представляется в виде $A_i = \bigcup\limits_{j \in N_i} A_{ij}$, где $A_{ij} \in \tau'$, а тогда $f(A_i) = \bigcup\limits_{j \in N_i} f(A_{ij})$,

$$\chi_{f(A_i)} \leqslant \sum_{j \in N_i} \chi_{f(A_{ij})} \Longrightarrow N_\tau = \sum_{i \in N_A} \chi_{f(A_i)} \leqslant \sum_{i \in N_A} \sum_{j \in N_i} \chi_{f(A_{ij})} = N_{\tau'}.$$

Непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ представляется в виде объединения счётного множества дизъюнктных ячеек ([1, гл. V, §4]): $G = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$, P_j – кубические ячейки. Стороны ячеек P_j не превосходят $1/2$ (см. доказательство теоремы V.4.1 из [1]), поэтому диаметр P_j, равный длине диагонали ячейки, не превосходит $\sqrt{n}/2$. Разделим каждую ячейку P_j на 2^{sn} равных дизъюнктных частей (каждую сторону ячейки P_j делим на 2^s равных частей):

$$P_j = \bigcup_{k=1}^{2^{sn}} P_{jk} \Longrightarrow G = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{sn}} P_{jk}, \ \operatorname{diam} P_{jk} \leqslant \frac{1}{2^s} \cdot \operatorname{diam} P_j \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2^{s+1}}.$$

Обозначим $I_s = \{(j,k) \mid j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant 2^{sn}\}$. Если $A \subset G$, $A \in \mathfrak{K}_\sigma$, то

$$\begin{aligned} A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{sn}} (A \cap P_{jk}) &\Longrightarrow \{A \cap P_{jk}\}_{(j,k) \in I_s} \\ &= \{A_{jk}\}_{(j,k) \in I_s} \text{ – разбиение множества } A. \end{aligned}$$

Если $A, B \in \mathfrak{K}_\sigma$, то

$$A \cap B = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (K_i \cap K_j') \in \mathfrak{K}_\sigma$$

и, так как параллелепипеды принадлежат $\mathfrak{K}_\sigma$, то $\{A_{jk}\}_{(j,k)\in I_s}$ – разбиение множества A на множества из $\mathfrak{K}_\sigma$. Обозначим это разбиение через τ_s. Тогда τ_{s+1} – более мелкое разбиение, чем τ_s, для любого $y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $N_{\tau_{s+1}}(y) \geqslant N_{\tau_s}(y)$, поэтому существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$ (конечный или равный $+\infty$).

Докажем, что $N_f(A, y) = \lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$. Для любого $\tau = \{A_i\}_{i\in I}$ имеем

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i, \Longrightarrow f^{-1}(y) \cap A = \bigcup_{i\in I} (f^{-1}(y) \cap A_i).$$

Поскольку множества A_i дизъюнктны, верно равенство $\operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap A) = \sum\limits_{i\in I} \operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap A_i)$, т. е. $N_f(A, y) = \sum\limits_{i\in I} \operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap A_i)$.

Если $f^{-1}(y) \cap A_i = \varnothing$, то $y \notin f(A_i) \Longrightarrow \chi_{f(A_i)}(y) = 0 = \operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap A_i)$.

Если $f^{-1}(y) \cap A_i \neq \varnothing$, то $y \in f(A_i) \Longrightarrow \chi_{f(A_i)}(y) = 1 \leqslant \operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap A_i)$.

Таким образом,

$$\operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap A_i) \geqslant \chi_{f(A_i)}(y) \text{ и } N_f(A, y) \geqslant \sum_{i\in I} \chi_{f(A_i)}(y) = N_\tau(y).$$

Получили:

$$N_f(A, y) \geqslant N_{\tau_s}(y) \Longrightarrow\ N_f(A, y) \geqslant \lim_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y). \tag{2}$$

Пусть $N_f(A, y) \geqslant q \in \mathbb{N}$, тогда в множестве A существует по крайней мере q различных корней уравнения $f(x) = y$. Зафиксируем корни $x_1, \dots, x_q \in A$. Так как все они различны, то $\rho_0 = \min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant q} \rho(x_i, x_j) > 0$ (ρ – метрика в $\mathbb{R}^n$). Если A_{jk} – множества, образующие разбиение τ_s, то $\operatorname{diam} A_{jk} \leqslant \operatorname{diam} P_{jk} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2^{s+1}} \longrightarrow 0$ при $s \to \infty$ и существует s такое, что $\operatorname{diam} A_{jk} < \rho_0$. Тогда в каждое множество A_{jk} попадет не более одной точки из $\{x_1, \dots, x_q\}$, поэтому существует не менее q множеств A_{jk}, для которых $y \in f(A_{jk})$, т. е. $\chi_{f(A_{jk})}(y) = 1$. Получаем:

$$N_{\tau_s}(y) = \sum_{(j,k)\in I_s} \chi_{f(A_{jk})}(y) \geqslant q \Longrightarrow \lim_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y) \geqslant q.$$

Если $N_f(A,y)=q\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)\geqslant q$, т. е. $N_f(A,y)\leqslant \lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$. Если $N_f(A,y)=+\infty$, то для любого $q\in\mathbb{N}$ имеем $N_f(A,y)\geqslant q\Rightarrow \lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)\geqslant q\Rightarrow \lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)=+\infty$, т. е. для любого y верно неравенство $N_f(A,y)\leqslant \lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$. Сопоставив с неравенством (2), получим $N_f(A,y)=\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$. Отсюда следует измеримость функции $N_f(A)$ и по теореме Леви и равенству (1)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(A)\,d\lambda_n=\lim_{s\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{\tau_s}\,d\lambda_n=\lim_{s\to\infty}\sum_{(j,k)\in I_s}\lambda_n\bigl(f(A_{jk})\bigr)$$

$$\leqslant \sup\left\{\sum_{i\in I}\lambda_n\bigl(f(A_i)\bigr)\;\middle|\;\{A_i\}_{i\in I} - \text{разбиение } A\right\}=V_f(A).$$

С другой стороны, $N_f(A,y)\geqslant N_\tau(y)$ для любого разбиения τ, поэтому

$$\sum_{i\in I}\lambda_n\bigl(f(A_i)\bigr)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_\tau d\lambda_n\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(A)d\lambda_n,$$

а тогда

$$V_f(A)=\sup_\tau\left\{\sum_{i\in I}\lambda_n\bigl(f(A_i)\bigr)\right\}\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(A)d\lambda_n. \qquad \square$$

В [3, §1, теорема 1] было доказано, что для непрерывного отображения $f\colon G\to\mathbb{R}^n$, где G – открыто в $\mathbb{R}^n$, для ячейки $P\subset G$ вариация $V_f(P)$ выражается такой же формулой. Таким образом, новое определение вариации $V_f(A)$ обобщает определение для ячейки из [3].

Теорема 2. *Пусть $n\leqslant m$, $G\subset\mathbb{R}^n$, $f\colon G\to\mathbb{R}^m$ – непрерывное инъективное отображение, $A\subset G$, $A\in\mathfrak{K}_\sigma$. Тогда для любого $\alpha=\{i_1,\dots,i_n\}$ верна оценка $V_{f_\alpha}(A)\leqslant H_n\bigl(f(A)\bigr)$ (H_n – n-мерная мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^m$).*

Доказательство. A можно представить в виде $A=\bigcup\limits_{j\in N_A} K_j$, где K_j – компактные множества, N_A не более чем счётно. Открытые множества измеримы по мерам, получаемым конструкцией Каратеодори (см. [4, гл. 2, §2.10, п. 2.10.1]), в частности, по n-мерной мере Хаусдорфа. Следовательно, компактные множества $f(K_j)$ измеримы и $f(A)=\bigcup\limits_{j\in N_A} f(K_j)$ измеримо по мере Хаусдорфа.

Пусть $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, где A_i – дизъюнктные множества из $\mathfrak{K}_\sigma$, множество I – не более чем счётно, $B_i = f(A_i)$. Обозначим через pr_α отображение проектирования из $\mathbb{R}^m$ на подпространство, порождённое базисными векторами $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$. Тогда $C_i = f_\alpha(A_i) = pr_\alpha\big(f(A_i)\big) = pr_\alpha(B_i)$. Поскольку при проектировании на подпространство диаметры множеств не возрастают, из определения меры Хаусдорфа легко видеть, что $H_n(C_i) \leqslant H_n(B_i)$. Как известно (см. [4, гл. 2, §2.10, п. 2.10.6]), в n-мерном подпространстве мера H_n совпадает с мерой Лебега, т. е.

$$\lambda_n\big(f_\alpha(A_i)\big) \leqslant H_n\big(f(A_i)\big). \tag{3}$$

Поскольку f инъективно и A_i дизъюнктны, образы $f(A_i)$ также дизъюнктны, а тогда $H_n\big(f(A)\big) = \sum\limits_{i \in I} H_n\big(f(A_i)\big)$. Складывая неравенства (3) для всех $i \in I$, получим:

$$\sum_{i \in I} \lambda_n\big(f_\alpha(A_i)\big) \leqslant \sum_{i \in I} H_n\big(f(A_i)\big) = H_n\big(f(A)\big).$$

Поскольку это верно для любого разбиения τ множества A на дизъюнктные множества из $\mathfrak{K}_\sigma$, получаем:

$$V_{f_\alpha}(A) = \sup_\tau \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_n\big(f_\alpha(A_i)\big) \right\} \leqslant H_n\big(f(A)\big). \qquad \square$$

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$, M – n-мерное многообразие в топологии, индуцированной из $\mathbb{R}^m$, множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $f\colon G \to U \subset M$ – параметризация множества U, открытого в M (гомеоморфизм G на U). Назовём многообразие M многообразием с локально конечной мерой Хаусдорфа, если для любой точки $x \in M$ существует окрестность этой точки $U(x)$, такая, что $H_n(U(x)) < \infty$. Тогда, если $f\colon G \to U(x)$ – параметризация окрестности $U(x)$, то из теоремы 2 следует, что $V_{f_\alpha}(G) < \infty$ для любого $\alpha = \{i_1, \ldots, i_n\}$, т. е. многообразие M является многообразием с локально конечными вариациями (определение из [3, §4]). Таким образом, частично подтверждается предположение из [3, §6] о том, что многообразия с локально конечными вариациями – это многообразия с локально конечной мерой Хаусдорфа.

Список литературы

1. Б. З. Вулих, *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* — Наука, М., 1973.

2. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* — Государственное издательство технико-теоретической литературы, М., 1957.
3. А. В. Потепун, *Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях с локально конечными вариациями, часть I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **327** (2005), 168–206.
4. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* — Наука, М., 1987.

Potepun A. V. Hausdorff measure on n-dimensional manifolds in $\mathbb{R}^m$ and n-dimensional variations.

If $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}^m$ is an injective continuous mapping and $f_1, \dots, f_m$ are coordinate functions of f, then the curve $f([a;b])$ is rectifiable if and only if the variations of all f_k are finite. By Jordan's theorem for the length of the curve we have

$$V_{f_i}\big([a;b]\big) \leqslant l\big(f([a;b])\big) \leqslant \sum_{k=1}^{m} V_{f_k}\big([a;b]\big), \quad i = 1, \dots, m.$$

The length $l\big(f([a;b])\big)$ is $H_1\big(f([a;b])\big)$, where H_1 is one-dimensional Hausdorff measure in $\mathbb{R}^m$.

In this article, the notion of the variation $V_f\big([a;b]\big)$ of a function

$$f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$$

is generalized to the variation $V_f(A)$ of a continuous mapping $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, where G is an open subset of $\mathbb{R}^n$, on a set $A \subset G$, $A = \bigcup_{i \in I} K_i$, where I is countable, all K_i are compact.

Suppose $f\colon G \to \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \leqslant m$, $f_1, \dots, f_m$ are the coordinate functions of f. If $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant m$, $\alpha = \{i_1, \dots, i_n\}$, then f_α is the mapping with the coordinate functions $f_{i_1}, \dots, f_{i_n}$:

$$f_\alpha : \begin{cases} x_{i_1} = f_{i_1}(t_1, \dots, t_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{i_n} = f_{i_n}(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \qquad (t_1, \dots, t_n) \in G.$$

The main result states that if f is a continuous injective mapping, $f\colon G \to \mathbb{R}^m$, $n \leqslant m$, G is an open subset of $\mathbb{R}^n$, $A \subset G$, $A = \bigcup_{i \in I} K_i$, I is countable, all K_i are compact, then

$$V_{f_\alpha}(A) \leqslant H_n\big(f(A)\big),$$

where $V_{f_\alpha}(A)$ is the variation of f_α on A, H_n is n-dimensional Hausdorff measure in $\mathbb{R}^m$.

Математико-механический факультет
Ст.-Петербургский государственный университет,
Университетский пр., 28, Петергоф,
Санкт-Петербург, 198504, Россия

E-mail: `potepun.alexei@yandex.ru`
`chair.math.analysis@gmail.com`

Поступило 4 июня 2018 г.